Задачи календарного планирования

Олимпийские игры 1992 г., Барселона, более 2000 мероприятий за 15 дней.

- частичный порядок на множестве событий (четверть финала, полуфинал, финал);
- мощность спортивных сооружений (число одновременных соревнований, число зрителей);
- транспортные проблемы и доход (максимизировать посещаемость наиболее популярных соревнований — раздвинуть их по времени);
- требования TV (минимум параллельных трансляций);
- обеспечение безопасности (число полицейских ограничено).

Система поддержки решений «SUCCESS–92» Университет г. Барселоны

Постановка задачи

Дано: $J = \{1, \ldots, n\}$ — множество работ;

$\tau_j \geq 0$ — длительность работы j;

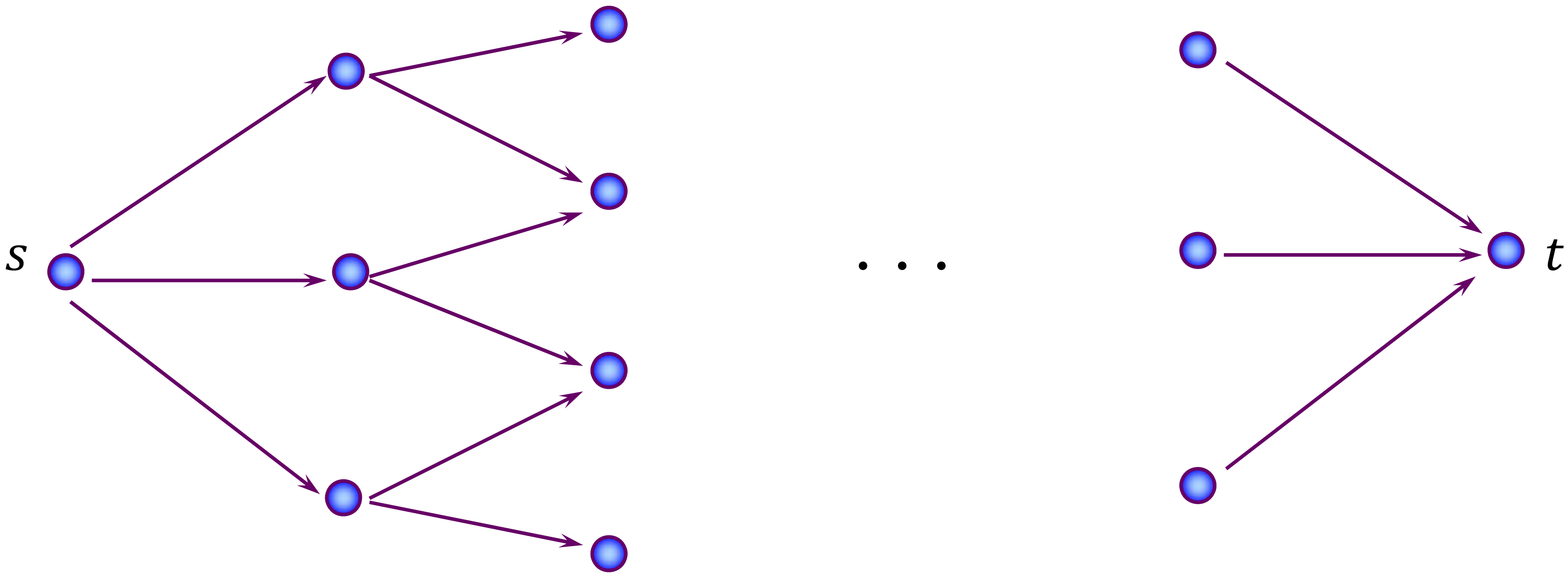
$C = \{(i,j) | i,j \in J\}$ — частичный порядок, работа j не может начаться раньше окончания работы i.

Найти:

- Минимальное время завершения всего проекта.
- Наиболее ранний момент начала и завершения каждой работы.
- Множество критических работ, то есть таких работ, задержка хотя бы одной из которых приведет к задержке всего проекта.
- Допустимое запаздывание для некритических работ.
- Вероятность завершения проекта к заданному сроку.

Сетевой график «работы — дуги»

$G = (V, E)$ — ориентированный взвешенный граф без циклов с одним источником s и одним стоком t, каждой дуге $j = (i, k)$ приписан вес $\tau_j \geq 0$.

