ЛЕКЦИЯ № 4

Симплекс-метод, теория двойственности ЛП

1. Двухфазный симплекс-метод или метод искусственного базиса

2. Теоремы двойственности ЛП

Метод искусственного базиса

Пусть $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1, \ldots, x_n})$, $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u_1, \ldots, u_m})$.
Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\boldsymbol{\xi = u_1 + \cdots + u_m \longrightarrow \min}$$

$$\boldsymbol{Ax + Eu = b \geq 0}$$

$$\boldsymbol{(a_i x + u_i = b_i \geq 0, i = \overline{1, m})}$$

$$\boldsymbol{x, u \geq 0}$$

$\boldsymbol{z^0 = (0, b) \in R^{n+m}}$ – б.д.р.

Метод искусственного базиса

Вспомогательная задача разрешима и $\min \xi \geq 0$.

Пусть $z^* = (x^*, u^*)$ – оптимальное решение

A. $\min \xi > 0 \iff Q = \emptyset$

B. $\min \xi = 0 \implies u_i^* = 0$, $i = \overline{1, m}$, $\implies$ вектор x^* – доп. реш. задачи (5)-(7) $\implies x^*$ – б.д.р. задачи (5)-(7).

$\{A_j | j \in S\} \cup \{E_i | i \in I'\}$ – базис z^*, где $S \subseteq \{1, \ldots, n\}, I' \subseteq \{1, \ldots, m\}$ и

Метод искусственного базиса

$|S| + |I'| = m.$ Тогда

$$A_k = \sum_{j \in S} z_{jk} A_j + \sum_{i \in I'} \mu_{ik} E_i$$

Возможны случаи:

В1. $I' = \emptyset$.

В2. $I' \neq \emptyset$ и $\exists r \in I', \exists s \notin S \ \mu_{rs} \neq 0$.

В3. $I' \neq \emptyset$ и $\forall r \in I', \forall s = \overline{1, n} \ \mu_{rs} = 0$.

Метод искусственного базиса

В1. $\boldsymbol{I'} = \emptyset \Longrightarrow |\boldsymbol{S}| = \boldsymbol{m} \Longrightarrow$ множество $\{\boldsymbol{A_j} | \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S}\}$ – базис б.д.р. $\boldsymbol{x^*}$.

Преобразовать оптимальную с.-т.:

1. Вычеркнуть столбцы для переменных:

$\boldsymbol{u_1, \ldots, u_m}$.

2. Пересчитать 0-строку: $\boldsymbol{z_{00} = -(c, x^*)}$,

$\boldsymbol{z_{0k} = 0, k \in S, z_{0k} = c_k - \sum_{j \in I} c_j z_{jk}, k \notin S}$.

Метод искусственного базиса

В2. $\boldsymbol{I'} \neq \emptyset$ и $\exists \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I'}$, $\exists \boldsymbol{s} \notin \boldsymbol{S}$ $\boldsymbol{\mu_{rs}} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ Выполнить элементарное преобразование с.-т. с ведущим элементом $\boldsymbol{\mu_{rs}} \neq \mathbf{0}$. Новая с.-т. соответствует базису

$$\{\boldsymbol{A_j} | \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{s}\}\} \cup \{\boldsymbol{E_i} | \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I'} \setminus \{\boldsymbol{r}\}\}.$$

Метод искусственного базиса

В3. $\boldsymbol{I'} \neq \emptyset$ и $\forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I'}, \forall \boldsymbol{s} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}} : \boldsymbol{\mu_{rs}} = \mathbf{0}.$

Ограничения $\boldsymbol{a_i x = b_i}$ системы (6) с номерами $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I'}$ являются избыточными.

Первая теорема двойственности

Теорема 5 (Первая теорема двойственности). Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновре но неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.

ЛП: двойственная задача

Прямая задача		Двойственная задача
$w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$		$z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$a_i x \geq b_i$	$i \in I_1$	$y_i \geq 0$
$a_i x = b_i$	$i \in I_2$	y_i — своб.
$x_j \geq 0$	$j \in J_1$	$yA_j \leq c_j$
x_j — своб.	$j \in J_2$	$yA_j = c_j$.

Упражнение.

Техника получения этой схемы: либо повторить выкладки, приведшие к задаче (8), (9), либо воспользоваться сводимостью общей задачи ЛП к задаче ЛП в канонической форме и применить готовый рецепт (задача (8), (9)).

Вторая теорема двойственности

Теорема 6 (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). Допустимые решения $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$y_i(a_i x - b_i) = 0 \ (i \in I),$$

$$(c_j - yA_j)x_j = 0 \ (j \in J).$$