ЛЕКЦИЯ № 5

Теория двойственности ЛП (продолжение)

1. Теоремы Фаркаша – Минковского и Гордана

Необходимые условия экстремума

2. Необходимые условия оптимальности Фритца–Джона

3. Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

Теорема 7 (теорема Фаркаша–Минковского). Система уравнений $Ax = b, x \geq 0$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(b, y) \leq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA \leq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\exists x$ $Ax = b, x \geq 0$ и пусть y — произвольное решение системы $yA \leq 0$. Тогда

$$(b, y) = (Ax, y) = (x, yA) \leq (x, 0) = 0.$$

Достаточность. Пусть неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \leq \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы неравенств $\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \leq \mathbf{0}$.

Следствие 5. **Система уравнений $Ax \leq b$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(b, y) \geq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA = 0, y \geq 0$.**

$Ax \leq b$ разрешима $\iff$ разрешима система $Ax_1 - Ax_2 + Eu = b, x_1, x_2, u \geq 0 \iff$ когда неравенство $(b, y) \leq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA \leq 0, -yA \leq 0, Ey \leq 0 \iff$ неравенство $(b, y) \geq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA = 0, y \geq 0$. ■

Следствие 6 (теорема Гордана). *Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:*

1. Разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$;

2. существует такой $\neq \mathbf{0}$ *вектор* $\boldsymbol{y}$, *что* $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

Действительно, система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$ разрешима $\Longleftrightarrow$ разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} \leq (-\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \ldots, -\mathbf{1})^{\top}$. По теореме Ф.–М. разрешимость последней системы эквивалентна выполнению условия:

если вектор $\boldsymbol{y}$ решение системы $\boldsymbol{yA} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, то выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. Т.е. не существует ненулевого вектора $\boldsymbol{y}$ такого, что $\boldsymbol{yA} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.

Теперь пусть существует ненулевой вектор $\boldsymbol{y}$ такой, что $\boldsymbol{yA} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. Но тогда не выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \Longrightarrow$ не выполнено условие теоремы Ф.–М. $\Longrightarrow$ система $\boldsymbol{Ax} \leq (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{-1}, \ldots, \boldsymbol{-1})^{\top}$ неразрешима $\Longrightarrow$ неразрешима система

$\boldsymbol{Ax} < \boldsymbol{0}$.$\blacksquare$

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

Найти:

$$\min f(x) \tag{1}$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Здесь $f, \varphi_i : R^n \longrightarrow R$ и $f, \varphi_i \in C^1$.

Определение 8. Направление $s \neq 0$ **называется возможным в точке** $x \in Q$, **если существует такое число** $\overline{\beta}$, **что** $x + \beta s \in Q$, $\forall \beta \in [0, \overline{\beta}]$.

Ограничение φ_i называется **активным** в точке x, если $\varphi_i(x) = 0$. $I(x)$ – множество номеров ограничений активных в данной точке.

Лемма 7. Если вектор $s \neq 0$ удовлетворяет системе

$$(\varphi_i'(x), s) + \sigma \leq 0, i \in I(x),$$

при некотором $\sigma > 0$, то направление s является возможным в точке x.

Доказательство. Считаем, что $I(x) \neq \varnothing$ (т.к. иначе любое направление $s \neq 0$ является возможным)

Если $\boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})$, то малое перемещение не нарушает строгое ограничение $\boldsymbol{\varphi_i}(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0} \Longrightarrow$ найдется подходящее $\overline{\boldsymbol{\beta_i}}$.

Пусть $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})(\equiv \boldsymbol{\varphi_i}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0})$. Далее рассуждаем от противного. Допустим, что $\boldsymbol{\varphi_i}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta s}) > \mathbf{0},$ для достаточно малых $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{0} \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\varphi_i}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta s})/\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\varphi_i}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta s})-\boldsymbol{\varphi_i}(\boldsymbol{x}))/\boldsymbol{\beta} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}^{\prime}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}) \geq \mathbf{0} \text{ (при } \boldsymbol{\beta} \to \mathbf{0}).$$

Противоречие. Т.к. по условиям леммы

$$(\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}^{\prime}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}) < \mathbf{0}, \blacksquare$$

Геометрическая форма необходимых условий оптимальности

Теорема 8. Для того, чтобы точка $x \in Q$ являлась точкой локального минимума функции f на множестве Q необходимо, чтобы для любого решения (s, σ) системы

$$(\varphi_i'(x), s) + \sigma \leq 0, i \in I(x), \tag{12}$$

$$(f'(x), s) + \sigma \leq 0, \tag{13}$$

выполнялось условие

$$\sigma \leq 0. \tag{14}$$

Теорема 9 (Необходимые условия оптимальности Фритца–Джона). *Пусть x^* — локальный экстремум задачи (1), (2), функции f, $\varphi_i, i = \overline{1, m}$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы. Тогда найдутся такие не все равные 0 множители $\lambda_i \geq 0, i = \overline{0, m}$, что*

$$\lambda_0 f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0^n, \tag{15}$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \tag{16}$$

Следовательно

$$\boldsymbol{\lambda_0 f'(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0^n,}$$

$$\boldsymbol{\lambda_0 + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i = 1.} \quad \mathbf{(17)}$$

Положим $\boldsymbol{\lambda_i = 0, i \notin I(x^*)}$ и получим

$$\boldsymbol{\lambda_0 f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0^n,}$$

$$\boldsymbol{\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.} \ \blacksquare$$

Теорема 10 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера). Пусть x^* — локальный экстремум задачи (1), (2), функции f, $\varphi_i, i = \overline{1, m}$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы и вектора $\varphi_i'(x^*), i \in I(x^*)$, линейно независимы. Тогда найдутся такие множители $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*), \qquad (18)$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \qquad (19)$$