Нижние оценки в задаче коммивояжера

Примитивная оценка. Плата за выезд $a_i = \min_{j \neq i} c_{ij}$, $i = 1, \dots, n$.

Плата за въезд $b_j = \min_{i \neq j}(c_{ij} - a_i)$, $j = 1, \dots, n$.

Теорема. $OPT(c_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Доказательство. Положим $c'_{ij} = c_{ij} - a_i$, $1 \leq i, j \leq n$. Тогда

$OPT(c_{ij}) = OPT(c'_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} a_i$. Аналогично, $c''_{ij} = c'_{ij} - b_j, 1 \leq i, j \leq n$ и

$$OPT(c_{ij}) = OPT(c''_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \geq \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j . \blacksquare$$

Оценка линейного программирования

Введем переменные $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из города } i \text{ едем в город } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$

Математическая модель $$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях: $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i \in J,$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in J \setminus S} x_{ij} \ge 1, \quad \forall S \subset J, \qquad S \ne \emptyset.$$ (исключение подциклов)

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i, j \in J.$$

Заменяя $x_{ij} \in \{0,1\}$ на $0 \le x_{ij} \le 1$, получаем задачу линейного программирования, которая дает нижнюю оценку для оптимума, не хуже предыдущей (?).

1–Деревья для симметричных матриц

Хотим найти гамильтонов цикл минимального веса. Необходимо найти:

– ровно n ребер,

– которые покрывают все вершины,

– имеют минимальный суммарный вес и

– каждая вершина инцидентна ровно двум ребрам.

Заменим последнее условие на следующее:

– одна заданная вершина инцидентна ровно двум ребрам.

Ослабили условия, значит, получим нижнюю оценку.

Алгоритм построения 1-дерева

1. Удаляем заданную вершину и строим остовное дерево минимального веса (алгоритм Крускала, Прима).
2. Добавляем два ребра минимального веса, проходящих через заданную вершину, получаем 1-дерево.

Задача о назначениях

Дано: n рабочих, n станков, c_{ij} — время работы -рабочего на j-м станке.

Найти назначение рабочих на станки с минимальным суммарным временем.

Переменные задачи: $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{рабочий } i \text{ получил станок } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$.

Математическая модель $$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях:
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j \in J,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i \in J,$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad 1 \le i, j \le n.$$

Свойство задачи: среди оптимальных решений линейной релаксации всегда найдется целочисленное решение.

Определение. Пусть $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ — некоторый вектор. Элемент c_{ij} называется ***-минимальным***, если $c_{ij} - \Delta_j \le c_{ik} - \Delta_k$ для всех $1 \le k \le n$.

Теорема. Пусть для некоторого Δ существует набор Δ-минимальных элементов $(c_{1j(1)}, \dots, c_{nj(n)})$ по одному в каждой строке и столбце. Тогда этот набор является оптимальным решением задачи.

Доказательство. Решение $(c_{1j(1)}, \dots, c_{nj(n)})$ является допустимым и

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij(i)} = \sum_{i=1}^{n} (c_{ij(i)} - \Delta_{j(i)}) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_j.$$

В правой части равенства первая сумма является минимальной среди всех допустимых назначений, а вторая сумма является константой, то есть полученное решение является оптимальным. ■

Определение. Для вектора Δ выделим в каждой строке по одному Δ-минимальному элементу и назовем его ***Δ-основой***. Другие Δ-минимальные элементы будем называть ***альтернативными Δ-основами***. Число столбцов матрицы c_{ij} без Δ-основ назовем ***дефеком***.