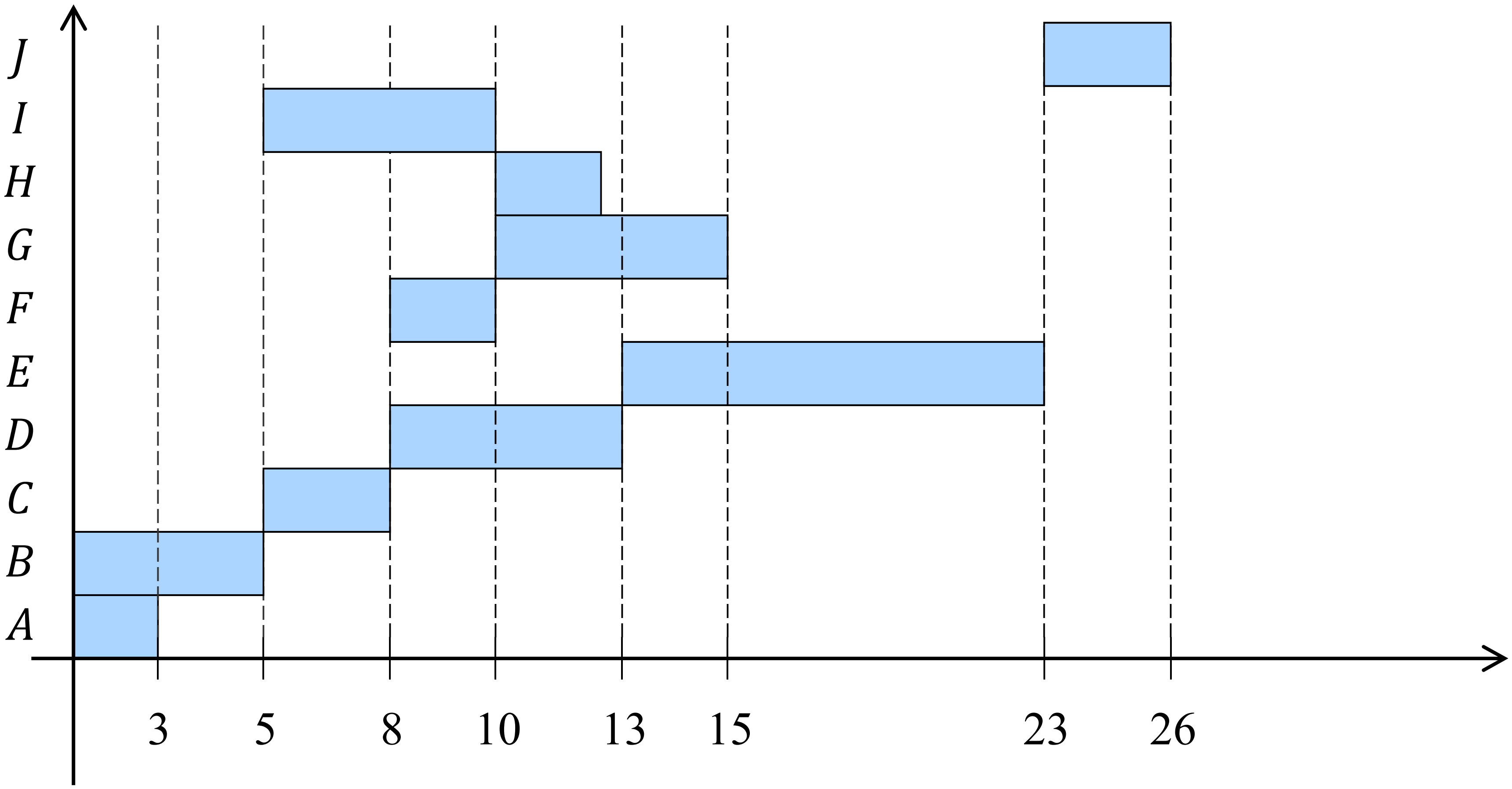


Вершины — события. Дуги — работы.

Пример

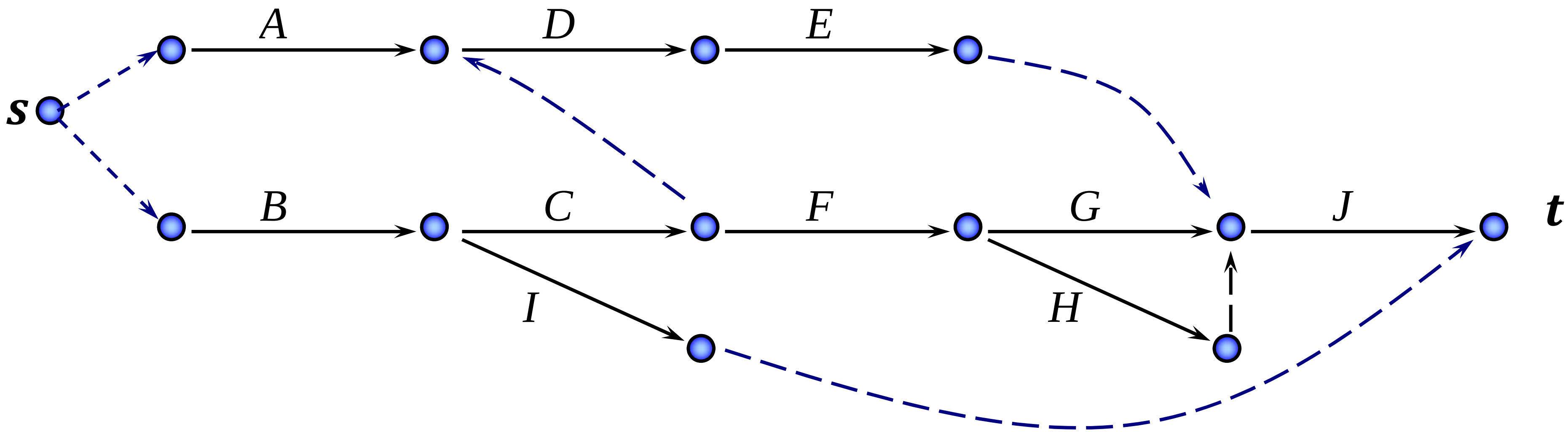
	Предше-ствование	Длитель-ность
A — выбрать место для офиса	—	3
B — создать финансовый и организационный план	—	5
C — определить обязанности персонала	B	3
D — разработать план офиса	A, C	5
E — ремонт помещений	D	10
F — отобрать кандидатов на увольнение	C	2
G — нанять новых служащих	F	5
H — назначить ключевых руководителей	F	2
I — распределить обязанности руководителей	B	5
J — обучить персонал	H, E, G	3

