ЛЕКЦИЯ № 7

1. **Метод искусственного базиса**

2. **Анализ чувствительности**

Метод искусственного базиса

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\overline{x} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\xi = x_{n+1} + \dots + x_{n+m} \longrightarrow \min$$

$$Ax + E\overline{x} = b \ (a_i x + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m})$$

$$x, \overline{x} \geq 0$$

Переменные $\overline{x} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ называются искусственными

Считаем, что правые части $b_i, i = \overline{1, m}$ неотрицательны $\Longrightarrow$ и условия $det(E) = 1 \neq 0$ имеем, что вектор $z^0 = (0, b) \in R^{n+m}$ (с компонентами $x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, $x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m}$) – б.д.р. вспомогательной задачи с базисом $B = E$.

Метод искусственного базиса

Из Критерия разрешимости имеем:

вспомогательная задача разрешима и $\min \boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0}$.

Применим с.-м. к задаче, взяв на 0-шаге с.-т., соответствующую б.д.р. $\boldsymbol{z}^{\mathbf{0}} = (\mathbf{0}, \boldsymbol{b})$.

Возможны следующие случаи:

А. $\min \boldsymbol{\xi} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow$ задача (16)-(18) не имеет допустимых решений (очевидно)

Далее рассматриваем случай

В. $\min \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x}^*_{n+i} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{m}}$, $\Longrightarrow$ вектор $\boldsymbol{x}^*$ – доп. реш. задачи (16)-(18) $\Longrightarrow \boldsymbol{x}^*$ – б.д.р. задачи (16)-(18).

Как найти его базис?

Как из оптимальной с.-т. вспомогательной задачи получить начальную прямо допустимую с.-т. для задачи (16)-(18)?

Метод искусственного базиса

Пусть вектор $z^* = (x^*, \overline{x}^*)$ – оптимальное решение вспомогательной задачи, (помним, что $\overline{x}^* = 0$)

$\{A_j | j \in I \setminus I'\} \cup \{E_i | i \in I'\}$ – его базис,

$B = [A_{j \in I \setminus I'}, E_{i \in I'}]$ – базисная матрица ($I \setminus I' \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $I' \subseteq \{1, \ldots, m\}$) $\Longrightarrow |I \setminus I'| + |I'| = m$ (т.к. ранг системы ограничений $Ax + E\overline{x} = b$ равен m)

Пусть Z_k, $k = \overline{1, n}$, столбец коэффициентов замещения оптимальной с.-т. Из определения их $\Rightarrow$

$$Z_k = B^{-1} A_k = [A_{j \in I \setminus I'}, E_{i \in I'}]^{-1} A_k \Longleftrightarrow$$

$$A_k = [A_{j \in I \setminus I'}, E_{i \in I'}] Z_k \Longleftrightarrow$$

$$A_k = \sum_{j \in I \setminus I'} z_{jk} A_j + \sum_{i \in I'} \mu_{ik} E_i$$

Комментарий

В с.-т. i-ая строка $(i \geq 1)$ соответствует i-му ограничению задачи (16) – (18). Номер же базисной переменной в i-ой строке обозначается как $\sigma(i)$. Здесь принято соглашение, что исходные x_j переменные перенумерованы так, чтобы $\sigma(i) = i$ для $i \in I \setminus I'$. Такая перенумерация возможна так как ограничения разбиваются ровно на две части. Ограничения с номерами i из множества $I' \subseteq I$, содержащие вспомогательные переменные x_{n+i}, в качестве базисных. И ограничения с номерами i из множества $I \setminus I'$, содержащие исходные переменные $x_{\sigma(i)}$ в качестве базисных. Вспомогательные переменные вводились так, чтобы в i-ом ограничении была переменная x_{n+i}.

Метод искусственного базиса

Возможны следующие случаи:

В1. $I^{'} = \emptyset$.

В2. $I^{'} \neq \emptyset$ и $\exists r \in I^{'}$, $\exists s \notin I \setminus I^{'}$ $\mu_{rs} \neq 0$.

В3. $I^{'} \neq \emptyset$ и $\forall r \in I^{'}$, $\forall s = \overline{1, n}$ $\mu_{rs} = 0$.

Рассмотрим первый случай.

В1. $I^{'} = \emptyset \Longrightarrow |I \setminus I^{'}| = m \Longrightarrow \{A_j | j \in I\}$ – базис б.д.р. $x^* \Longrightarrow$ столбцы Z_k, $k = \overline{1, n}$, – коэффициенты замещения именно в этом базисе. Вычеркнуть из оптимальной с.-т. столбцы соответствующие переменным $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$.