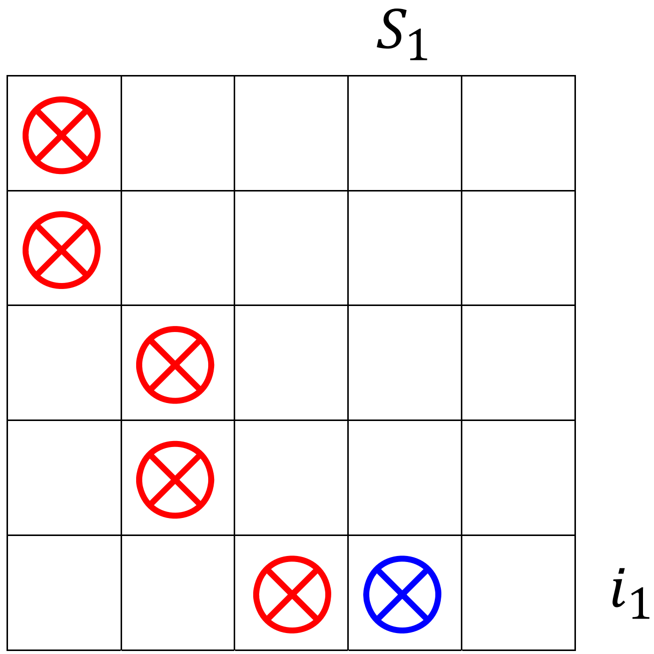
Общая идея алгоритма

Начинаем с $\Delta \equiv 0$. На каждом этапе алгоритма дефект уменьшается на 1, т.е. не более чем за n этапов найдем оптимальное решение задачи.

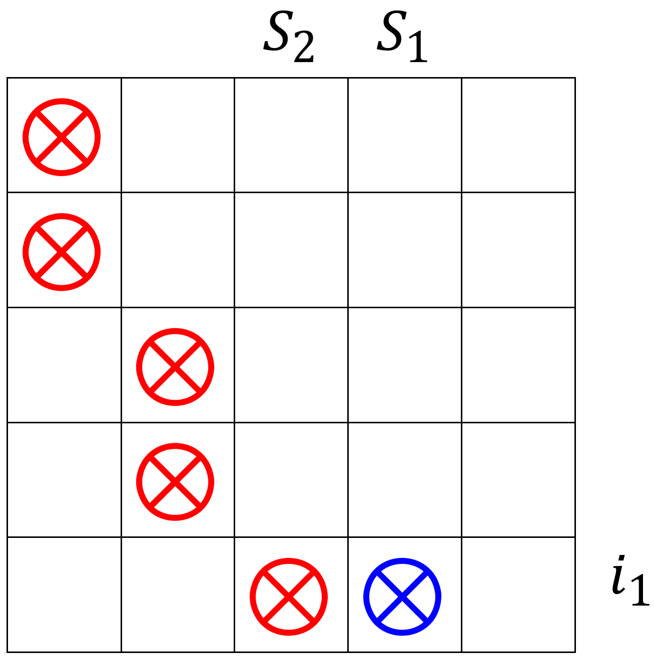
Описание одного этапа

1. Выберем столбец без Δ-основы и обозначим его S_1.
2. Увеличим Δ_{S_1} на максимальное δ так, чтобы все Δ-минимальные элементы остались Δ-минимальными (возможно $\delta = 0$). Получим для некоторой

строки i_1 новый Δ-минимальный элемент $c_{i_1 S_1}$ назовем его альтернативной основой для строки i_1.