Диаграмма Гантта

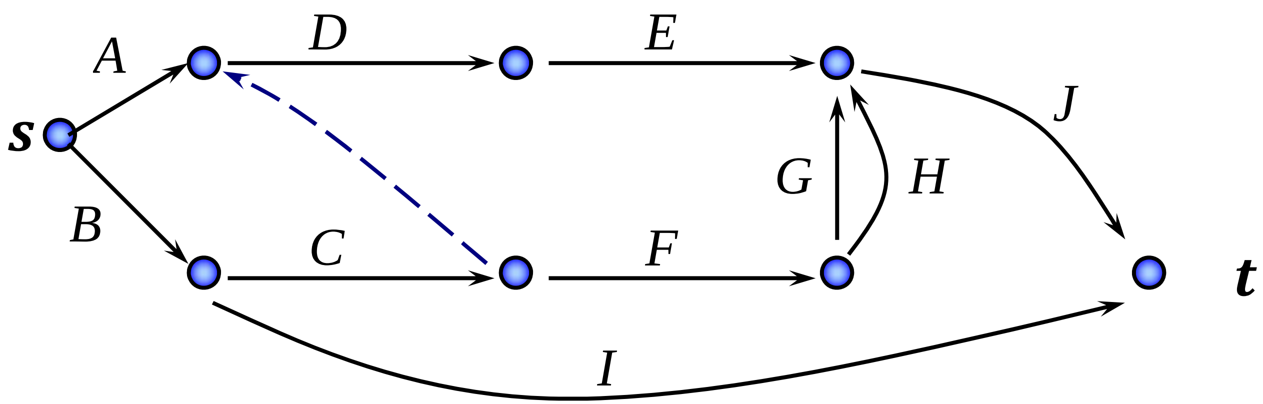


Работа E является критической. Задержка работы F ведет к задержке работ G, H, но не работы J.

Сетевой график «работы — дуги»



Некоторые фиктивные дуги можно исключить



Параметры сетевой модели

Определение *Рангом* $r(x)$ вершины $x \in V$ называется число дуг в максимальном пути (по числу дуг) из источника s в вершину x. Рангом проекта R называется ранг стока t: $R = r(t)$.

Рекуррентные соотношения для рангов

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x = s \\ \max\{r(y) + 1 \mid (y, x) \in E\}, & x \neq s \end{cases}$$

