ЛЕКЦИЯ № 8

1. Алгоритм решения задачи о (r|p)-центроиде

2. Метод Такахаши

3. Метод Келли

Постановка задачи о (r|p)-центроиде

Данные задачи:

$I = \{1, \ldots, n\}$ — множество пунктов для размещения предприятий;

$J = \{1, \ldots, m\}$ — множество потребителей;

$d_j \geq 0$ — доход за обслуживание j-го потребителя;

$g_{ij} \geq 0$ — матрица транспортных затрат.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если Лидер в пункте } i \text{ открывает предприятие,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если Конкурент в пункте } i \text{ открывает предприятие,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача о (r|p)-центроиде (задача Лидера)

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из предприятия Лидера,} \\ 0, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из предприятия Конкурента.} \end{cases}$$

$$\max_{x,y,u} \sum_{j \in J} d_j u_j$$

$$\sum_{i \in I} x_i = p,$$

$$(y, u) \in F^*(x),$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i \in I.$$

Задача Конкурента

$$I_j(x) = \{i \in I | g_{ij} < \min_{i \in I}(g_{ij} | x_l = 1\}, j \in J$$

$$\max_{y,u} \sum_{j \in J} d_j(1 - u_j)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = r, 1 - u_j \leq \sum_{i \in I_j(x)} y_i, j \in J,$$

$$y_i + x_i \leq 1, i \in I,$$

$$y_i, u_j \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J.$$

Алгоритм решения

Точный алгоритм решения для задачи о (r|p)-центроиде = = (проекция/декомпозиция)

Проектируем задачу на пространство переменных $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{\rho(x) = \max_{y,u}\Big\{\sum_{j\in J} d_j u_j | (y,u) \in F^*(x)\Big\} =}$$

$$\boldsymbol{= \min_{y,u}\Big\{\sum_{j\in J} d_j u_j | (y,u) \in F^*(x)\Big\}}$$

$$\boldsymbol{V = \{x : F^*(x) \neq \emptyset\} = B^n, X = \{x : |x| = p\}.}$$

Координирующая задача:

$$\boldsymbol{\max_{x\in X\cap V} \rho(x) = \max_{x:|x|=p} \min_{y:|y|=r} R(x,y),}$$

где

Алгоритм решения

$$\boldsymbol{R(x, y) = \min_{u} \sum_{j \in J} d_j u_j}$$

$$\boldsymbol{1 - u_j \leq \sum_{i \in I_j(x)} y_i, j \in J,}$$

$$\boldsymbol{u_j \in \{0, 1\}, j \in J.}$$

МЕТОД ТАКАХАШИ = (ДУАЛИЗАЦИЯ/СПУСК)

Рассмотрим задачу P:

$$\boldsymbol{f(x) \longrightarrow \max_{x}}$$

$$\boldsymbol{H(x) = 0, G(x) = 0.}$$

$\boldsymbol{f}$ – строго вогнутая функция, ограничения линейны.

Пусть ограничения $\boldsymbol{G(x) = 0}$ делают задачу сложной.

Применяем дуализацию (преобразование). Получим задачу D:

$$\boldsymbol{h(\lambda) \longrightarrow \min_{\lambda}}$$

где

$$\boldsymbol{h(\lambda) = \sup_{x: H(x)=0} \{f(x) + \lambda^t G(x)\}.}$$

МЕТОД ТАКАХАШИ

Шаг 1: Выбрать начальное значение $\boldsymbol{\lambda^0}$.

Шаг 2: Для $\boldsymbol{\lambda = \lambda^0}$ решить подзадачу

$$\sup_{x:H(x)=0} \{f(x) + \lambda^t G(x)\}.$$

Пусть $\boldsymbol{x^0}$ – её оптимальное решение. Если $\boldsymbol{G(x^0) = 0}$, то $\boldsymbol{x^0}$ – оптимальное решение задачи P. Иначе выполнить шаг 3.

Шаг 3: Положить $\boldsymbol{\lambda' = \lambda^0 - \alpha G(x^0), \alpha > 0}$ – длина шага.Вернуться на Шаг 2 с новым $\boldsymbol{\lambda'}$.

МЕТОД КЕЛЛИ = (ВНЕШНЯЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ/РЕЛАКСАЦИЯ)

$$(c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \min_{x \geq 0}$$

$$Ax = b, \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}.$$

Применяем внешнюю линеаризацию

$$(c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \min_{x \geq 0}$$

$$\varphi_i(\overline{x}) + \nabla \varphi_i(\overline{x})(x - \overline{x}) \leq 0, \forall x Ax = b.$$

МЕТОД КЕЛЛИ ИЛИ МЕТОД СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

Данный метод используется для решения задач выпуклого программирования вида:

$$\min f(x)$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}.$$

Здесь $f, \varphi_i : R^n \longrightarrow R$ – выпуклые функции и $f, \varphi_i \in C^1$.