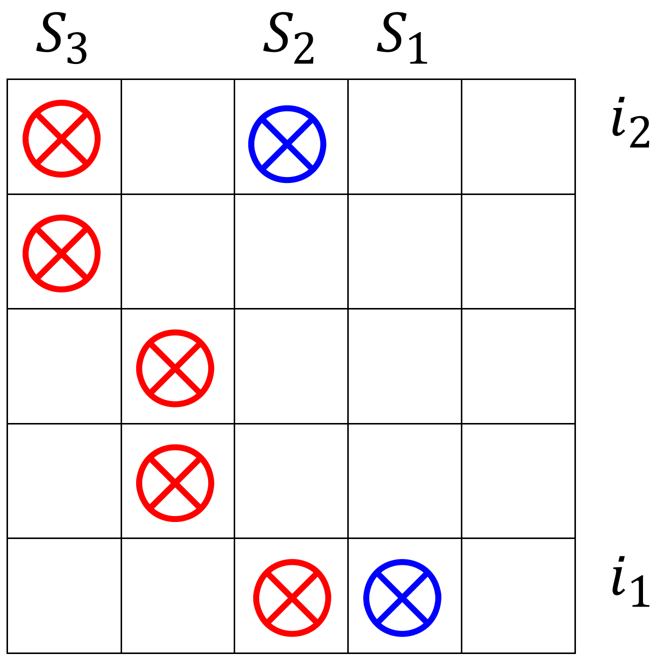


3. Для строки i_1 столбец $j(i_1)$ с Δ-основой пометим меткой S_2.

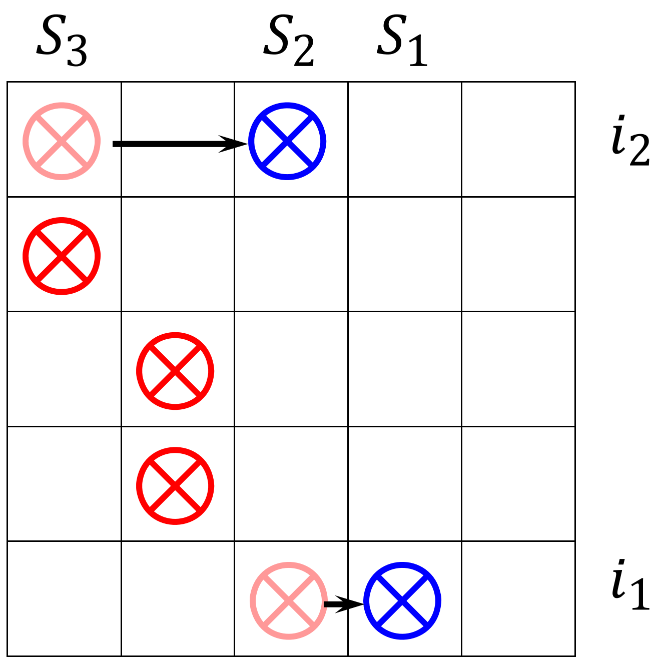


4. Увеличим Δ_{S_1} и Δ_{S_2} на максимальное δ так, чтобы все Δ-основы остались Δ-минимальными элементами.

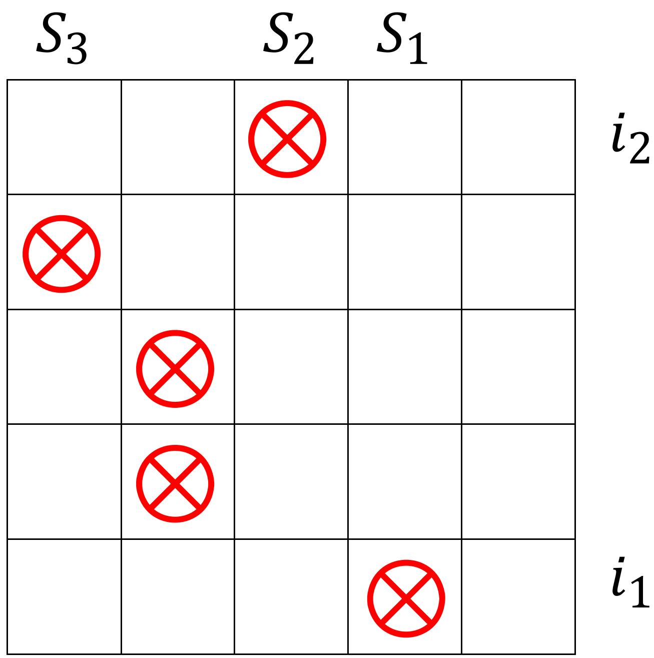
Найдем новую альтернативную основу в одном из столбцов S_1 или S_2. Пусть она оказалась в строке i_2. Пометим столбец $j(i_2)$ меткой S_3 и будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не встретим столбец с двумя или более основами.