Алгоритм Форда

$|V| = n,\ |E| = m,$ дуга $e = \big(i(e), k(e)\big) \in E.$

Алгоритм

1. $r(x) \coloneqq 0$ для всех $x \in V$.
2. for $l \coloneqq 1, \dots, |V|$ do

   for $e \coloneqq 1, \dots, |E|$ do

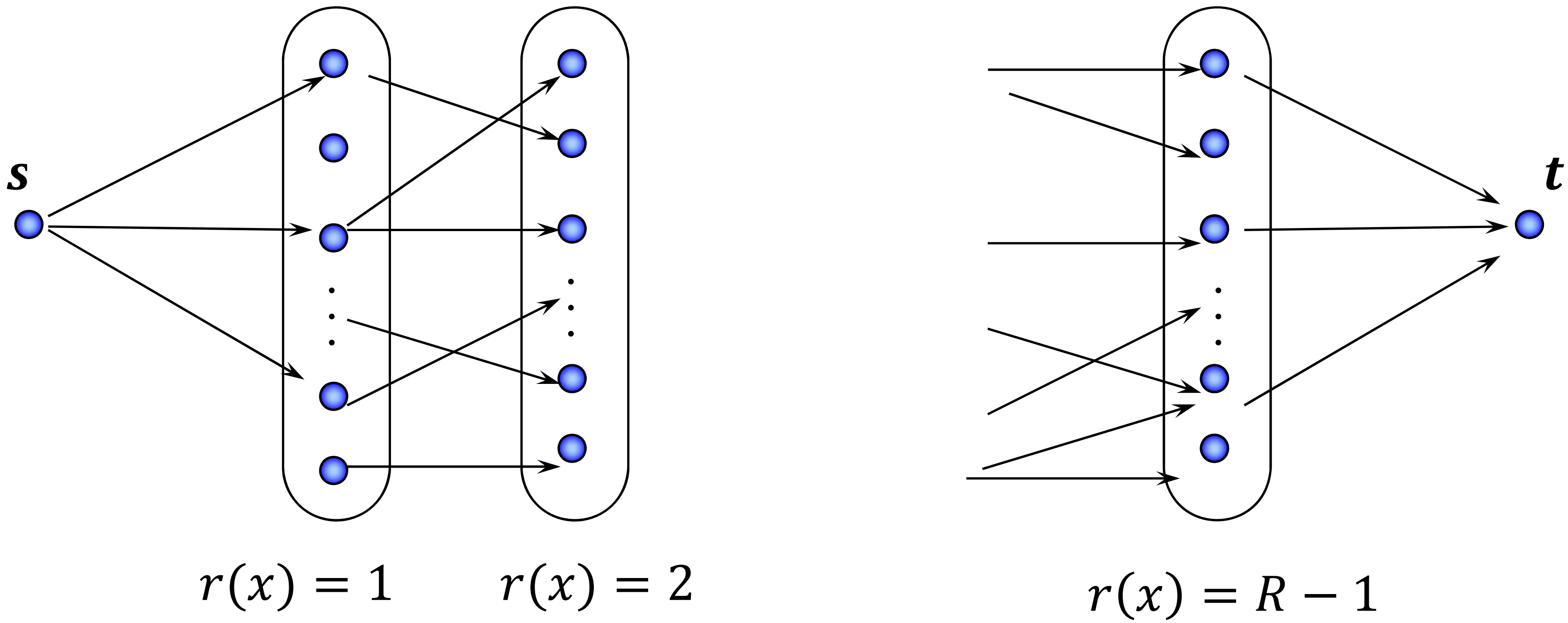
   if $r(k(e)) < r(i(e)) + 1$

   then $r\big(k(e)\big) \coloneqq r\big(i(e)\big) + 1.$

$$T = O(|V||E|),\ \ \Pi = O(|V| + |E|)$$

Определение Нумерация вершин сети $G = (V, E)$ называется *правильной*, если для каждой дуги $e = \big(i(e), k(e)\big) \in E$ справедливо неравенство $i(e) < k(e)$.

Построение правильной нумерации вершин (*топологическая сортировка*)



В произвольном порядке нумеруем вершины ранга 1, затем ранга 2, и т.д.

Определение *Наиболее ранним моментом* свершения события x называется максимальный момент времени $T_p(x)$, раньше которого данное событие произойти не может.

Обозначим через L_{sx} длину максимального пути из s в x во взвешенном графе $G = (V, E), \tau(e) \geq 0, e \in E$. Тогда $T_p(x) = L_{sx}$.

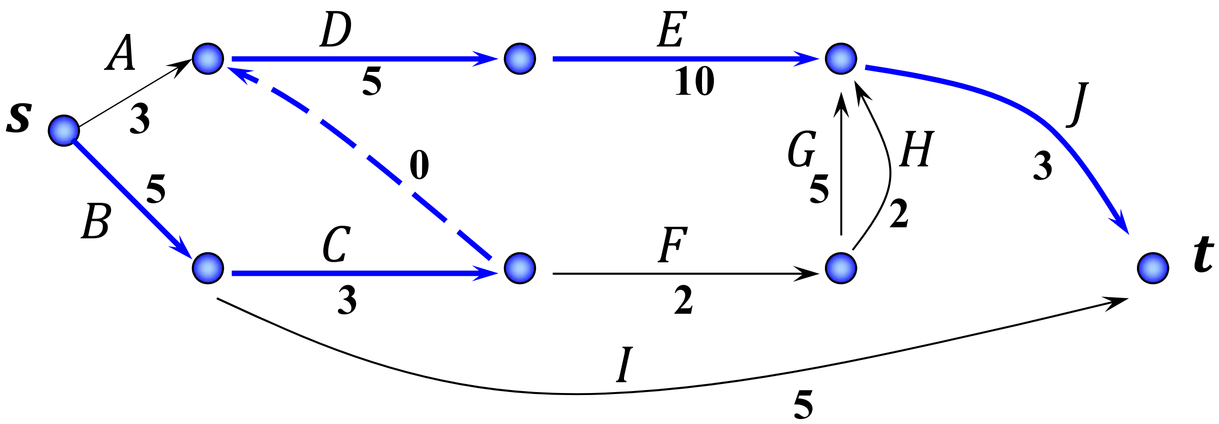
Рекуррентные соотношения

$$T_P(x) = \begin{cases} 0, & x = s \\ \max\{T_P(y) + \tau(yx) | (yx) \in E, & x \neq s\} \end{cases}$$

Упражнение Используя правильную нумерацию вершин, построить алгоритм вычисления всех величин $T_P(x)$ с трудоемкостью $T = O(|E|)$.

Критическое время проекта — наиболее раннее время завершения всего проекта, то есть $T_{\text{Кр}} = T_P(t)$.

