ЛЕКЦИЯ № 9

1. Лексикографический двойственный симплекс-метод

2. Понятие отсечения

Лемма 12. Пусть $\boldsymbol{B}$ – базисная матрица, $\overline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B})$ – решение системы уравнений

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{0},$$

а $\overline{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{B})$, соответственно, системы уравнений

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}.$$

Тогда

$$(\boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B})) = (\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{B})).$$

Лексикографический двойственный симплекс-метод

Пусть $\boldsymbol{B}$ — двойственно допустимый базис, $\boldsymbol{S}' = \{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{1}), \ldots, \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{l})\}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}$, — множество номеров небазисных переменных, а $\boldsymbol{S}$ — базисных переменных. Перепишем соотношения $(\mathbf{16}'')$ и $(\mathbf{17}'')$:

$$\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{z_{i0}} + \sum_{\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S}'} \boldsymbol{z_{ij}}(-\boldsymbol{x_j}), \ \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{S} \cup \{\mathbf{0}\}. \qquad (\mathbf{25})$$

Лексикографический двойственный симплекс-метод

Добавим к системе уравнений (25) тождественные соотношения $x_i = x_i$ для небазисных переменных

$$x_i = (-1)(-x_i), i \in S'. \qquad (26)$$

Симплекс-таблица будет состоять из коэффициентов правых частей соотношений (25), (26).

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$
\begin{array}{c|c|cccc|}
 & 1 & -x_{m+1} & \ldots & -x_n \\
\hline
x_0 & z_{00} & z_{01} & \ldots & z_{0l} \\
\hline
. & . & . & \ldots & . \\
x_i & z_{i0} & z_{i1} & \ldots & z_{il} \\
. & . & . & \ldots & . \\
x_{m+1} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\
. & . & . & \ldots & . \\
x_n & 0 & 0 & \ldots & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\beta_j = (z_{0j}, z_{1j}, \ldots, z_{nj})^\top, j = \overline{0, 1, \ldots, l}.$$

Тогда система (25), (26) эквивалентна векторному уравнению:

$$(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n})^\top = \boldsymbol{\beta_0} + \sum_{j \in S'} \boldsymbol{\beta_j}(-\boldsymbol{x_j}). \tag{27}$$

Если $\boldsymbol{z_{rs}} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{s} \geq \mathbf{1}$, то возможно элементарное преобразование базиса

$$\boldsymbol{x_r} \longrightarrow \boldsymbol{x_{\tau(s)}}$$

Лексикографический двойственный симплекс-метод

выразим переменную $x_{\tau(s)}$ из r-го уравнения системы (25)

$$x_{\tau(s)} = \frac{1}{z_{rs}}(z_{i0} + \sum_{j \neq s} z_{rj}(-x_{\tau(j)}) - x_r)$$

и заменим ее в правой части (27):

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n)^\top = (\beta_0 - \frac{z_{r0}}{z_{rs}}\beta_s) +$$

$$+ \sum_{j \neq s}(\beta_j - \frac{z_{rj}}{z_{rs}}\beta_s)(-x_{\tau(j)}) + \left(\frac{-1}{z_{rs}}\right)(-x_r).$$

Лексикографический двойственный симплекс-метод

Итак элементарное преобразование базиса:

$$\boldsymbol{x_r \longrightarrow x_{\tau(s)}}$$

приводит к с.-т. со столбцами:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}'_j = \ \boldsymbol{\beta}_j - \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}\boldsymbol{\beta}_s, \ j \neq s, \\ \boldsymbol{\beta}'_s = \ \Big(\dfrac{-1}{z_{rs}}\Big)\boldsymbol{\beta}_s. \end{cases} \tag{28}$$

Лексикографический двойственный симплекс-метод

Пусть $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta_0}, \boldsymbol{\beta_1}, \ldots, \boldsymbol{\beta_n})^\top \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ — вектор-столбец. Вектор $\boldsymbol{\beta}$ *лексикографически больше* нуля ($\boldsymbol{\beta} \succ \mathbf{0}$), если $\boldsymbol{\beta_p} > \mathbf{0}$, где $\boldsymbol{p} = \mathbf{min}\{\boldsymbol{i} \mid \boldsymbol{\beta_i} \neq \mathbf{0}\}$.

Пусть $\boldsymbol{\beta', \beta''} \in \boldsymbol{R}^{n+1}$. Вектор $\boldsymbol{\beta'}$ лексикографически больше вектора $\boldsymbol{\beta''}$, $\boldsymbol{\beta'} \succ \boldsymbol{\beta''}$, если $\boldsymbol{\beta'} - \boldsymbol{\beta''} \succ \mathbf{0}$.

