ЛЕКЦИЯ № 8

1. Анализ чувствительности

1.1. Возмущение целевой функции

1.2. Возмущение правых частей

1.3. Возмущение матрицы ограничений

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов целевой функции – диапазон устойчивости для базисной переменной

Пусть $\boldsymbol{\sigma(i)}$ – базисная переменная и $\overline{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{\sigma(i)}} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\sigma(i)}} + \boldsymbol{\delta}$, где $\boldsymbol{\delta}$ – возмущение. И пусть $\boldsymbol{\sigma(i) = i}$.

Тогда можем записать, что $\overline{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{\delta e_i}$ и диапазон устойчивости для базисной переменной задается неравенствами:

$$\max_{j:z_{ij}>0} \frac{z_{0j}}{z_{ij}} \le \delta \le \min_{j:z_{ij}<0} \frac{z_{0j}}{z_{ij}}.$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов целевой функции – диапазон устойчивости для базисной переменной

Итак, при изменении $\boldsymbol{\delta}$ в указанных пределах базис остается оптимальным, но значение целевой функции меняется в соответствии с формулой

$$\boldsymbol{z(\delta) = (c_B + \delta e_i) x_B^* = c_B x_B^* + \delta e_i x_B^* =}$$

$$\boldsymbol{z^* + \delta x_i^*.}$$

Анализ чувствительности: возмущение правых частей

Пусть $\boldsymbol{b(\delta) = b + \delta e_r}$. Текущий базис сохранит оптимальность, если он останется прямо допустимым при изменении $\boldsymbol{\delta}$. Т.е. решение системы

$$\boldsymbol{Bx(\delta)_B = b(\delta)}$$

должно удовлетворять неравенствам $\boldsymbol{x_B(\delta) \geq 0}$. Имеем

$$\boldsymbol{x_B(\delta) = B^{-1}(b + \delta e_r) = B^{-1}b + \delta B^{-1}e_r =}$$

Анализ чувствительности: возмущение правых частей

$$x_B^* + \delta B^{-1} e_r \geq 0 \Longrightarrow \forall\, i\ x_i^* + \delta \beta_{ir} \geq 0,$$

где $B^{-1}\, e_r = (\beta_{1r}, \ldots, \beta_{mr})^\top \Longrightarrow$
диапазон устойчивости задается неравенствами:

$$\max_{i:\beta_{ir}>0} \frac{x_i^*}{-\beta_{ir}} \leq \delta \leq \min_{i:\beta_{ir}<0} \frac{x_i^*}{-\beta_{ir}}.$$

Значение целевой функции меняется в соответствии с формулой

$$z(\delta) = b(\delta) y^* = (b + \delta e_r) y^* =$$

$$z^* + \delta y_r^*.$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

Т.к. в оптимальном решении значения небазисных компонент нулевые, то изменение коэффициентов $\boldsymbol{a_{ij}}$ небазисных столбцов не влияет на допустимость решения $\boldsymbol{x}^*$, но оно может стать неоптимальным.

Пусть $\boldsymbol{j}$ — номер небазисной переменной и $\boldsymbol{a_{kj}(\delta) = a_{kj} + \delta}$ Для того, чтобы решение $\boldsymbol{x}^*$ осталось оптимальным необходимо, чтобы осталась неотрицательной оценка замещения $\boldsymbol{z_{0j}(\delta)}$.

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

Т.е., учитывая лемму 11

$$z_{0j}(\delta) = c_j - y^*(A_j + \delta e_k) =$$

$$c_j - y^* A_j - y^* \delta e_k = z_{0j} - y_k^* \delta \geq 0.$$

Итак

$$z_{0j} - y_k^* \delta \geq 0 \Leftrightarrow \delta \leq z_{0j}/y_k^*$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

Пусть $\boldsymbol{r}$ — номер базисной переменной и $\boldsymbol{a_{kr}(\delta) = a_{kr} + \delta_{kr}}$, $\boldsymbol{B(\delta_{kr})}$ — возмущенная базисная матрица:

$$\boldsymbol{B(\delta_{kr}) = B + \delta_{kr} e_k e_r^\intercal = B(I + \delta_{kr} B^{-1} e_k e_r^\intercal).}$$

Обратная матрица имеет следующий вид

$$\boldsymbol{B(\delta_{kr})^{-1} = \Big(I - \frac{\delta_{kr}}{1 + \delta_{kr}\beta_{rk}} B^{-1} e_k e_r^\intercal\Big) B^{-1}.}$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

Положим

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\delta}_{kr}) = \frac{1}{1/\boldsymbol{\delta}_{kr} + \boldsymbol{\beta}_{rk}}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\delta}_{kr})^{-1} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\delta}_{kr})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_r^{\top}\right)\boldsymbol{B}^{-1}. \tag{23}$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

1. **Прямо допустимость.** Решение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\delta_{kr}})$ системы уравнений $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\delta_{kr}})\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{b}$ прямо допустимо, если $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\delta_{kr}}) \geq \mathbf{0}$, т.е.

