ЛЕКЦИЯ № 6

Необходимые и достаточные условия экстремума

1. Необходимые условия оптимальности и теорема о замыкании конуса возможных направлений

2. Критерий оптимальности в локальной и нелокальной формах

Теорема 10 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера). Пусть x^* — локальный экстремум задачи (1), (2), функции f, $\varphi_i, i = \overline{1, m}$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы и вектора $\varphi_i'(x^*), i \in I(x^*)$, линейно независимы. Тогда найдутся такие множители $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*), \tag{18}$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \tag{19}$$

Доказательство. Из теоремы 9 $\Longrightarrow$ найдутся такие не все равные 0 множители $\boldsymbol{\lambda_i \geq 0, i = \overline{0, m}}$, что

$$\boldsymbol{\lambda_0 f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0^n.} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.} \tag{16}$$

Также получили равенство

$$\boldsymbol{\lambda_0 + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i = 1.} \tag{17}$$

Покажем, что $\boldsymbol{\lambda_0 \neq 0}$ (от противного). Пусть $\boldsymbol{\lambda_0 = 0}$. Из (17) $\Longrightarrow \exists\, \boldsymbol{\lambda_i \neq 0} \Longrightarrow \boldsymbol{\{\varphi_i'(x^*)\}_{i \in I(x^*)}}$ линейно зависимые вектора. Противоречие. $\Longrightarrow \boldsymbol{\lambda_0 > 0}$

Теорема о замыкании конуса возможных направлений

$$K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 | (\varphi_i'(x), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x)\}.$$

Т.к. $K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x)$, то конус $K_{\leq}(x)$ называется внешней аппроксимацией конуса возможных направлений.

Теорема 11.

$$\text{Если } K_{<}(x) \neq \emptyset, \text{ то } \overline{K}_f(x) = K_{\leq}(x).$$

Доказательство. Действительно, пусть конус $K_{<}(x)$ не пуст. Тогда найдётся $\overline{s}$ такой, что

$$(\varphi_i'(x), \overline{s}) < 0, \forall\, i \in I(x).$$

Пусть $s \in K_{\leq}(x)$, т.е.

$$(\varphi_i'(x), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x).$$

Очевидно, что для любого $\lambda \in [0, 1)$:

$$\lambda s + (1 - \lambda)\overline{s} \in K_{<}(x).$$

Таким образом $\boldsymbol{s}$ предел последовательности направлений из $\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{\lambda}$ стремящимся к 1 снизу. Учитывая, что

$$\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}),$$

получим $\overline{\boldsymbol{K}}_<(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x})$.

Т.к.

$$\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_f(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}),$$

то

$$\overline{\boldsymbol{K}}_f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{s} \neq 0 | (\varphi_i'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}) \leq \mathbf{0}, \forall\, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})\}. \blacksquare$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Задача (1), (2) называется задачей выпуклого программирования, если функции $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{\varphi_i, i = \overline{1, m},}$ — выпуклы.

Множество $\boldsymbol{Q}$ выпукло. По прежнему считаем, что $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{\varphi_i} \in \boldsymbol{C^1}$.

Условие регулярности для выпуклого случая:

$$\forall \boldsymbol{i, i = \overline{1, m},}\ \exists \boldsymbol{x^i} \in \boldsymbol{Q : \varphi_i(x^i) < 0.}$$

Эквивалентно условию регулярности Слейтера

$$\exists \boldsymbol{\widetilde{x}} \in \boldsymbol{Q : \varphi_i(\widetilde{x}) < 0, i = \overline{1, m}.}$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Лемма 8. Функция f дифференцируемая на выпуклом множестве Q, выпукла в том и только в том случае, когда для любых $x, y \in Q$: $(f'(x), y - x) \le f(y) - f(x)$.

Доказательство. $\forall x \ne y \in Q, \forall \alpha\ 0 < \alpha \le 1$

$$f(x + \alpha(y - x)) \le f(x) + \alpha(f(y) - f(x)).$$

Перепишем неравенство:

$$\|y - x\| \frac{f(x + \beta s) - f(x)}{\beta} \le f(y) - f(x),$$

где $s = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, $\beta = \alpha\|y - x\|$. Устремим β к 0. В пределе получим

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$(f'(x), s)\;\|y - x\| \le f(y) - f(x).$$

Но

$$(f'(x), s)\;\|y - x\| = (f'(x), y - x).$$

Итак, доказали неравенство

$$(f'(x), y - x) \le f(y) - f(x).$$

В обратную сторону. Пусть $\forall x, y \in Q : (f'(x), y - x) \le f(y) - f(x)$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

По условию $\forall\ \alpha \in [0,1] : z = \alpha x + (1-\alpha) y \in Q$.