Пересчитать 0-строку:

$$z_{00} = -(c, x^*), z_{0k} = 0, k \in I, z_{0k} = c_k - \sum_{j \in I} c_j z_{jk}, k \notin I.$$

Метод искусственного базиса

B2. $\boldsymbol{I'} \neq \emptyset$ и $\exists \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I'}$, $\exists \boldsymbol{s} \notin \boldsymbol{I} \setminus \boldsymbol{I'}$ $\boldsymbol{\mu_{rs}} \neq \boldsymbol{0} \Longrightarrow$

множество векторов $\{\boldsymbol{A_j} | \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J''}\} \cup \{\boldsymbol{E_i} | \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I''}\}$,

где

$$\boldsymbol{J''} = \boldsymbol{I} \setminus \boldsymbol{I'} \cup \{\boldsymbol{s}\}, \boldsymbol{I''} = \boldsymbol{I'} \setminus \{\boldsymbol{r}\}$$

– базис вершины $\boldsymbol{z^*} = (\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{0})$ (легко доказывается от противного)

$\Longrightarrow$ делаем элементарное преобразование с.-т. с ведущим элементом $\boldsymbol{\mu_{rs}} \neq \boldsymbol{0} \Longrightarrow$ получим с.-т. соответствующую новому базису. Новая с.-т. остаётся оптимальной (в нулевом столбце все величины не изменяют своих значений включая $\boldsymbol{z_{00}}$)

$$\boldsymbol{x^*_{n+r}} = \boldsymbol{z_{r0}} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z'_{i0}} = \boldsymbol{z_{i0}} - \frac{\boldsymbol{z_{is} z_{r0}}}{\boldsymbol{z_{rs}}} = \boldsymbol{z_{i0}}$$

$\Longrightarrow$ элементы 0-столбца не меняются и остаются неотрицательными, но в этом базисе стало больше исходных переменных и меньше искусственных (на 1).

Метод искусственного базиса

Для нового базиса проверяем условия $\boldsymbol{B1}$, $\boldsymbol{B2}$, $\boldsymbol{B3}$. Если выполняется $\boldsymbol{B2}$, то повторяем описанные действия. Т.к. множество $\boldsymbol{I'}$ конечно, то рано или поздно либо произойдёт случай $\boldsymbol{B1}$, либо $\boldsymbol{B3}$.

В3. $\boldsymbol{I' \neq \emptyset}$ и $\forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I'}$, $\forall \boldsymbol{s} = \overline{\boldsymbol{1, n}}$ коэффициенты замещения (соответствующие исходным переменным, которые в текущий базис не вошли) $\boldsymbol{\mu_{rs}}$ в ограничениях, содержащих базисные искусственные переменные равны нулю. Это означает, что переменные $\boldsymbol{x_{n+i}, i \in I'}$, нельзя вывести из базиса, заменив их на подходящие исходные пер-ые.

Покажем, что исходные ограничения $\boldsymbol{a_i x = b_i}$ системы (17) с номерами из множества $\boldsymbol{i \in I'}$ являются избыточными.

Действительно, $\boldsymbol{x}$ – допустимое решение (16)-(18) $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{(x, 0)}$ – решение системы уравнений:

$$\boldsymbol{x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} = 0,}$$

Метод искусственного базиса

$$x_k + \sum_{j \in J \setminus (I \setminus I')} z_{kj} x_j + \sum_{i \in I \setminus I'} z_{kn+i} x_{n+i} = z_{k0}, k \in I \setminus I^{'},$$

$$x_{n+i} + \sum_{j \in J \setminus (I \setminus I')} \mu_{ij} x_j + \sum_{l \in I \setminus I'} z_{kn+l} x_{n+l} = 0,\ i \in I^{'},$$

$$x, \overline{x} \geq 0,$$

или учитывая первое равенство, неотрицательность переменных и условие В3 x – допустимое решение (16)-(18) $\Longleftrightarrow$

$$x_i + \sum_{j \in J \setminus (I \setminus I')} z_{ij} x_j = z_{i0}, i \in I \setminus I^{'},$$

$$x \geq 0,$$

Метод искусственного базиса

которая эквивалентна системе уравнений

$$\boldsymbol{a_i x = b_i, i \in I \setminus I'}$$
$$\boldsymbol{x \geq 0,}$$

где матрица, образованная вектор-строками $\boldsymbol{a_i, i \in I \setminus I'}$ имеет ранг $\boldsymbol{m - |I'|}$.

