ЛЕКЦИЯ № 7

Методы разработки алгоритмов решения

1. Преобразования и стратегии решения

2. Декомпозиция Бендерса

3. Декомпозиция для максиминной задачи (стратегия решения)

Методы разработки алгоритмов решения

Преобразование: сведение исследуемой задачи к "координирующей"задаче.

Стратегия решения: сведение "координирующей"задачи к последовательности связанных, но более простых задач.

Методы разработки алгоритмов решения

МЕТОД РЕШЕНИЯ = НАБОР ПРЕОБРАЗОВАНИЙ + СТРАТЕГИЯ РЕШЕНИЯ

Преобразования: дуализация, проекция, внутренняя линеаризация, внешняя линеаризация ...

Стратегии решения: декомпозиция, допустимые направления, разложение, сужение, релаксация...

Синтез методов решения:

1. (проекция/декомпозиция) – точный метод решения для задачи о (r, p)-центроиде

2. (проекция, внешняя линеаризация/релаксация) – декомпозиция Бендерса

3. (проекция/разложение) – алгоритмы разбиения Розена

Синтез методов решения:

4. (внутренняя линеаризация/сужение) – декомпозиция Данцига-Вулфа

5. (проекция/допустимые направления) –

6. (дуализация/допустимые направления) – метод Такахаши

7. (внешняя линеаризация/релаксация) – метод Келли

Проекция задачи на пространство переменных x

Рассмотрим задачу $(\boldsymbol{P})$:

$$\min_{x\in X, y\in Y} f(x,y)$$

$$\varphi_i(x,y) \leq 0, i = \overline{1,m}.$$

Введём функцию возмущения данной задачи:

$$\rho(x) = \inf_{y\in Y} f(x,y),$$

$$\varphi_i(x,y) \leq 0, i = \overline{1,m}.$$

Проекция задачи на пространство переменных x

Положим

$$V = \{x | \exists y : \varphi_i(x, y) \leq 0, i = \overline{1, m}\}.$$

Множество V является проекцией области допустимых решений задачи P на пространство переменных x. Нетрудно проверить, что задача P эквивалентна следующей задаче (P_x):

$$\min_{x \in X \cap V} \rho(x),$$

которая и является проекцией задачи P на пространство переменных x.

Проекция задачи на пространство переменных x

Лемма 10. Задача $\boldsymbol{P}$ недопустима или неограничена снизу тогда и только тогда, когда тоже самое выполняется для её проекции. Если $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ – оптимальное решение задачи $\boldsymbol{P}$, то $\boldsymbol{x}^*$ – оптимальное решение проекции $\boldsymbol{P_x}$. Если $\boldsymbol{x}^*$ – оптимальное решение проекции и инфинум в $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}^*)$ достигается на $\boldsymbol{y}^*$, то $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ – оптимальное решение исходной задачи $\boldsymbol{P}$.

Стратегия релаксации (идея)

Свести решение задачи

$$\min_{x \in X} f(x) \tag{1}$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

к решению семейства задач вида (P_S):

$$\min_{x \in X} f(x)$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, i \in S.$$

Стратегия релаксации

Шаг 1. $\underline{f} = -\infty$, $S = S^0$.

Шаг 2. Решить задачу P_S (релаксированная). Если она неразрешима, то конец, так как исходная задача неразрешима. Иначе пусть x^S – оптимальное решение. Если $\varphi_i(x^S) \le 0, i \notin S$, то конец и x^S – оптимальное решение. Иначе на шаг 3.

Шаг 3. Пусть V – некоторое множество номеров ограничений и существует $i \in V$ такой, что $\varphi_i(x^S) > 0$.

Если $f(x^S) > \underline{f}$, то $\underline{f} = f(x^S)$, $S = E \cup V$, где $E = \{i | \varphi_i(x^S) = 0\}$, иначе $S = S \cup V$. На шаг 2.

