

Аппроксимационные схемы

Определение Алгоритм A называется ε -аппроксимационной схемой, если для любого $\varepsilon \in]0, 1[$ и любых исходных данных I задачи верно

$$z^A(I) \geq (1 - \varepsilon)z^*(I)$$

Другими словами, алгоритм A является $(1-\varepsilon)$ -приближенным алгоритмом для всех $\varepsilon \in]0, 1[$.

Алгоритм H^ε

1. $l := \min \{ \lceil 1/\varepsilon \rceil - 2, n \}, \quad z^A := 0$

2. Для всех подмножеств $L \subset J, |L| \leq l-1$

$$\text{if } \left(\sum_{j \in L} w_j \leq c \right) \text{ and } \left(\sum_{j \in L} p_j > z^A \right) \text{ then } z^A := \sum_{j \in L} p_j$$

3. Для всех подмножеств $L \subset J$, $|L| = l$

if $(\sum_{j \in L} w_j \leq c)$ then

- Применить алгоритм A^{MG} к задаче с множеством предметов $\{j \mid p_j \leq \min \{p_i, i \in L\}\} \setminus L$ и вместимостью рюкзака $c - \sum_{j \in L} w_j$
- if $\sum_{j \in L} p_j + z^{MG} > z^A$ then $z^A := \sum_{j \in L} p_j + z^{MG}$.

Теорема Алгоритм H^ε является ε -аппроксимационной схемой.

Доказательство. Если оптимальное решение z^* содержит не более l предметов, то $z^A = z^*$ и утверждение верно.

Пусть в оптимальном решении более чем l предметов. Выберем в нем подмножество L^* из l предметов с наибольшими весами p_j . Рассмотрим подзадачу S с множеством предметов $\{j \mid p_j \leq \min \{p_i, i \in L^*\}\} \setminus L^*$ и вместимостью рюкзака $c - \sum_{j \in L^*} w_j$. Оптимальное решение этой подзадачи

обозначим через z_S^* . Тогда $z^* = z_S^* + \sum_{j \in L^*} p_j$. Приближенное решение,

полученное алгоритмом A^{MG} , обозначим через z_S^{MG} .

По определению $z^A \geq \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG}$ и, кроме того, $z_S^{MG} \geq \frac{1}{2} z_S^*$.

Рассмотрим два случая:

$$1. \sum_{j \in L^*} p_j \geq \frac{l}{l+2} z^*. \text{ Тогда } z^A \geq \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG} \geq \sum_{j \in L^*} p_j + \frac{1}{2} z_S^* =$$

$$\sum_{j \in L^*} p_j + \frac{1}{2} (z^* - \sum_{j \in L^*} p_j) = \frac{1}{2} (z^* + \sum_{j \in L^*} p_j) \geq \frac{1}{2} (z^* + \frac{l}{l+2} z^*) = \frac{l+1}{l+2} z^*$$

$$2. \sum_{j \in L^*} p_j < \frac{l}{l+2} z^*. \text{ Тогда в } L^* \text{ найдется предмет с } p_j < \frac{1}{l+2} z^*. \text{ По}$$

определению в подзадаче S все предметы имеют вес не более $\frac{1}{l+2} z^*$.

Применяя свойство 2 для LP -релаксаций, получаем

$$z^* = \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^* \leq \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG} + \frac{1}{l+2} z^* \leq z^A + \frac{1}{l+2} z^*.$$

Итак, в обоих случаях получаем $z^A \geq \frac{l+1}{l+2} z^*$. Величина $\frac{l+1}{l+2}$ растет с ростом l

$$\text{и } \frac{l+1}{l+2} \geq \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 - \varepsilon. \quad \blacksquare$$

$$T = O(n n^l) = O(n^{l+1}). \quad \Pi = O(n).$$

Пример Положим $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, $c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil M$ и

$$p_1 = 2, \quad p_2 = p_3 = \dots = p_n = M,$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = w_3 = \dots = w_n = M.$$

Оптимум $z^* = M(l + 2)$, $l = n - 3$, $z^A = (l + 1)M + 2$ и

$$z^A / z^* \rightarrow (l + 1) / (l + 2) \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty.$$

Определение ε -аппроксимационная схема A называется *полиномиальной*, если ее трудоемкость полиномиально зависит от длины записи исходных данных задачи.

$T_H = O(n^{l+1}) = O(n^{1/\varepsilon - 1})$ — полиномиальная зависимость при заданном ε . Если $\varepsilon = 0.1$, то $T_H = O(n^9)$, то есть алгоритм H^ε является полиномиальной ε -аппроксимационной схемой для задачи о рюкзаке.

Определение ε -аппроксимационная схема A называется *полностью полиномиальной*, если ее трудоемкость полиномиально зависит от длины записи исходных данных задачи и величины $1/\varepsilon$.

Теорема Для задачи о рюкзаке существует полностью полиномиальная ε -аппроксимационная схема.

Доказательство Для примера $I = \{p_1, \dots, p_n, w_1, \dots, w_n, c\}$ построим новый пример \bar{I} , в котором $\bar{c} = c, \bar{w}_j = w_j, \bar{p}_j = \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor$ для некоторой константы $K > 0$, которую определим позже. Для примера \bar{I} применим алгоритм ДП и найдем оптимальный набор предметов \bar{X} . Скорее всего он будет отличаться от оптимального набора X^* для примера I . Оценим разность между полученным значением z^A и оптимальным z^* :

$$\begin{aligned} z^A &= \sum_{j \in \bar{X}} p_j \geq \sum_{j \in \bar{X}} K \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq K \sum_{j \in X^*} \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq \sum_{j \in X^*} K \left(\frac{p_j}{K} - 1 \right) = \\ &= \sum_{j \in X^*} (p_j - K) = z^* - |X^*| K. \end{aligned}$$

Второе неравенство в этой цепочке следует из оптимальности \bar{X} для \bar{I} .

Мы хотим получить
$$\frac{z^* - z^A}{z^*} \leq \frac{|X^*| K}{z^*} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $K \leq \frac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|}$. Так как $n \geq |X^*|$ и $z^* \geq p_{\max}$, то

$$\frac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|} \geq \frac{\varepsilon \cdot z^*}{n} \geq \frac{\varepsilon \cdot p_{\max}}{n}$$

и, полагая $K = \varepsilon \cdot p_{\max} / n$, получим нужное значение для параметра K .

Трудоёмкость алгоритма определяется трудоёмкостью ДП. Если вместо исходной задачи решать обратную к ней, то $T = O(Un)$, где U — верхняя оценка на оптимальное значение целевой функции $\bar{z}^* = \sum_{j \in \bar{X}} \bar{p}_j$.

Очевидно, что $\bar{z}^* \leq n \bar{p}_{\max}$, но $\bar{p}_{\max} \leq \frac{p_{\max}}{K} = \frac{n}{\varepsilon}$, то есть $\bar{z}^* \leq n^2 / \varepsilon$.

Полагая $U = n^2 / \varepsilon$, получаем $T = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$, $\Pi = O(Un) = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$. ■