Умножим неравенство $(f'(z), x - z) \le f(x) - f(z)$ на α, а

неравенство $(f'(z), y - z) \le f(y) - f(z)$ на $(1-\alpha)$ и сложим их

$$0 = (f'(z), \alpha(x - z) + (1-\alpha)(y - z)) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - f(z)$$

$$\Longrightarrow f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Лемма 9. Если

$$\boldsymbol{Q = \{x | \varphi_i(x) = (a_i, x) - b_i \leq 0, i = \overline{1, m}\},}$$

то условия

$$\boldsymbol{(a_i, s) \leq 0, i \in I(x^*)}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы направление $\boldsymbol{s}$ было возможным в точке $\boldsymbol{x^* \in Q}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\beta > 0}$. Рассмотрим

$$\boldsymbol{\varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = (a_i, x^*) - b_i + \beta(a_i, s).}$$

$$\boldsymbol{\forall i \notin I(x^*)\ (a_i, x^*) - b_i < 0 \Rightarrow \forall i \notin I(x^*)\ \varphi_i(x^* + \beta s) \leq 0,}$$

для достаточно малых $\boldsymbol{\beta}$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$\forall i \in I(x^*)\ \varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = \beta(a_i, s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^* + \beta s \in Q\ \forall \beta > 0 \Leftrightarrow (a_i, s) \leq 0\ \forall i \in I(x^*).\blacksquare$$

Другими словами в лемме утверждается, что $K_f(x) = K_{\leq}(x)$

Эта лемма позволяет элиминировать условие Слейтера в задаче выпуклого программирования в случае линейных ограничений.

Помним: функции f, φ_i — выпуклые, непрерывно-дифференцируемые. Множество допустимых решений Q удовлетворяет условию Слейтера.

Критерий оптимальности: выпуклый случай

Теорема 12 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*),$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1,m}.$$

Доказательство. Из леммы 8 и условия Слейтера следует, что для любого $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)$

$$\mathbf{0} > \boldsymbol{\varphi_i}(\widetilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\varphi_i}(\widetilde{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{\varphi_i}(\boldsymbol{x}^*) \geq (\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}'(\boldsymbol{x}^*), \widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*).$$

Таким образом вектор $\boldsymbol{s} = (\widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*) \in \boldsymbol{K}_{<}(\boldsymbol{x}^*)$. Следовательно, по теореме о замыкании конуса возможных направлений имеем $\overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{K}_{\leq}(\boldsymbol{x}^*)$. Повторяем соответствующие рассуждения второго доказательства теоремы 10.

Критерий оптимальности: линейный случай

Теорема 13 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i,$$

$$\lambda_i\big((a_i, x) - b_i\big) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Критерии оптимальности

Функцию

$$\boldsymbol{L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)},$$

определенную при всех $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, назовем функцией Лагранжа для задачи (1), (2).

Пара $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ называется седловой точкой функции Лагранжа, если

$$\boldsymbol{L(x^*,\lambda) \overset{(3)}{\leq} L(x^*,\lambda^*) \overset{(4)}{\leq} L(x,\lambda^*)\ \forall x \in R^n, \forall \lambda \geq 0.}$$

Критерии оптимальности

Теорема 14 (Теорема Куна-Таккера в нелокальной форме). Вектор $x^* \in Q$ является оптимальным решением задачи выпуклого программирования тогда и только тогда, когда существует такой вектор λ^*, что пара (x^*, λ^*) является седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x^* \in Q$ — оптимальное решение. Тогда из теоремы 12 имеем

$$\exists \lambda^* \geq 0 : \left.\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x}\right|_{(x^*, \lambda^*)} = f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i'(x^*) = 0 \text{ и}$$

$$\lambda_i^* \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Достаточность. Как в теореме 1. ■