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\delta_{kr}}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\delta_{kr}})^{-1}\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}.$$

Подставим в это соотношение (23):

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\delta_{kr}}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\delta_{kr}})^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} -$$

$$-\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\delta_{kr}})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_r^{\intercal}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_B^* -$$

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\delta_{kr}})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_r^{\intercal}\boldsymbol{x}_B^* =$$

$$= \boldsymbol{x}_B^* - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\delta_{kr}})\boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{x}_r^* \geq \mathbf{0} \equiv$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

$$x_i^* - \beta(\delta_{kr})\beta_{ik}x_r^* \geq 0,\ \forall\, i = \overline{1, m}.$$

Имеем следующий диапазон на значения величины $\beta(\delta_{kr})$

$$\max_{\{i: x_r^*\beta_{ik} < 0\}} \frac{x_i^*}{x_r^*\beta_{ik}} \leq \beta(\delta_{kr}) \leq$$

$$\min_{\{i: x_r^*\beta_{ik} > 0\}} \frac{x_i^*}{x_r^*\beta_{ik}}.$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

2. **Двойственная допустимость.** Рассмотрим решение $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\delta}_{kr})$ системы уравнений $\boldsymbol{y}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\delta}_{kr}) = \boldsymbol{c}_B$. Базис сохраняет двойственную допустимость, если возмущение $\boldsymbol{\delta}_{kr}$ таково, что для всех небазисных $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{z}_{0j} = \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\delta}_{kr})\boldsymbol{A}_j \geq \mathbf{0}. \tag{24}$$

Но

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\delta}_{kr}) = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\delta}_{kr})^{-1} =$$
$$= \boldsymbol{c}_B\Big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\delta}_{kr})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_r^{\mathsf{T}}\Big)\boldsymbol{B}^{-1} =$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} - \beta(\boldsymbol{\delta}_{kr}) \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_r^\intercal \boldsymbol{B}^{-1} = \\
&= \boldsymbol{y}^* - \beta(\boldsymbol{\delta}_{kr}) \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_r^\intercal \boldsymbol{B}^{-1} \\
&= \boldsymbol{y}^* - \beta(\boldsymbol{\delta}_{kr}) \boldsymbol{y}_k^* \boldsymbol{e}_r^\intercal \boldsymbol{B}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Подставим в (24) вместо $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\delta}_{kr})$ полученное выражение:

$$
\boldsymbol{z}_{0N}(\boldsymbol{\delta}_{kr}) = \boldsymbol{c}_N - (\boldsymbol{y}^* - \beta(\boldsymbol{\delta}_{kr}) \boldsymbol{y}_k^* \boldsymbol{e}_r^\intercal \boldsymbol{B}^{-1}) \boldsymbol{N} =
$$

$$
= \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{N} + \beta(\boldsymbol{\delta}_{kr}) \boldsymbol{y}_k^* \boldsymbol{e}_r^\intercal \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} =
$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

$$= z_{0N} + \beta(\delta_{kr}) y_k^* (z_{rm+1}, \ldots, z_{rj},$$
$$\ldots, z_{rn}) \geq 0.$$

Таким образом получили интервал, в котором должна содержаться величина $\beta(\delta_{kr})$:

$$\max_{\{i: y_k^* z_{rj} > 0\}} -\frac{z_{0j}}{y_k^* z_{rj}} \leq \beta(\delta_{kr}) \leq$$
$$\min_{\{i: y_k^* z_{rj} < 0\}} -\frac{z_{0j}}{y_k^* z_{rj}}.$$

Анализ чувствительности: возмущение коэффициентов матрицы ограничений

Теорема 17 (О возмущении базисных коэффициентов). При малых возмущениях $\boldsymbol{\delta_{kr}}$ изменения в $\boldsymbol{x_B^*}$, $\boldsymbol{y^*}$, $\boldsymbol{z_{0N}}$ нелинейны относительно величины $\boldsymbol{\delta_{kr}}$, но эти изменения являются линейными относительно величины

$$\boldsymbol{\beta(\delta_{kr}) = \frac{1}{1/\delta_{kr} + \beta_{rk}}}.$$

Анализ чувствительности

Анализ чувствительности $\equiv$ постоптимальный анализ:

исследование как влияет на оптимальное решение

задачи (16)-(18) возмущение входных данных задачи.

Определение 10. Под ценой, маргинальным значением или теневой ценой ограничения с номером i будем понимать величину, которая задает скорость изменения целевой функции при изменении правой части ограничения b_i.