Это ещё можно сформулировать так. Уравнения с номерами $\boldsymbol{i \in I'}$ (в последней с.-т.) содержат исходные переменные с 0 коэффициентами и они приобрели такой вид при элементарных преобразованиях предшествующих с.-т. с ненулевыми ведущими элементами. При этом эти уравнения преобразовывались с помощью уравнений с номерами не принадлежащих множеству $\boldsymbol{I'}$ последней с.-т. Это означает, что уравнения из множества $\boldsymbol{I'}$ последней с.-т. являются нетривиальными линейными комбинациями уравнений из множества $\boldsymbol{I \setminus I'}$ и их можно исключить.

Анализ чувствительности

Анализ чувствительности $\equiv$ постоптимальный анализ:

исследование как влияет на оптимальное решение задачи (16)-(18) возмущение входных данных задачи.

Необходимость таких исследований вытекает из невозможности всегда иметь достоверную информацию о входных данных.

Лемма 11. Пусть $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальное б.д.р. задачи (16)-(18) и $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{T}$ — соответствующие ему базис и с.-т. Тогда вектор $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c_B B^{-1}}$ — оптимальное решение двойственной задачи.

По условию с.-т. $\boldsymbol{T}$ прямо и двойственно оптимальна $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \boldsymbol{i}\ \forall\, \boldsymbol{j} : \boldsymbol{z_{i0} \geq 0, z_{0j} \geq 0} \Longleftrightarrow$$

$$\boldsymbol{z_{i0} = B^{-1}b \geq 0} \text{ и } \boldsymbol{z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j \geq 0}$$

Анализ чувствительности

Из второго неравенства следует, что вектор

$$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1}$$

удовлетворяет неравенству

$$\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{N} \geq \boldsymbol{0}.$$

Но по определению $\boldsymbol{y}^*$ $\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}_B$, следовательно,

$$\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{0} \Longrightarrow$$

$\boldsymbol{y}^*$ — допустимое решение двойственной задачи

Анализ чувствительности

Утверждение леммы следует из равенств (лемма 6, лекция № 4):

$$\boldsymbol{w(x^*) = c_B x_B^* = c_B B^{-1} b = y^* b = z(y^*).}\blacksquare$$

Из леммы 11 получим следующее представление оценок замещения

$$\boldsymbol{z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j = c_j - y^* A_j, \forall\ j} \qquad \textbf{(22)}$$

Далее предполагается, что имеется с.-т., отвечающая оптимальному решению задачи.

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов целевой функции

Каковы диапазоны изменения величин c_j, в которых оптимальное решение остается оптимальным (не меняется базис)?

Пусть j — небазисная переменная и $\bar{c}_j = c_j + \delta$, где δ — возмущение.

Тогда

$$\bar{z}_{0j} = \bar{c}_j - y^* A_j = c_j + \delta - y^* A_j =$$

$= z_{0j} + \delta$. Следовательно, решение x^* остается оптимальным б.д.р. $\Longleftrightarrow$

$$\bar{z}_{0j} \geq 0 \Longleftrightarrow z_{0j} + \delta \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$z_{0j} \geq -\delta > -\infty.$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов целевой функции – диапазон устойчивости для базисной переменной

Пусть $\sigma(i)$ — базисная переменная и $\bar{c}_{\sigma(i)} = c_{\sigma(i)} + \delta$, где δ — возмущение. И пусть $\sigma(i) = i$.

Тогда можем записать, что $\bar{c}_B = c_B + \delta e_i$. Следовательно, новая оценка небазисной переменной с номером j вычисляется по формулам:

$$\bar{z}_{0j} = c_j - (c_B + \delta e_i)B^{-1}A_j =$$

$$= c_j - c_B B^{-1} A_j - \delta z_{ij} = z_{0j} - \delta z_{ij}.$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов целевой функции – диапазон устойчивости для базисной переменной

Решение остается оптимальным $\Longleftrightarrow$

$$\bar{z}_{0j} = z_{0j} - \delta z_{ij} \geq 0 \text{ для всех небазисных } j.$$

Следовательно, диапазон устойчивости для базисной переменной задается неравенствами:

$$\max_{j: z_{ij} > 0} \frac{z_{0j}}{z_{ij}} \leq \delta \leq \min_{j: z_{ij} < 0} \frac{z_{0j}}{z_{ij}}$$