5. Строим новый набор из Δ-основ. Заменой основы в строке назовем следующую операцию: альтернативная основа становится основой, а старая перестает быть основой.
   5.1. Произведем замену основ в строке, где лежит последняя альтернативная основа (строка i_k). Тогда в столбце $j(i_k)$ число основ уменьшится на 1, но останется положительным.



В столбце, где появилась новая основа, возьмем старую основу и в этой строке тоже проведем замену основ и т.д. до тех пор, пока не доберемся до столбца S_1. В итоге, столбец S_1 получит основу, а число основ в столбце $j(i_k)$ уменьшится на 1.



Упражнение. Оценить трудоемкость алгоритма решения задачи о назначениях. Придумать алгоритм решения задачи с трудоемкостью $O(n^3)$.

Вопросы

- Задача о назначениях дает нижнюю оценку для задачи коммивояжера, которая хуже оценки линейного программирования *(Да или Нет?)*
- Задача о назначениях полиномиально разрешима *(Да или Нет?)*
- Изменится ли примитивная нижняя оценка, если сначала взять плату за въезд, а затем плату за выезд? Если да то, сколько разных нижних оценок можно получить таким способом?
- Зависит ли нижняя оценка через 1-деревья от выбора удаляемой вершины? Если да то, как найти наилучшую вершину?
- Оценка линейного программирования имеет только теоретический интерес, т.к. использует экспоненциальное число ограничений *(Да или Нет?)*

Метод ветвей и границ

В основе метода лежит принцип «разделяй и властвуй».

Пусть D — множество допустимых решений задачи

$$\min\{f(x) \mid x \in D\},$$

и для любого подмножества $d \subseteq D$ умеем вычислять:

$LB(d)$ — нижнюю оценку для минимума $f(x),\ x \in d$,

$UB(d)$ — верхнюю оценку для минимума $f(x),\ x \in d$,

т. е.

$$LB(d) \leq \min\{f(x) | \in D\} \leq UB(d), \text{ для любого } d \subseteq D.$$

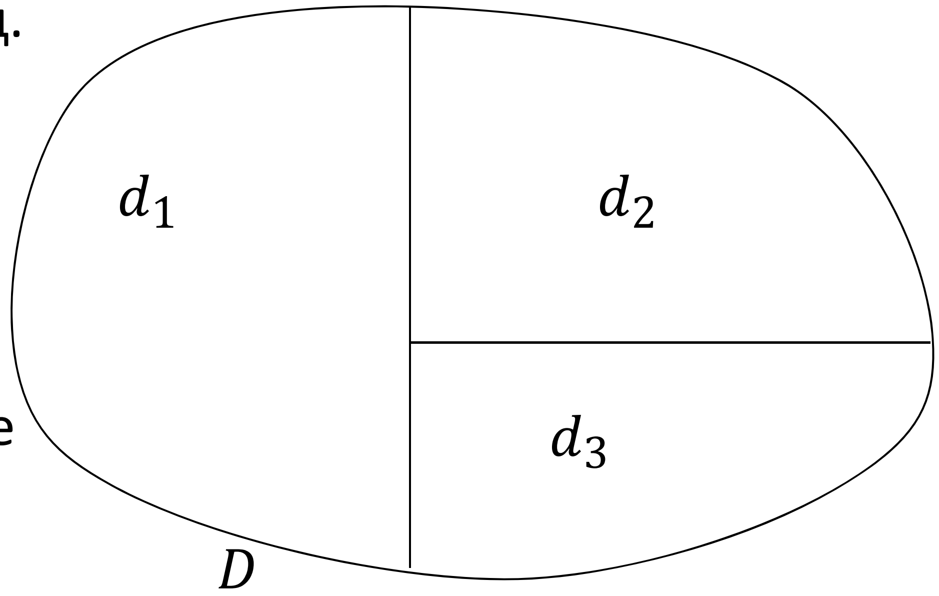
Основная идея

Пусть x^* — текущий рекорд и сначала $f(x^*) = UB(D)$. Вычисляем $LB(D)$ и, если $LB(D) = UB(D)$, то STOP, x^* — оптимальное решение задачи. В противном случае разбиваем D на подмножества $D = d_1 \cup \ldots \cup d_k$. Для каждого подмножества вычисляем $UB(d_i), LB(d_i), i = 1, \ldots, k$.