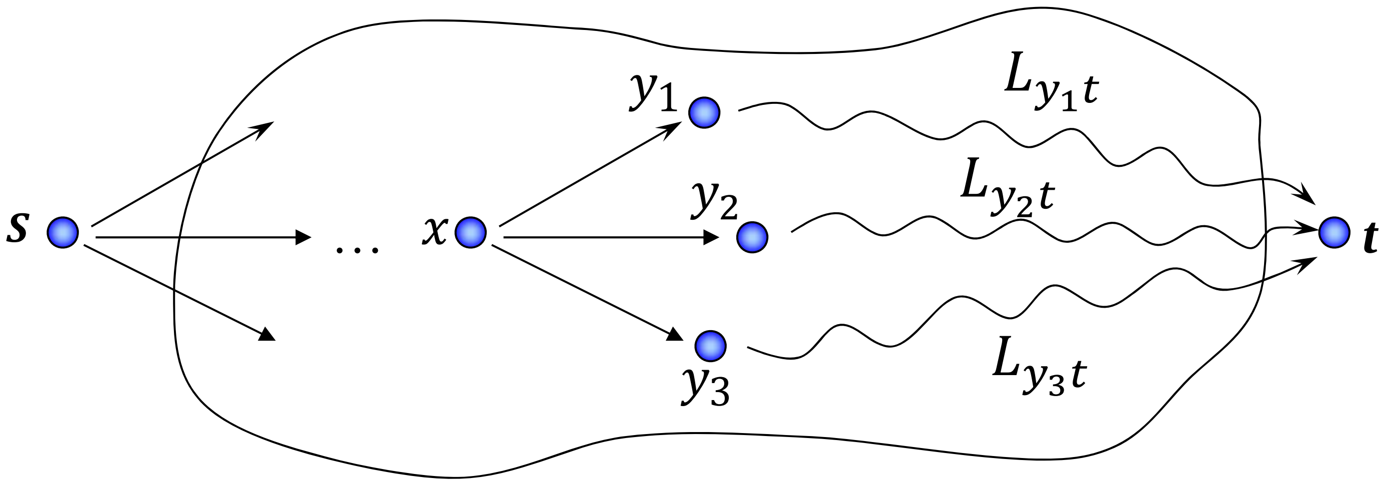
Определение Всякий путь в $G = (V, E)$, имеющий длину $T_{\text{Кр}}$ называется *критическим*. Работы и события, лежащие на критическом пути, называются *критическими*.



Определение *Наиболее поздним моментом* $T_{\Pi}(x)$ свершения события x называется максимально возможный момент свершения события x, не приводящий к увеличению $T_{\text{Кр}}$. Легко заметить, что $T_{\Pi}(x) = T_{\text{Кр}} - L_{xt}$.

Рекуррентные соотношения

$$T_{\Pi}(x) = \begin{cases} T_{\text{Кр}}\,, & x = t \\ \min\{T_{\Pi}(y) - \tau(x,y) | (x,y) \in E, & x \neq t\} \end{cases}$$



Упражнение Построить алгоритм вычисления величин $T_{\Pi}(x)$ с $T = O(|E|)$.

Определение *Полным резервом времени* для работы $e = (i, k) \in E$ называется величина $T_\Pi(k) - T_P(i) - \tau(e)$.

Теорема Необходимым и достаточным условием принадлежности работы критическому пути является равенство нулю ее полного резерва времени.

Доказательство Необходимость. Пусть дуга $e = (i, k)$ является критической. Тогда

$$L_{si} + \tau(e) + L_{kt} = L_{\text{Кр}}$$

$$\text{и } \left(T_{\text{Кр}} - L_{kt}\right) - L_{si} - \tau(e) = 0,$$

$$\text{но } T_{\text{Кр}} - L_{kt} = T_\Pi(k) \text{ и } L_{si} = T_P(i),$$

откуда и следует доказательство теоремы. Достаточность доказывается аналогично. ■

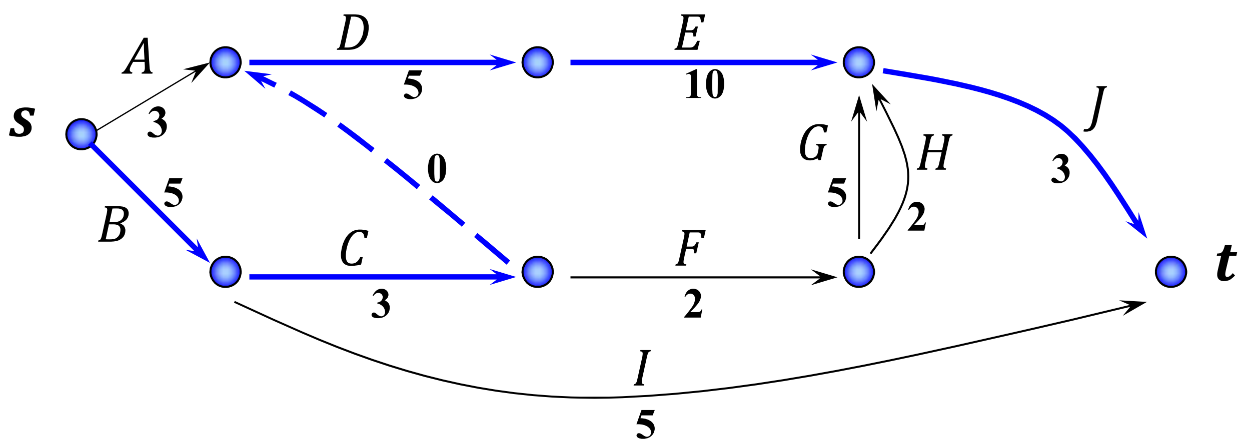
Следствие Событие x является критическим, если и только если $T_P(x) = T_\Pi(x)$.

Стратегический анализ

Критический путь B, C, D, E, J. Длина пути $T_{\text{Кр}} = 26$.

Работа J — обучение персонала. Работа E — ремонт помещений.

