# ЛЕКЦИЯ № 10

1. Первый алгоритм Гомори

2. Конечность алгоритма

## 5.5 Описание первого алгоритма Гомори

0) Начать с нормальной симплекс-таблицы (для задачи (16)-(18)). Положить $\nu := 0.$

1) Если симплекс-таблица прямо допустима и все элементы $z_{i0},\ i = 1, \ldots, n,$ целые, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение задачи (16)-(18)).

2) Если симплекс-таблица прямо допустима, то выбрать минимальное $p \geq 1,$ такое, что $z_{p0}$ — нецелое,

положить $\boldsymbol{\nu := \nu + 1}$.

Строку с номером $\boldsymbol{p}$ назовем *производящей*. Этой строке соответствует уравнение

$$\boldsymbol{x_p = z_{p0} - \sum_{j=1}^{l} z_{pj} x_{\tau(j)}},$$

по которому строится дополнительное ограничение согласно описанному ранее способу при $\boldsymbol{h = 1}$ (роль $\boldsymbol{\xi}$ играет $\boldsymbol{x_p}$):

**Первый алгоритм Гомори**

$$x_{n+\nu} = -f_{p0} - \sum_{j=1}^{l} (-f_{pj}) x_{\tau(j)} \geq 0,$$

где $f_{pj}$ — дробная часть числа $z_{pj}$ $(z_{pj} = \lfloor z_{pj} \rfloor + f_{pj},\ 0 \leq f_{pj} < 1)$.

К симплекс-таблице добавляется $(n+1)$ строка (отсечение Гомори), соответствующая дополнительному ограничению ( с базисной переменной $x_{n+\nu}$).

**Первый алгоритм Гомори**

3) Выбрать ведущую строку $\boldsymbol{r:\ z_{r0} < 0,\ r \geq 1.}$

4) Если $\boldsymbol{\{j \mid z_{pj} < 0,\ j \geq 1\} \neq \emptyset,}$ то выбрать ведущий столбец $\boldsymbol{s:}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{|z_{rs}|}\beta_s = lexmin\{\frac{1}{|z_{rj}|}\beta_j \mid z_{rj} < 0,\ j \geq 1\},}$$

иначе КОНЕЦ (текущая задача ЛП, а следовательно, и исходная задача ЦЛП, неразрешима ввиду несовместности ее ограничений).

**Первый алгоритм Гомори**

5) Преобразовать симплекс-таблицу;
положить $\boldsymbol{\tau(s) := n + \nu}$ и отбросить $\boldsymbol{(n+1)}$-ю строку, если таковая имелась, иначе $\boldsymbol{\tau(s) := r}$;
перейти на шаг 1.

**Первый алгоритм Гомори**

Пусть $x^0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})^T$ – б.д. р.(задачи (16)–(18)), соответствующее текущей с.-т. в момент введения отсечения Гомори, (является оптимальным решением ЛП-релаксации).

Т.к. $z_{p0}$ — нецелое, то $f_{p0} > 0$, следовательно,

$$x_{n+\nu}(x^0) = -f_{p0} < 0.$$

Итак $x^0$ отсекается.

**Первый алгоритм Гомори**

Пусть

$$\boldsymbol{x_{n+\nu} = -f_{p0} - \sum_{j=1}^{l} (-f_{pj}) x_{\tau(j)} \geq 0,}$$

отсечение Гомори (шаг 2). Т.к. $\boldsymbol{-f_{p0} < 0}$, то $\boldsymbol{x_{n+\nu}}$ – единственная отрицательная базисная переменная. Следовательно, с.-т. двойственно допустима, но не прямо допустима.

**Первый алгоритм Гомори**

Итак, в качестве ведущей будет выбрана $n+1$ строка (единственность).

При элементарном преобразовании с.-т. переменная $x_{n+\nu}$ станет небазисной.

Ведущая строка превращается в тождество

$$x_{n+\nu} = (-1)(-x_{n+\nu})$$

и на шаге 5 удаляется из с.-т.

Поэтому максимальное число учитываемых отсечений не превосходит числа небазисных переменных.

**Конечность первого алгоритма Гомори**

1) Пусть известна некоторая (условная) нижняя граница $\boldsymbol{M}$ для оптимального значения целевой функции $\boldsymbol{x_0}$.

2) Пусть функция $\boldsymbol{x_0}$ целочисленна на множестве допустимых решений задачи ЦЛП. (Тогда нулевая строка с.-т. может (и будет) использоваться в качестве производящей.)

## Конечность первого алгоритма Гомори

Итерация алгоритма (шаги с 1 по 5) $=$ LD-итерация (не вводится отсечение) $+$ итерация Гомори ( вводится отсечение).

Элементы и столбцы симплекс-таблицы, полученной после выполнения первых $\boldsymbol{t}$ итераций, обозначим $\boldsymbol{z_{ij}^{t}}$ и $\boldsymbol{\beta_{j}^{t}}$ соответственно ($\boldsymbol{z_{ij}^{0}}$ – элементы начальной симплекс-таблицы).

Пусть при решении задачи алгоритмом Гомори выполняется бесконечная последовательность итераций.