Декомпозиция Бендерса

$$\text{Декомпозиция Бендерса} =$$
$$= (\text{Проекция, внешняя аппроксимация / релаксация})$$

Рассмотрим следующую задачу

$$\max_{x \geq 0, y \in Y} \{(c, x) + f(y)\}$$

$$Ax + F(y) \leq b, \text{ где}$$

$F : R^p \to R^m$, $f : R^p \to R$.

Предположим, что данная задача разрешима. Т.е. существует допустимое решение (x^*, y^*), на котором достигается максимальное значение целевой функции на множестве допустимых решений задачи.

Декомпозиция Бендерса

Спроектируем задачу на пространство переменных $\boldsymbol{y}$ и получим следующее её эквивалентное представление:

$$\max_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} \cap \boldsymbol{V}} \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) + \sup_{\boldsymbol{x} \geq 0}[(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})]\}$$

Рассмотрим задачу линейного программирования $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$:

$$\max_{\boldsymbol{x} \geq 0} \{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\}$$

Она разрешима для $\boldsymbol{y}^*$. Следовательно, двойственная к ней задача $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y})$ допустима для любого $\boldsymbol{y}$:

$$\min_{\boldsymbol{u} \geq 0} \{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{u}) | \boldsymbol{u}\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}\}$$

Декомпозиция Бендерса

Пусть $\boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^p$ – вершины, $\boldsymbol{u}^{p+1}, \ldots, \boldsymbol{u}^{p+q}$ – направляющие вектора бесконечных рёбер задачи $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y})$.

Задача $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$ допустима $\Leftrightarrow$ задача $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y})$ разрешима $\Leftrightarrow$

$$(b - F(y), u^j) \geq 0, j = p + 1, \ldots, p + q.$$

Т.е. проекция представима в следующем виде:

$$\max_{y \in Y : (b - F(y), u^j) \geq 0, j = p+1, \ldots, p+q} \{f(y) + \max_{x \geq 0} [(c, x) | Ax \leq b - F(y)]\}$$

Применяем внешнюю аппроксимацию:

$$\max_{y \in Y : (b - F(y), u^j) \geq 0, j = p+1, \ldots, p+q} \{f(y) + \min_{j=1, \ldots, p} (b - F(y), u^j)\}$$

Декомпозиция Бендерса

Итак, исходная задача оказалась эквивалентной следующей координирующей задаче:

$$\max_{y \in Y, y_0} \{f(y) + y_0\}$$

$$y_0 \le (b - F(y), u^j), j = 1, \ldots, p$$

$$(b - F(y), u^j) \ge 0, j = p + 1, \ldots, p + q.$$

Проблема: количество вершин и бесконечных рёбер может оказаться экспоненциально большим. Следовательно задача перечисления таких объектов является вычислительно сложной. Неудивительно, что в качестве стратегии решения необходимо использовать стратегию релаксации.

Декомпозиция для максиминной задачи

$$z = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} R(x, y).$$

$\bar{Y} \subseteq Y$.

Шаг 1: Решить релаксированную задачу

$$\bar{z} = \max_{\gamma, x \in X} \gamma;$$

$$\gamma \le R(x, y), \quad y \in \bar{Y}.$$

Пусть x^* – её оптимальное решение.

Шаг 2: Решить подзадачу

$$\underline{z} = \min_{y \in Y} R(x^*, y).$$

Пусть y^* – её оптимальное решение.

Шаг 3: Если $\bar{z} = \underline{z}$, то стоп. Иначе $\bar{Y} := \bar{Y} \cup y^*$ и вернуться на Шаг 1.

Свойства метода

Лемма 11.

1. Если на шагах 1 и 2 существуют оптимальные решения $\boldsymbol{x}^*$ и $\boldsymbol{y}^*$, то $\underline{z} \leq z \leq \bar{z}$.

2. Метод конечен, если на одном из шагов 1 или 2 повторяется оптимальное решение.