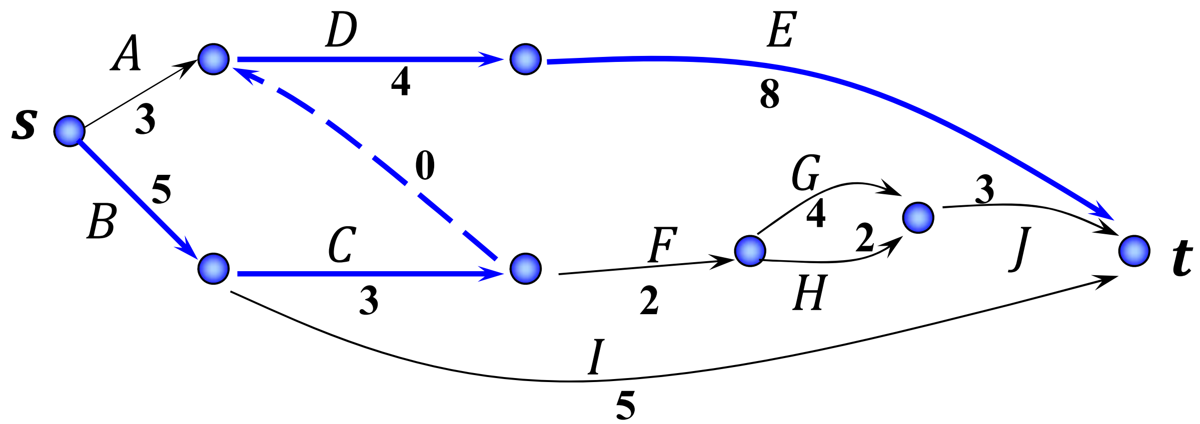
Можно обучать персонал в учебном центре и убрать предшествование E для J. Длительности работ можно сократить, если привлечь дополнительные средства.



Новая сетевая модель

Сократили длительности работ D, E, G и удалили работу E из предшественников работы J. Новый критический путь B, C, D, E.

Длина пути $T_{\text{Кр}} = 20$.



Вопросы

- Задача вычисления критического времени проекта принадлежит классу P (*Да или Нет?*)
- Если полный резерв времени некоторой работы $e = (i, k)$ равен нулю, то события i, k являются критическими (*Да или Нет?*)
- Сокращение длительности критической работы или удаление условия предшествования между двумя критическими работами ведет к сокращению длительности всего проекта (*Да или Нет?*)
- Критическое время проекта можно найти, решив задачу линейного программирования (Как?)
- Если требуется сократить критическое время проекта путем сокращения длительности каких-то работ, то минимум таких сокращений можно найти, решив задачу линейного программирования. (*Да или Нет?*)

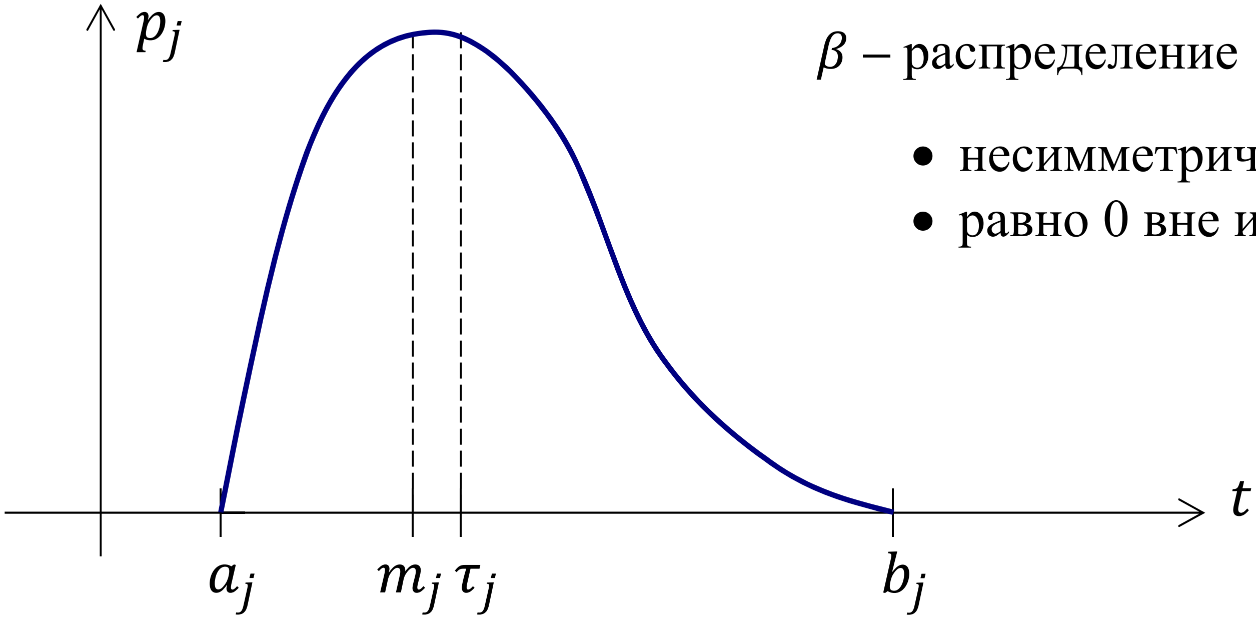
Вероятностная модель

Для каждой работы $j \in J$ кроме τ_j — длительности выполнения (в среднем) зададим три величины:

a_j — оптимальное время завершения;

m_j — наиболее вероятное время завершения;

b_j — пессимистическое время завершения.