Симплекс-таблицу будем называть *нормальной*, если каждый ее столбец $\boldsymbol{\beta_j}$, $\boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{l}$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический двойственный симплекс-метод

0) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

1) Если симплекс–таблица прямо допустима, т.е. $\boldsymbol{z_{i0} \geq 0,\ i = \overline{1, n}}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущую строку $\boldsymbol{r : z_{r0} < 0,\ r \geq 1}$.

3) Если $\{j \mid z_{rj} < 0,\ j \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущий столбец s по правилу:

$$\frac{1}{|z_{rs}|}\beta_s = lex\min\{\frac{1}{|z_{rj}|}\beta_j \mid z_{rj} < 0,\ j \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за несовместности ограничений (17)-(18)).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\tau(s) := r$ и перейти на шаг 1.

Лексикографический двойственный симплекс-метод

1. Преобразование (28) симплекс-таблицы на шаге 4 сохраняет ее нормальность.

2. Т.к. $z_{r0} < 0$, $z_{rs} < 0$ и $\beta_s \succ 0$, то

$$\beta_0 - \frac{z_{r0}}{z_{rs}} \beta_s \prec \beta_0.$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.

Целочисленное линейное программирование (ЦЛП)

Задача ЦЛП (IP):

$$\boldsymbol{cx \to \max}$$

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

$$\boldsymbol{x \geq 0}$$

$$\boldsymbol{x_j} \text{ — целое, } \boldsymbol{j = 1, \ldots, n.}$$

ЛП-релаксация задачи (IP) – задача ЛП (16)–(17).

ЦЛП – методы отсечения

Пусть $\boldsymbol{x^0}$ – оптимальное решение ЛП-релаксации задачи (IP). Если $\boldsymbol{x^0} \in \boldsymbol{Z^n}$, то $\boldsymbol{x^0}$ – оптимальное решение задачи (IP).

Иначе добавить к ЛП-релаксации новое ограничение (*отсечение*):

– $\boldsymbol{x^0}$ этому ограничению не удовлетворяет (отсекается);

ЦЛП – методы отсечения

– все допустимые решения задачи ЦЛП остаются допустимыми решениями новой задачи ЛП.

Решаем новую задачу ЛП и повторяем указанные шаги до получения решения задачи ЦЛП, либо обнаружения ее неразрешимости.

Пусть $\lfloor \boldsymbol{h} \rfloor$ — целая часть числа $\boldsymbol{h}$ (наибольшее целое, не превосходящее $\boldsymbol{h}$).

Пусть линейная функция $\boldsymbol{d_0 - \sum_j d_j x_j}$ принимает целые неотрицательные значения на множестве допустимых решений задачи (IP) и $\boldsymbol{h \neq 0}$ (если $\boldsymbol{h}$ — целое, то требование неотрицательности избыточно). Рассмотрим следующее линейное уравнение

$$\boldsymbol{\xi = d_0 - \sum_j d_j x_j.} \qquad \mathbf{(29)}$$

Тогда для любого допустимого решения $\boldsymbol{x}$ задачи (IP) имеют место следующие соотношения:

$$\boldsymbol{h\xi + \sum_j hd_j x_j = hd_0,}$$

т.к. $\boldsymbol{x_j}$ и $\boldsymbol{\xi}$ неотрицательны, то

$$\boldsymbol{\lfloor h \rfloor \xi + \sum_j \lfloor hd_j \rfloor x_j \le hd_0,}$$

очевидно, что

$$\boldsymbol{\lfloor h \rfloor \xi + \sum_j \lfloor hd_j \rfloor x_j \le \lfloor hd_0 \rfloor,}$$

подставим вместо $\boldsymbol{\xi}$ выражение (29):

$$\sum_j (\lfloor h d_j \rfloor - \lfloor h \rfloor d_j) x_j \leq \lfloor h d_0 \rfloor - \lfloor h \rfloor d_0.$$

Если к задаче (IP) добавить ограничения:

$$u = (\lfloor h d_0 \rfloor - \lfloor h \rfloor d_0) - \sum_j (\lfloor h d_j \rfloor - \lfloor h \rfloor d_j) x_j,$$

$$u \geq 0,$$

$$u \text{ — целое},$$

то получим эквивалентную задачу ЦЛП.