ЛЕКЦИЯ № 1

Лектор: Плясунов Александр Владимирович
http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/mo.html

1. **Введение**

2. **Понятие экстремальной (оптимизационной) задачи**

3. **Классификация задач**

4. **Теорема Фаркаша**

Введение

Методы оптимизации $\equiv$ Теория оптимизации $\equiv$ Теория экстремальных задач $\equiv$ Математическое программирование
Актуальность этой дисциплины связана с появлением ЭВМ.
Вы знакомы с теорией $\boldsymbol{NP}$**-полных задач**. Она возникла в связи с феноменом **переборных задач**. Эти задачи можно решить с помощью перебора всех возможных вариантов, число которых растет **экспоненциально** в зависимости от **размеров** задачи.

Для большинства таких задач неизвестно **эффективных** алгоритмов решения. Они вам известны под названием $\boldsymbol{NP}$**-полных и** $\boldsymbol{NP}$**-трудных задач**.

Визитной карточкой большей части интересных экстремальных задач, возникающих в чистой и прикладной математике, является их принадлежность этим классам.

Введение

Приложения:

– в исследовании операций: оптимизация технико-экономических систем, транспортные задачи, управление и т.д.

– в численном анализе: аппроксимация, решение линейных и нелинейных задач и т.п.

– в автоматике: оптимальное управление системами, управление призводством, роботы и т.д.

– в технике: управление размерами и оптимизация структур, оптимальное планирование сложных технических систем, например, информационных систем, сетей трубопроводов, компьютеров и т.п.

Введение

Приложения (в прикладной математике):

– теория игр: невозможна без понятия седловой точки, методов решения экстремальных задач;

– в численном анализе: распространение основных конечномерных алгоритмов на функциональные пространства дает инструмент для изучения уравнений в частных производных или задач оптимального управления;

– в комбинаторной оптимизации многие базовые алгоритмы: в задачах о потоках, на графах, на матроидах, целочисленного и булевого программирования и многих других, используют необходимые условия экстремума, понятия двойственности, дополнительности и т.д., полученные в математическом программировании.

Введение

Цели лекционного курса:

– Изучение ряда базовых алгоритмов, которые используются для решения **конечномерных задач оптимизации**.

– Получение (приобретение) теоретических и концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки этих алгоритмов и, если необходимо, создания новых.

Экстремальная (оптимизационная) задача (P)

Найти:

$$\min f(x) \tag{1}$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$x \in S \subseteq R^n \text{ или } Z^n \text{ или } B^n. \tag{3}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$– вектор переменных;

f – целевая функция задачи;

условия $\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}$, $x \in S$ – называются ограничениями задачи.

Допустимые решения:
любой вектор $\boldsymbol{x}$ удовлетворяющий ограничениям (2),(3), называется допустимым решением задачи $\boldsymbol{P}$.

$\boldsymbol{Q(P) = \{x \in R^n | \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, x \in S\}}$ — множество допустимых решений задачи $\boldsymbol{P}$.

Оптимальное решение (глобальный минимум):
любое допустимое решение задачи, на котором достигается минимум целевой функции $\boldsymbol{f}$ на множестве $\boldsymbol{Q(P)}$.

Замечание:

1. Ограничение–равенство $\boldsymbol{g(x) = 0}$ эквивалентно двум неравенствам $\boldsymbol{g(x) \leq 0, -g(x) \leq 0}$.
2. Задача максимизации функции $\boldsymbol{g}$ на множестве $\boldsymbol{Q}$ сводится к задаче минимизации функции $\boldsymbol{f = -g}$ на этом же множестве.

Классификация задач

В зависимости от природы множества $\boldsymbol{S}$ задачи оптимизации классифицируются как:

– **дискретные (комбинаторные)** — $\boldsymbol{S}$ конечно или счетно,

– **целочисленные** — $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{n}}$,

– **булевы** — $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{n}}$,

– **вещественные (непрерывные)** — $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$,

– **бесконечномерные** — $\boldsymbol{S}$ подмножество гильбертова пространства.

Классификация задач

Если множество $\boldsymbol{S}$ совпадает с основным пространством $\boldsymbol{R^n, Z^n, B^n}$, а ограничения φ_i отсутствуют $(m = 0)$, то задачу $\boldsymbol{P}$ называют **задачей безусловной оптимизации**. В противном случае говорят о **задаче условной оптимизации**.