β – распределение

- несимметричное
- равно 0 вне интервала $[a, b]$

Оценка параметров для β –распределения

Для работы j среднее значение $\tau_j \approx \frac{(a_j+4m_j+b_j)}{6}$, дисперсия $\sigma_j \approx \left(\frac{b_j-a_j}{6}\right)^2$, стандартное отклонение $\sqrt{\sigma_j} \approx \frac{b_j-a_j}{6}$.

j	a	m	b	Среднее	Ст. отклонение	Дисперсия
A	1	3	5	3	2/3	4/9
B	3	4,5	9	5	1	1
C	2	3	4	3	1/3	1/9
D	2	4	6	4	2/3	4/9
E	4	7	16	8	2	4
F	1	1,5	5	2	2/3	4/9
G	2,5	3,5	7,5	4	5/6	25/36
H	1	2	3	2	1/3	1/9
I	4	5	6	5	1/3	1/9
J	1,5	3	4,5	3	1/2	1/4

Вероятность завершения проекта к заданному сроку

Предполагаем, что

- длительности работ являются независимыми случайными величинами;
- случайная величина $\tilde{T}_{\text{Кр}}$ имеет нормальное распределение.

Требуется оценить $Prob\{\tilde{T}_{\text{Кр}} \leq T^*\}$ для любого T^*.

Пример Берем критический путь B, C, D, E и считаем дисперсию для $\tilde{T}_{\text{Кр}}$.

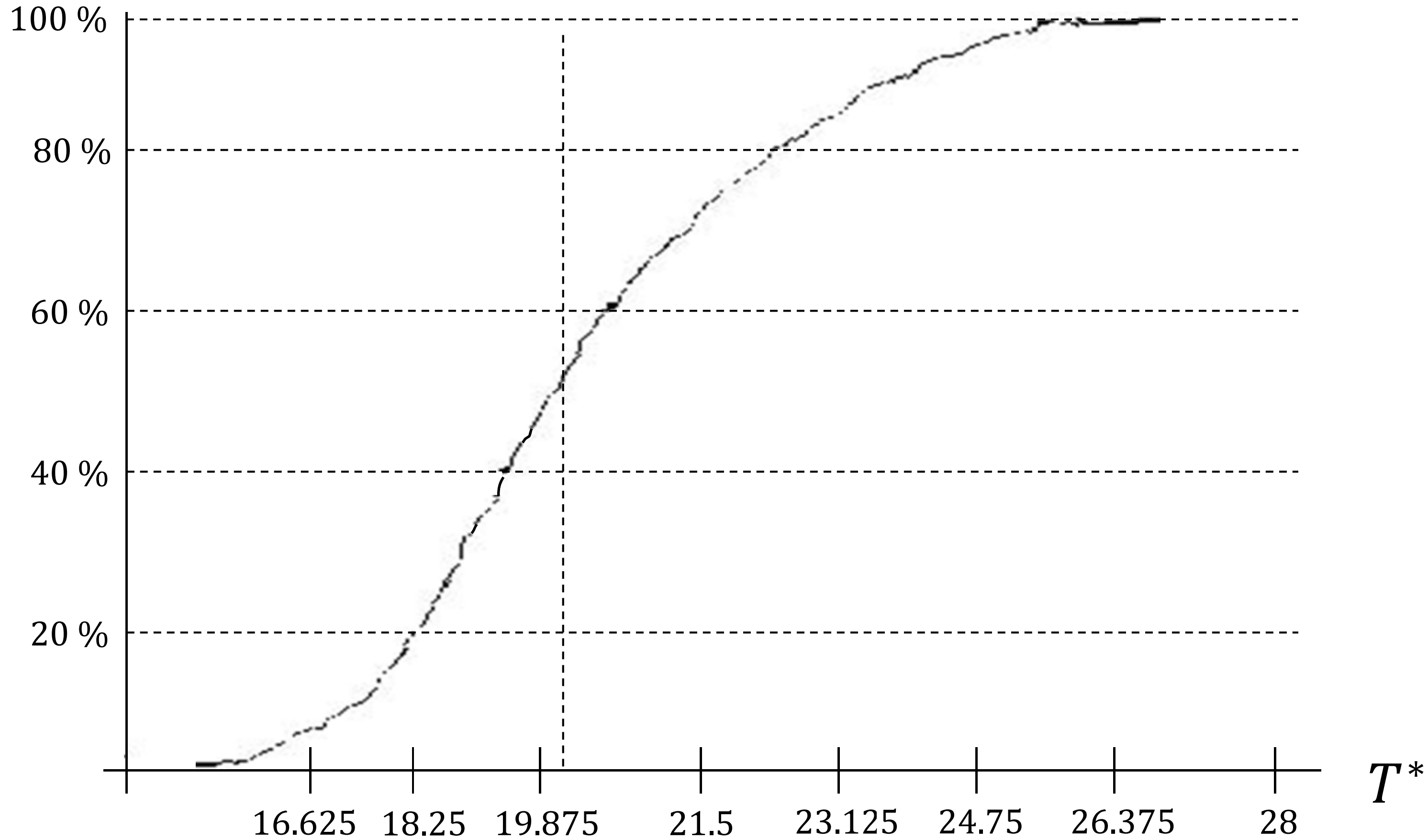
$\sigma(\tilde{T}_{\text{Кр}}) = \sigma(B) + \sigma(C) + \sigma(D) + \sigma(E) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + 4 = \frac{52}{9}$. Стандартное отклонение $\sqrt{\sigma(\tilde{T}_{\text{Кр}})} = \sqrt{\frac{52}{9}} = 2{,}404$. Итак, $\tilde{T}_{\text{Кр}}$ – нормально распределенная случайная величина с мат.ожиданием $\tilde{T}_{\text{Кр}} = 20$ и стандартным отклонением 2,404. Тогда для $z = (\tilde{T}_{\text{Кр}} - T_{\text{Кр}})/\sqrt{\sigma}$ при $T^* = 22$ получаем

