ЛЕКЦИЯ № 5

Теоремы двойственности линейного программирования. Симплекс-метод.

1. Первая теорема двойственности

2. Вторая теорема двойственности

3. Симплекс-таблица (с.-т.)

Первая теорема двойственности

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме.

Теорема 15 (Первая теорема двойственности). Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.

Первая теорема двойственности

Доказательство. Пусть $\overline{\boldsymbol{x}}$ оптимальное решение задачи (16)-(18). Из следствия 3 (Лекция № 4) $\Longrightarrow$ найдется оптимальное решение $\overline{\boldsymbol{y}}$ задачи (19)-(20):

$$\boldsymbol{w(\overline{x}) = h(\overline{y}).}$$

Т.е. задача (19)-(20) разрешима и значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают.

Первая теорема двойственности

Пусть теперь разрешима задача (19)-(20) и $\overline{\boldsymbol{y}}$ ее некоторое оптимальное решение. Запишем ее в каноническом виде. Тогда в силу доказанного выше ее двойственная задача разрешима. Но по теореме 12 эта двойственная и есть задача (16)-(18). Следовательно она разрешима и существует ее оптимальное решение $\overline{\boldsymbol{x}}$: $\boldsymbol{w(\overline{x}) = h(\overline{y})}$.

Первая теорема двойственности

Замечание 5. Т.к. совместность часть разрешимости, то из разрешимости задач прямой и двойственной следует совместность их ограничений.

Покажем, что верно обратное утверждение. Пусть совместны ограничения прямой и двойственной задач и $\overline{\boldsymbol{y}}$ некоторое допустимое решение задачи (19)-(20). Тогда по лемме 5 (Лекция № 3)

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{h}(\overline{\boldsymbol{y}}).$$

Первая теорема двойственности

Из теоремы 14 тогда следует, что разрешима прямая задача (16)-(18). По доказанному ранее разрешима и двойственная задача. $\Longrightarrow$

Разрешимость задач (16)-(18) и (19)-(20) эквивалентна совместности их ограничений $\Longrightarrow$

если данные задачи неразрешимы, то хотя бы одна из них неразрешима из-за несовместности их ограничений. ■

Вторая теорема двойственности

Теорема 16 (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). Допустимые решения $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$y_i(a_i x - b_i) = 0 \ (i \in I),$$

$$(c_j - yA_j)x_j = 0 \ (j \in J).$$

Доказательство. Смотрите учебное пособие "Методы оптимизации"Н. И. Глебов и др.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Пусть $\overline{\boldsymbol{x}}$ — б.д.р. $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(m)})$ — соответствующая базисная матрица. Тогда

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{17'}$$

следовательно

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N, \text{ и}$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_N, \tag{16'}$$

где $\boldsymbol{x}_B = (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(m)})$ — базисные, а $\boldsymbol{x}_N = (\boldsymbol{x}_j)_{j \in S'}$ — небазисные переменные

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$-\boldsymbol{w} + \sum_{j \in S'} \boldsymbol{z_{0j} x_j} = \boldsymbol{z_{00}}, \tag{16''}$$

$$\boldsymbol{x_{\sigma(i)}} + \sum_{j \in S'} \boldsymbol{z_{ij} x_j} = \boldsymbol{z_{i0}}, \ \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1, m}}, \tag{17''}$$

где

$$\boldsymbol{z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\overline{x})},$$

$$\boldsymbol{z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \ j = 1, \ldots, n},$$

$$\boldsymbol{(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b},$$

$$\boldsymbol{(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \ \ j = 1, \ldots, n.}$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|}
 & & x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\
\hline
-w & z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0j} & \cdots & z_{0n} \\
\hline
x_{\sigma(1)} & z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1j} & \cdots & z_{1n} \\
. & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{\sigma(i)} & z_{i0} & z_{i1} & \cdots & z_{ij} & \cdots & z_{in} \\
. & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{\sigma(m)} & z_{m0} & z_{m1} & \cdots & z_{mj} & \cdots & z_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

z_{0j} – оценки замещения,

z_{ij} – коэффициенты замещения,

z_{i0} – значения базисных компонент текущего б.д.р.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Определение 7. Симплекс–таблица называется прямо допустимой, если $z_{i0} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m.$

Базис B, которому эта таблица соответствует, также называется прямо допустимым.

Определение 8. Симплекс–таблица называется двойственно допустимой, если $z_{0j} \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$

Базис B, которому эта таблица соответствует, называется двойственно допустимым.

Симплекс-таблица (с.-т.)

В зависимости от знаков величин

$$z_{ij}, z_{0j}, j \in S', i = 1, \ldots, m$$

выполняется хотя бы одно из условий

$$1. z_{0j} \geq 0 \forall j \in S'$$

$$2. \exists s \in S' : z_{0s} < 0 \text{ и } z_{is} \leq 0, \forall i = 1, \ldots, m,$$

$$3. \exists s \in S' : z_{0s} < 0 \text{ и } \exists r, 1 \leq r \leq m, z_{rs} > 0.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

Лемма 8 (признак оптимальности). Если симплекс–таблица прямо и двойственно допустима, то текущее базисное допустимое решение $\overline{x}$ является оптимальным решением задачи (16)–(18).

Пусть x – произвольное допустимое решение. Так как $z_{0j} \geq 0$ и $x_j \geq 0$, $j \in S'$, то из $(16'')$ следует, что

$$w(x) = -z_{00} + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j \geq -z_{00} = w(\overline{x}) \blacksquare$$