Если $f(x^*) > UB(d_i)$, то меняем рекорд.

Если $LB(d_i) \geq f(x^*)$, то выбрасываем d_i, иначе дробим d_i на подмножества.

Так как D — конечное множество, то процесс конечен и дает точное решение задачи.



Описание метода

На каждом шаге имеется

– рекорд x^*;

– просмотренная часть $P \subset D$, для которой $f(x) \geq f(x^*), x \in P$;

– разбиение множества $D \setminus P$ на подмножества. $d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_k}$.

Шаг состоит в следующем.

1. Выбрать элемент разбиения, например, d_{i_k};
2. Вычислить $UB\left(d_{i_k}\right)$. Если $f(x^*) > UB\left(d_{i_k}\right)$, то сменить рекорд x^*.
3. Вычислить $LB\left(d_{i_k}\right)$.

3.1. Если $LB\left(d_{i_k}\right) \geq f(x^*)$, то добавить d_{i_k} к P и перейти к следующему шагу.

3.2. Если $LB\left(d_{i_k}\right) \leq f(x^*)$, но в множестве d_{i_k} удалось найти наилучший элемент $\tilde{x}$: $f(\tilde{x}) = \min\{f(x)|x \in d_{i_k}\}$, то добавить d_{i_k} к P; если $f(x^*) > f(\tilde{x})$, то положить $x^* \coloneqq \tilde{x}$.

3.3. Если $LB\left(d_{i_k}\right) \leq f(x^*)$, но элемент $\tilde{x}$ найти не удалось, то разбиваем d_{i_k} на подмножества $d_{i_k} = d_{i_{k+1}} \cup \ldots \cup d_{i_{k+m}}$ и переходим к следующему шагу, имея новое разбиение для $D \setminus P$.

Метод В&Г для задачи коммивояжера

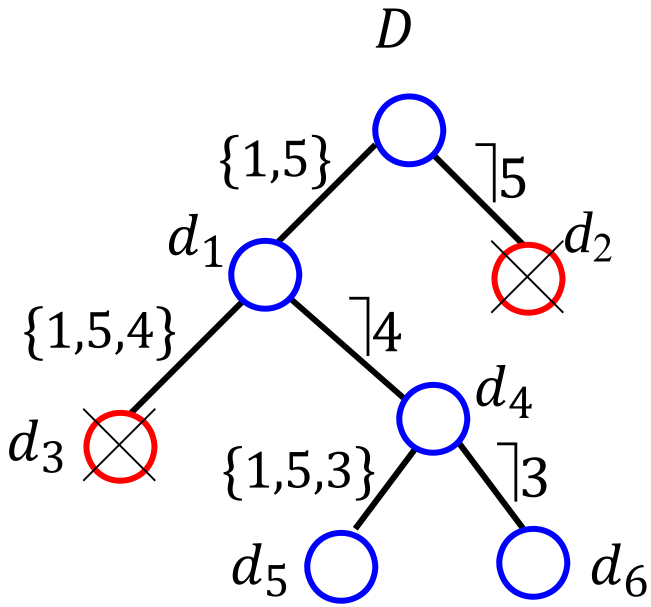
Разбиение множества D представляется в виде бинарного дерева.

Каждой вершине дерева соответствует частичный тур и список запретов.