Если принять во внимание свойства целевой функции $\boldsymbol{f}$ и ограничений φ_i, то возникает более тонкое деление конечномерных экстремальных задач на классы:

– **непрерывное математическое программирование** ($\boldsymbol{f}$, φ_i — непрерывные, произвольные, нелинейные, $\boldsymbol{S}$ — связное, компактное подмножество $\boldsymbol{R^n}$)

– **дискретное математическое программирование**($\boldsymbol{f}$, φ_i — нелинейные, $\boldsymbol{S}$ — дискретное множество)

Классификация задач

– **нелинейное целочисленное программирование**(f, φ_i — нелинейные, $S \subseteq Z^n$)

– **непрерывная нелинейная оптимизация без ограничений** (f — непрерывная, произвольная, нелинейная функция, $m = 0$, $S = R^n$)

– **целочисленная нелинейная оптимизация без ограничений** (f — произвольная, нелинейная функция, $m = 0$, $S = Z^n$)

– **выпуклое программирование** (f, φ_i — произвольные, выпуклые, S — выпуклое множество из R^n)

– **линейное программирование** (f, φ_i — произвольные, линейные, $S = \{x \in R^n | Ax \leq b\}$)

Классификация задач

– **целочисленное линейное программирование** ($\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{\varphi_i}$ — произвольные, линейные, $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Z}^n$)

Если, например, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{\varphi_i}$ — произвольные, нелинейные функции, а $\boldsymbol{S}$ — произвольное подмножество $\boldsymbol{R}^n$, то получим задачи нелинейного программирования и т.д.

Литература

1. Береснев В.Л. "Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных", Новосибирск, Издательство ИМ СО РАН, 2005
2. Глебов Н.И. и др. "Методы оптимизации", НГУ, 2000
3. Карманов В. Г. "Математическое программирование", М.: Наука, год любой
4. Ларин Р.М. и др. "МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ. Примеры и задачи", НГУ, 2003
5. Мину М. "Математическое программирование. Теория и алгоритмы", М.: Наука, 1990
6. Моисеев Н.Н. и др. "Методы оптимизации", М.: Наука, 1978
7. Муртаф Б. "Современное линейное программирование", М.: Мир, 1984
8. Васильев Ф.П. "Методы оптимизации", М.: Факториал Пресс, 2002
9. Васильев Ф.П. "Численные методы решения экстремальных задач", М.: Наука, 1980

Теорема Фаркаша–Минковского

$L \subseteq R^n$ – **линейное подпространство**, если $\forall x, y \in L$ $\forall \alpha, \beta \in R$ $\alpha x + \beta y \in L$.

Подпространство ортогональное к L:

$$L^{\perp} = \{y \in R^n | (y, x) = 0 \ \forall x \in L\}.$$

Пусть A – $(m \times n)$ матрица.

$$L(A) = \{z \in R^m | \exists x \in R^n \ Ax = z\},$$

$$L(A)^{\perp} = \{y \in R^m | (y, z) = 0 \ \forall z \in L(A)\} =$$
$$= \{y \in R^m | (y, Ax) = 0 \ \forall x \in R^n\} = \{y \in R^m | yA = 0\}.$$

Теорема Фаркаша–Минковского

Лемма 1. **Если система уравнений $yA = 0, (y, b) > 0$ несовместна, то совместна система уравнений $Ax = b$.**

Доказательство. Пусть система уравнений $Ax = b$ несовместна. Из определения операции $\perp$ имеем $L(A) = (L(A)^{\perp})^{\perp}$. Следовательно

$$L(A) = \{z \in R^m | (z, y) = 0 \ \forall y \in L(A)^{\perp}\} =$$

$$= \{z \in R^m | (z, y) = 0 \ \forall y : yA = 0\}.$$

Т.к. $b \notin L(A)$, то найдется y такой, что $yA = 0$ и $(b, y) \neq 0$. Следовательно либо y, либо $-y$ — решение системы уравнений $yA = 0, (y, b) > 0$. Противоречие с условиями леммы. Следовательно предположение неверно и система уравнений $Ax = b$ совместна.

Теорема Фаркаша–Минковского

Теорема 1 (теорема Фаркаша–Минковского). Система уравнений $Ax = b, x \geq 0$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(b, y) \leq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA \leq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\exists x\ Ax = b, x \geq 0$ и пусть y — произвольное решение системы $yA \leq 0$. Тогда

$$(b, y) = (Ax, y) = (x, yA) \leq (x, 0) = 0.$$

Докажем достаточность. Пусть неравенство $(b, y) \leq 0$ выполняется для всех решений системы неравенств $yA \leq 0$.

Индукцией по числу столбцов матрицы A покажем, что совместна система уравнений $Ax = b, x \geq 0$.

Теорема Фаркаша–Минковского

Для $\boldsymbol{n = 1}$ доказать утверждение самостоятельно.

Пусть $\boldsymbol{n > 1}$ и для матриц с числом столбцов строго меньшим $\boldsymbol{n}$ утверждение доказано.

Т.к.

$$\forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{yA} \leq \boldsymbol{0} \Longrightarrow (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) \leq \boldsymbol{0}),$$

то несовместна система уравнений

$$\boldsymbol{yA \leq 0, (y, b) > 0.}$$

И, следовательно, несовместна система уравнений

$$\boldsymbol{yA = 0, (y, b) > 0.}$$

Отсюда и леммы 1 получим, что совместна система уравнений

$$\boldsymbol{Ax = b.}$$

Теорема Фаркаша–Минковского

Покажем, что тогда

$$\exists x(Ax = b, x \geq 0).$$

Итак,

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b, \text{ где } A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^{\mathsf{T}}.$$

Пусть $x_j \geq 0$ для $j = \overline{1, k}$, и $x_j < 0$, $j = \overline{k+1, n}$.