$$Prob\{\tilde{T}_{\text{Кр}} \leq T^*\} = Prob\left\{\frac{\tilde{T}_{\text{Кр}} - T_{\text{Кр}}}{\sqrt{\sigma}} \leq \frac{T^* - T_{\text{Кр}}}{\sqrt{\sigma}}\right\} = Prob\{z \leq 0{,}8319\} \approx 0{,}8.$$

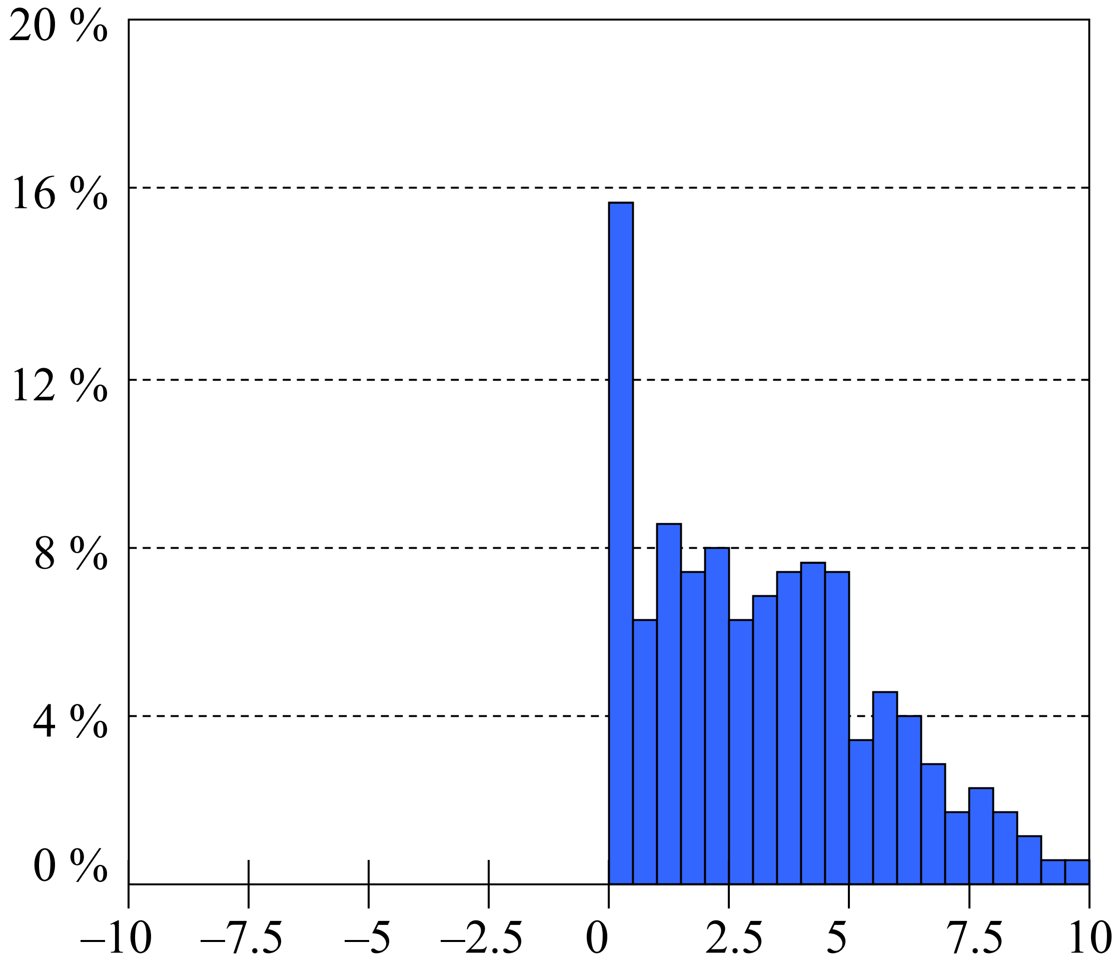
Расчеты по имитационной модели

Функция распределения для вероятности окончания проекта к времени T^*

$Prob\{\tilde{T}_{Кр} \leq T^*\}$



Распределение резерва времени для работы F



Полный резерв для работы F равен 3. Среднее значение полного резерва по имитационной модели 3,026, но большая дисперсия. Достаточно часто работа F оказывалась критической!

Вопросы

- Функция распределения для вероятности окончания проекта к заданному сроку вычисляется за полиномиальное время (*Да или Нет?*)
- Полный резерв времени любой работы является случайной величиной (*Да или Нет?*)
- Если требуется решить задачу о рюкзаке в вероятностной постановке, то можно аналогичным образом построить функцию распределения для суммарной ценности выбранных предметов и оценить вероятность получения дохода не ниже заданного (*Да или Нет?*)