Например, вершине d_6 соответствует

частичный тур 1,5 и запреты {4,3}

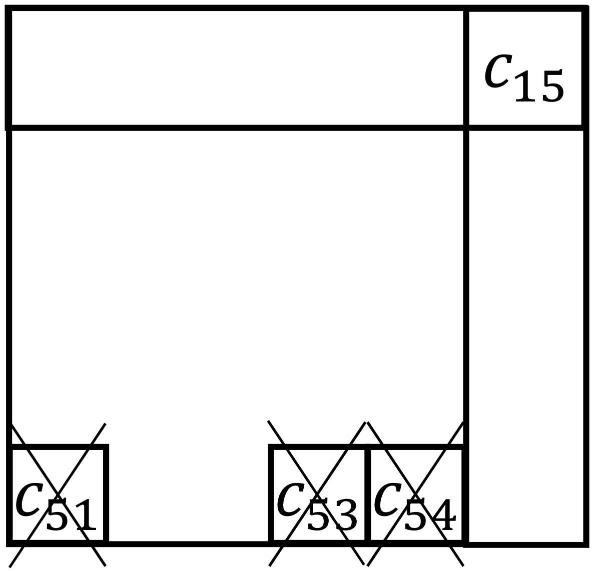
на выход из города 5.



Метод В&Г для задачи коммивояжера

Примитивная нижняя оценка для вершины дерева, например, d_6 при $n = 5$:

$$LB(d_6) = c_{15} + \sum_{i=2}^{5} a_i + \sum_{j=1}^{4} b_j.$$

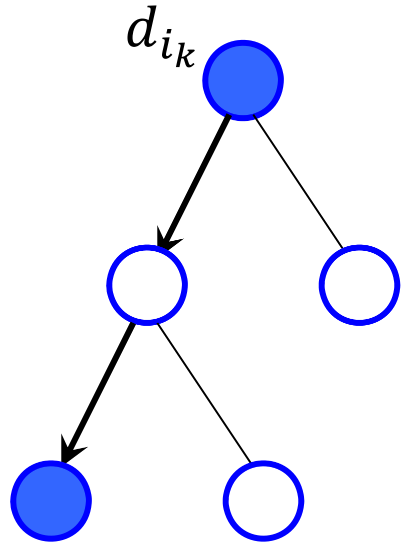


Задача о назначениях:

$$LB(d_6) = c_{15} + \sum_{i=2}^{5} c_{ij(i)}\,, \text{при } c_{53} = c_{54} = c_{51} = +\infty.$$

Верхняя оценка — алгоритм «Иди в ближайший».

Выбор переменной для ветвления



Основная идея — угадать оптимальное решение на подмножестве d_{i_k} и ветвиться по дугам этого тура:

- для частичного тура $i_1, \ldots, i_k$ выбираем минимальный элемент в строке i_k матрицы $c''_{ij} = c_{ij} = a_i - b_j, j \neq i_1, \ldots, i_k$
- для частичного тура $i_1, \ldots, i_k$ строим верхнюю оценку и ветвимся по дуге $(i_1, \ldots, i_{k+1})$.
- для частичного тура $i_1, \ldots, i_k$ решаем задачу о назначениях и ветвимся вдоль цикла, проходящего через вершину i_k.

Выбор подмножества из разбиения $D \setminus P$

Две основные схемы:

- ***многосторонняя схема ветвления***, когда выбирается подмножество d'такое, что
$$LB(d') = \min\{LB(d_i) | i = i_1, \dots, i_k\}.$$
Среди элементов разбиения $D \setminus P = d_{i_1} \cup \dots \cup d_{i_k}$ выбирается подмножество с наименьшей нижней границей.

- ***односторонняя схема ветвления***, когда всегда выбираем последний элемент $d' = d_{i_k}$.