МЕТОД КЕЛЛИ ИЛИ МЕТОД СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

Вводя дополнительные переменную и ограничение, сделаем функционал задачи линейным:

$$\min y$$

$$f(x) \leq y$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m,$$

$\Longrightarrow$ без ограничения общности считаем, что $f(x) = \langle c, x \rangle$ и ограничимся изучением выпуклых задач вида:

МЕТОД КЕЛЛИ

$$(c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \min$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}.$$

Пусть в задаче существует оптимальное решение x^*, которое содержится в многогранном множестве $Q_0 = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$, а также $Q \subseteq Q_0$.

МЕТОД КЕЛЛИ = (ВНЕШНЯЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ/РЕЛАКСАЦИЯ)

Итерация k.

Шаг 1. Решаем задачу ЛП

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \longrightarrow \mathbf{min}$$

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{k}},$$

где $\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{k}}$ – текущее многогранное приближение множества $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{k}}$.

Пусть $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$ – оптимальное решение этой задачи.

МЕТОД КЕЛЛИ

Если x^k – допустимое решение исходной задачи, то оно его оптимальное решение. Конец работы алгоритма. Иначе переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Найдём номер i_k ограничения, для которого величина $\varphi_{i_k}(x^k) > 0$ максимальна. Перейдём к выполнению следующей итерации с

$$Q^{k+1} = Q^k \cap \{x | \varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq \leq 0.\}$$

Корректность определения множества Q^{k+1}.

1. Т.к. ограничение $\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq 0$ линейно, то множество Q^{k+1} является многогранным.

2. Т.к. множество Q^k и функция φ_{i_k} выпуклые, то

$$\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq \varphi_{i_k}(x)$$

для всех $x \in Q^k$ (Лемма 8, лек. № 7)$\Longrightarrow Q \subseteq Q^{k+1}$.

МЕТОД КЕЛЛИ

(Другими словами ограничение

$$\boldsymbol{\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) = 0}$$

является отсечением, которое отсекает точку $\boldsymbol{x^k}$.)

Если алгоритм останавливается через конечное число шагов, то текущее приближение – оптимальное решение задачи. Рассмотрим случай, когда последовательность $\boldsymbol{\{x^k\}}$ бесконечна.

Теорема 15. Любая предельная точка последовательности $\{\boldsymbol{x}^k\}$, порождённая методом секущих плоскостей, есть оптимальное решение задачи.

Доказательство. Последовательность $\{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^k)\}$ монотонно неубывающая и ограничена сверху (т.к. существует оптимальное решение). Поэтому без ограничения общности считаем, что последовательность $\{\boldsymbol{x}^k\}$ ограничена. Тогда считаем, что последовательность $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k \in N}$ сходится и $\overline{\boldsymbol{x}}$ – её предел.

МЕТОД КЕЛЛИ

Выберем произвольное ограничение с номером $\boldsymbol{i}$.

Пусть $\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\}_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{T}}$, где $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{N}$, — подпоследовательность элементов, для которых секущая плоскость порождалась с помощью $\boldsymbol{i}$-го ограничения.

Возможны два случая.

МЕТОД КЕЛЛИ

1. Найдётся номер $\boldsymbol{k_0}$ такой, что $\boldsymbol{\varphi_i(x^k) \leq 0}$ для всех $\boldsymbol{k \geq k_0}$. Тогда

$$\boldsymbol{\varphi_i(x^k) \longrightarrow \varphi_i(\overline{x}) \leq 0.}$$

Либо

2. Подпоследовательность $\boldsymbol{\{x^k\}_{k \in T}}$ бесконечна. Тогда для любого $\boldsymbol{k' > k}$

$$\boldsymbol{\varphi_i(x^k) + (\varphi_i'(x^k), x^{k'} - x^k) \leq 0.}$$

МЕТОД КЕЛЛИ

Следовательно,

$$\varphi_i(x^k) \le \|\varphi_i'(x^k)\| \|x^{k'} - x^k\|.$$

Т.к. $\|x^{k'} - x^k\| \longrightarrow 0$ (из-за сходимости последовательности), $\|\varphi_i'(x^k)\| \longrightarrow \|\varphi_i'(\overline{x})\|$ ($\varphi_i \in C^1(R^n)$).

Получим

$$\varphi_i(x^k) \longrightarrow \varphi_i(\overline{x}) \le 0.$$

МЕТОД КЕЛЛИ

Следовательно, $\overline{\boldsymbol{x}}$ – допустимое решение задачи (в силу произвольного выбора $\boldsymbol{i}$). Но для любого $\boldsymbol{k}$ имеем $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}) \leq (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^*) \Longrightarrow (\boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{x}}) \leq (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^*)$. Т.е. $\overline{\boldsymbol{x}}$ – оптимальное решение задачи. $\blacksquare$