## Конечность первого алгоритма Гомори

Из описания LD-метода имеем

$$\beta_0^0 \succ \beta_0^1 \succ \beta_0^2 \succ \cdots \succ \beta_0^t \succ \beta_0^{t+1} \succ \dots . \tag{30}$$

Из конечности LD-метода имеем, что число LD-итераций конечно, а число итераций Гомори бесконечно. Пусть $t_\nu + 1,\ \nu = 1, 2, \dots,$ — порядковые номера этих итераций. Из (30) имеем

$$z_{00}^0 \geq z_{00}^1 \geq z_{00}^2 \geq \cdots \geq z_{00}^t \geq z_{00}^{t+1} \geq \dots . \tag{31}$$

## Конечность первого алгоритма Гомори

Рассмотрим подпоследовательность

$$z_{00}^{t_1},\ z_{00}^{t_2},\ \ldots,\ z_{00}^{t_\nu},\ \ldots\ , \qquad (32)$$

состоящую из элементов $z_{00}$ с.-т., которые являются входными для итераций Гомори.

Пусть $z_{00}^{t_\nu}$ – нецелое. Тогда на итерации $t_\nu + 1$ нулевая строка будет производящей и

$$z_{00}^{t_\nu+1} = z_{00}^{t_\nu} - z_{0s}^{t_\nu}\frac{f_{00}^{t_\nu}}{f_{0s}^{t_\nu}}.$$

**Конечность первого алгоритма Гомори**

Т.к. $z_{0s}^{t_\nu} \geq 0$ (с.-т. двойственно допустима) и $z_{0s}^{t_\nu} \geq f_{0s}^{t_\nu}$, то

$$z_{00}^{t_\nu+1} \leq z_{00}^{t_\nu} - f_{00}^{t_\nu} = \lfloor z_{00}^{t_\nu} \rfloor < z_{00}^{t_\nu}.$$

Таким образом, каждый интервал $(z, z+1)$, где $z$ – целое, содержит не более одного члена из последовательности (32).

## Конечность первого алгоритма Гомори

Отсюда, монотонности и ограниченности снизу этой последовательности следует, что она стабилизируется на некотором целом значении. Тогда

$$\exists\, T_0\ \forall t \geq T_0\ z_{00}^{t} = \bar{z}_{00}.$$

Тогда в силу (30)(строгого лексикографического убывания нулевого столбца)

$$z_{10}^{T_0} \geq z_{10}^{T_0+1} \geq \cdots \geq z_{10}^{t} \geq z_{10}^{t+1} \geq \ldots\ . \tag{33}$$

**Конечность первого алгоритма Гомори**

Рассмотрим подпоследовательность состоящую из элементов $z_{10}$ с.-т., которые являются входными для итераций Гомори с номерами $t_\nu + 1$ строго большими $T_0$.

Пусть $z_{10}^{t_\nu}$ – нецелое. Тогда на итерации $t_\nu + 1$ первая строка будет производящей и

$$z_{10}^{t_\nu+1} = z_{10}^{t_\nu} - z_{1s}^{t_\nu} \frac{f_{10}^{t_\nu}}{f_{1s}^{t_\nu}}, \qquad (34)$$

где $0 < f_{10}^{t_\nu} < 1$ и $0 < f_{1s}^{t_\nu} < 1$.

**Конечность первого алгоритма Гомори**

Покажем, что $\boldsymbol{z_{1s}^{t_\nu} \geq 0}$. Допустим противное: $\boldsymbol{z_{1s}^{t_\nu} < 0}$. Тогда из лексикографической положительности столбца $\boldsymbol{\beta_s^{t_\nu}}$ следует неравенство $\boldsymbol{z_{0s}^{t_\nu} > 0}$. Но из формулы

$$\boldsymbol{z_{00}^{t_\nu+1} = z_{00}^{t_\nu} - z_{0s}^{t_\nu}\frac{f_{10}^{t_\nu}}{f_{1s}^{t_\nu}}}$$

и условий $\boldsymbol{0 < f_{10}^{t_\nu} < 1}$, $\boldsymbol{0 < f_{1s}^{t_\nu} < 1}$ следует, что $\boldsymbol{z_{00}^{t_\nu+1} < z_{00}^{t_\nu}}$. Противоречие.

## Конечность первого алгоритма Гомори

Таким образом из (34), учитывая неравенства $z_{1s}^{t_\nu} \geq 0$ и $z_{1s}^{t_\nu}/f_{1s}^{t_\nu} \geq 1$, следует

$$z_{10}^{t_\nu+1} \leq z_{10}^{t_\nu} - f_{10}^{t_\nu} = \lfloor z_{10}^{t_\nu} \rfloor < z_{10}^{t_\nu}.$$

Это означает, что каждый интервал $(z, z+1)$, где $z$ – целое, содержит не более одного члена из последовательности (33).

**Конечность первого алгоритма Гомори**

Т.к. с.-т. с номерами $\boldsymbol{t_\nu}$ прямо допустимы, то $\boldsymbol{z_{10}^{t_\nu} \geq 0}$. Итак последовательность (33) монотонно убывающая и ограниченна снизу, т.е. она стабилизируется на некотором целом неотрицательном значении (прямо допустимость). Тогда

$$\exists\, \boldsymbol{T_1 \geq T_0}\ \forall \boldsymbol{t \geq T_1}\ \boldsymbol{z_{10}^{t} = \overline{z}_{10}}.$$

## Конечность первого алгоритма Гомори

Аналогичные утверждения можно провести и для оставшихся компонент вплоть до $\boldsymbol{n}$-ой.

Следовательно, существует такой номер $\boldsymbol{T_n}$, что для всех $\boldsymbol{t \geq T_n}$ и для всех $\boldsymbol{i = \overline{1, n}}$

$$\boldsymbol{z_{i0}^t = \overline{z}_{i0},} \text{ где } \boldsymbol{\overline{z}_{i0} \in Z^+.}$$

Подобное утверждение противоречит предположению о бесконечности числа итераций. Тем самым доказана конечность первого алгоритма Гомори.