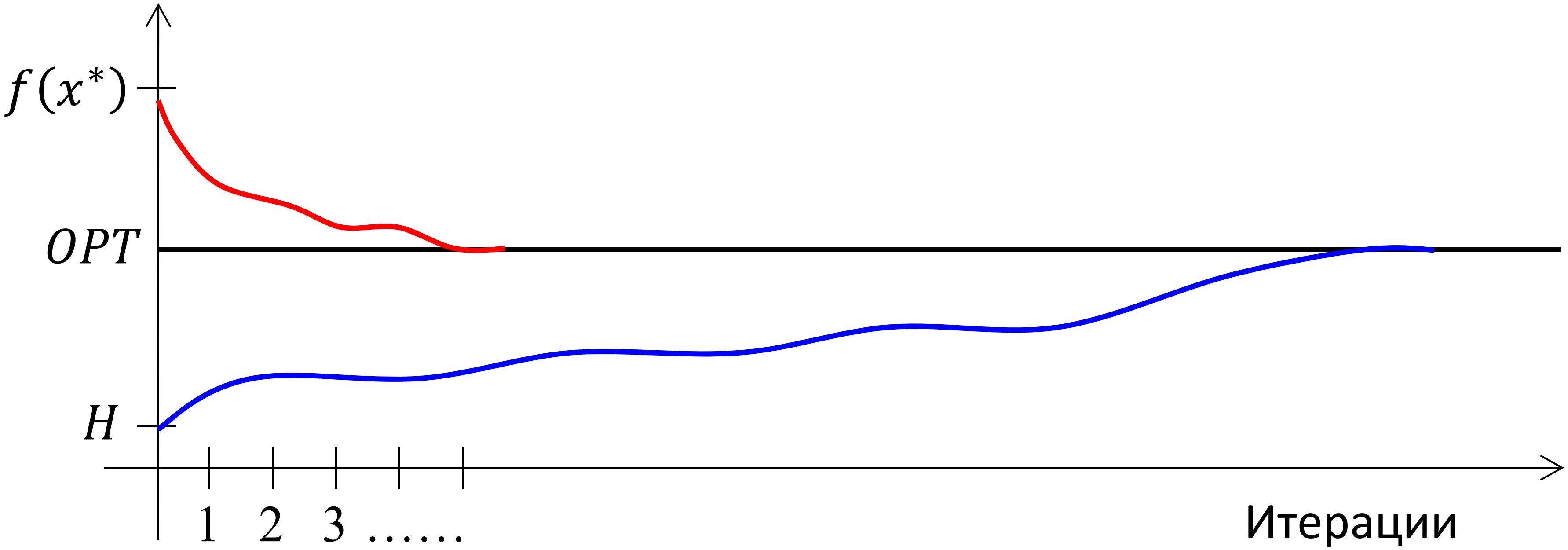
Первая схема требует много оперативной памяти, но в среднем просматривает меньше вершин, чем вторая. Возможна комбинация этих схем: сначала первая, пока хватает памяти, затем вторая.

Влияние основных элементов на трудоемкость

Верхняя оценка UB

Нижняя оценка LB

Схема ветвления и выбор переменной для ветвления



$$H = \min_{i_1,\dots,i_k} LB(d_i)$$

Задача коммивояжера в Интернет

- TSPBIB Home Page

  http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/TSPBIB_home.html

- The Hamiltonian Page: **Hamiltonian cycle and path problems, their generalizations and variations**

  http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/Hamilton.html

- Fractal Instances of the Traveling Salesman Problem

  http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/FRACTAL_TSP_home.html

- **DIMACS:** The Traveling Salesman Problem

  http://www.research.att.com/~dsj/chtsp/

Вопросы

- Метод ветвей и границ для задачи коммивояжера требует не более n^2 итераций *(Да или Нет?)*

- Метод ветвей и границ одновременно решает две задачи: найти оптимальное решение и доказать его оптимальность. Если бы первая задача была решена (угадали ответ), от метод работал бы быстрее *(Да или Нет?)*

- Чем точнее нижняя граница, тем быстрее работает метод ветвей и границ *(Да или Нет?)*

- Одностороння схема ветвления требует полиномиальной памяти *(Да или Нет?)*

- Метод ветвей и границ можно переделать в апроксимационную схему и сократить время его работы *(Да или Нет?)*