Рассмотрим вектор

$$c = \sum_{j=1}^{k} A_j x_j + A_n x_n = b - \sum_{j=k+1}^{n-1} A_j x_j. \qquad (*)$$

Теорема Фаркаша–Минковского

Допустим, что найдется $\overline{\boldsymbol{y}}$:

$$(\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{A}_j) \leq \mathbf{0}, j = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n} - \mathbf{1}}, (\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{c}) > \mathbf{0}. \qquad (**)$$

Отсюда и определения $(*)$ вектора $\boldsymbol{c}$ получим

$$\sum_{j=1}^{k} (\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{A}_j)\boldsymbol{x}_j + (\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{x}_n = (\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{c}) > \mathbf{0}$$

Таким образом

$$(\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{x}_n > \sum_{j=1}^{k} -(\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{A}_j)\boldsymbol{x}_j \geq \mathbf{0}.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{x}_n < \mathbf{0}$, имеем

$$(\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{A}_n) \leq \mathbf{0}. \qquad (***)$$

Теорема Фаркаша–Минковского

С другой стороны из определения $(*)$ вектора $\boldsymbol{c}$ получим

$$(\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{b}) = (\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{c}) + \sum_{j=k+1}^{n-1} (\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{A}_j)\boldsymbol{x}_j > \mathbf{0}.$$

Отсюда и условий $(**), (***)$ следует, что вектор $\overline{\boldsymbol{y}}$ решение системы уравнений:

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \leq \mathbf{0}, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) > \mathbf{0}.$$

Противоречие (эта система несовместна по условию). Таким образом система $(**)$ не имеет решения. Но по условию система

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \leq \mathbf{0}$$

разрешима.

Теорема Фаркаша–Минковского

Следовательно $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}) \leq \mathbf{0}$ для всех решений системы

$$(\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{A}_j) \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{j} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}-\mathbf{1}}.$$

Тогда по предположению индукции найдется вектор $\boldsymbol{z} \geq \mathbf{0}$:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{c}.$$

Отсюда и определения $(*)$ вектора $\boldsymbol{c}$ получим

$$\sum_{j=1}^{n-1} \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{b} - \sum_{j=k+1}^{n-1} \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{x}_j,$$

что приводит к соотношению

$$\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{z}_j + \sum_{j=k+1}^{n-1} \boldsymbol{A}_j (\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{z}_j) + \boldsymbol{A}_j \cdot \mathbf{0} = \boldsymbol{b}.$$

Теорема Фаркаша–Минковского

Итак, число отрицательных компонент нового решения

$$\overline{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{z_1, \ldots, z_k, x_{k+1} + z_{k+1}, \ldots, x_{n-1} + z_{n-1}, 0})$$

системы равенств $\boldsymbol{Ax = b}$ строго меньше, чем у вектора $\boldsymbol{x}$.

Следовательно, через конечное число шагов получим неотрицательное решение системы равенств $\boldsymbol{Ax = b}$. ■

Комментарий

Теореме Фаркаша–Минковского можно придать другую форму:

Система уравнений $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \geq \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

Действительно, система уравнений $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ разрешима $\Longleftrightarrow$ разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax_1} - \boldsymbol{Ax_2} + \boldsymbol{Eu} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$. По теореме Ф.–М. последняя система уравнений разрешима $\Longleftrightarrow$ когда неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \leq \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA} \leq \mathbf{0}, -\boldsymbol{yA} \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{Ey} \leq \mathbf{0}$ $\Longleftrightarrow$ неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \geq \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$. ■

Следствие (теорема Гордана). Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} < 0$;

2. существует такой $\neq 0$ вектор $\boldsymbol{y}$, что $\boldsymbol{yA} = 0, \boldsymbol{y} \geq 0$.

Действительно, система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$ разрешима $\Longleftrightarrow$ разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} \leq (-\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \ldots, -\mathbf{1})^{\top}$. По теореме Ф.–М. разрешимость последней системы эквивалентна выполнению условия:

Комментарий

если вектор $\boldsymbol{y}$ решение системы $\boldsymbol{yA = 0, y \geq 0}$, то выполняется неравенство $\boldsymbol{-y \geq 0}$. Т.е. не существует ненулевого вектора $\boldsymbol{y}$ такого, что $\boldsymbol{yA = 0, y \geq 0}$.

Теперь пусть существует ненулевой вектор $\boldsymbol{y}$ такой, что $\boldsymbol{yA = 0, y \geq 0}$. Но тогда не выполняется неравенство $\boldsymbol{-y \geq 0} \Longrightarrow$ не выполнено условие теоремы Ф.–М. $\Longrightarrow$ система $\boldsymbol{Ax \leq (-1, -1, \ldots, -1)}^\top$ неразрешима $\Longrightarrow$ неразрешима система $\boldsymbol{Ax < 0}$.■