«Методы оптимизации», 2015 г.

ЛЕКЦИЯ № 2

1. Задача линейного программирования

2. Базисные допустимые решения

3. Симплекс-таблица. Симплекс-метод

4. Лексикографический симплекс-метод

Задача линейного программирования (ЛП)

Рассмотрим задачу

$$f(x) \longrightarrow \min_{x \in Q} \tag{1}$$

$$Q = \{x \mid \varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}\}, \tag{2}$$

$$x \in R^n, \tag{3}$$

где функции f, φ_i, $i = \overline{1, m}$ — линейны. Представим задачу (1)–(3) в эквивалентном виде.

Линейное программирование (ЛП)

$$w(x) = (c, x) \longrightarrow \min \tag{5}$$

$$Ax = b, \tag{6}$$

$$x \geq 0, \tag{7}$$

где:

$c = (c_j),\ x = (x_j) \in R^n,\ b = (b_i) \in R^m,$

$A = (a_{ij}) - (m \times n)$ матрица,

$m \leq n,\ rang(A) = m$.

Задача (5)–(7) называется задачей линейного программирования (ЛП) в **канонической** форме записи.

ЛП: понятие базисного допустимого решения (б.д.р.).

Систему ограничений (5) можно представить в виде:

$$\boldsymbol{Ax = b \equiv (a_i, x) = b_i,\ i = \overline{1, m}}$$

или

$$\boldsymbol{Ax = b \equiv \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b.}$$

Базис — любой набор $\boldsymbol{A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}}$ из $\boldsymbol{m}$ линейно независимых столбцов матрицы системы ограничений $\boldsymbol{A}$.

Матрица $\boldsymbol{B = [A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}]}$ называется базисной.

ЛП: понятие базисного допустимого решения (б.д.р.).

Обозначения:

$$S = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}, S' = \{1, \ldots, n\} \setminus S,$$

$$A = [B, N], \text{ где } N = [A_j]_{j \in S'}.$$

$x = (x_B, x_N)$, где $x_B = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ — базисные, а $x_N = (x_j)_{j \in S'}$ — небазисные переменные.

$$E\, x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \qquad (6')$$

Определение 3. Решение $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$ системы уравнений (6) назовем базисным (соответствующим базису B).

ЛП: понятие б.д.р.

Лемма 3. **Решение x системы (6) — базисное тогда и только тогда, когда множество столбцов с индексами из множества $S(x) = \{j | x_j \neq 0\}$ линейно независимо.**

Определение 4. **Базисным допустимым решением (б.д.р.)** называется любой элемент множества Q, являющийся базисным решением системы уравнений (6).

Замечание 2. Решение, соответствующее базису B — б.д.р. $\Longleftrightarrow B^{-1}b \geq 0$.

ЛП: Критерий разрешимости

Определение 5. Вектор $x \in Q$ — **крайняя точка или вершина** множества Q, если не существует допустимых решений $x^1 \neq x^2$ из Q таких, что $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$, где $0 < \alpha < 1$.

Теорема 3. Вектор x — б.д.р. тогда и только тогда, когда x — крайняя точка множества Q.

Теорема 4. (Критерий разрешимости.) Задача линейного программирования (5)–(7) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем. (Без доказательства)

ЛП: Критерий разрешимости

Следствие 3. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следствие 4. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\boldsymbol{x}$ – допустимое решение задачи (5–7) со значением целевой функции $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} \Leftrightarrow$ пара $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})$ – решение системы уравнений $(\mathbf{5}')$, $(\mathbf{6}')$, $(\mathbf{7})$ или системы

$$-\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N}) \boldsymbol{x}_N = -\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}, \qquad (\mathbf{5}')$$

$$\boldsymbol{E} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}, \qquad (\mathbf{6}')$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \qquad (5'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \ i = \overline{1, m}, \qquad (6'')$$

где

$$z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\bar{x}),$$
$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \ j = 1, \ldots, n,$$
$$(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$
$$(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \ \ j = 1, \ldots, n.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$
\begin{array}{c|c|cccccc|}
 & & x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\
\hline
-w & z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0j} & \cdots & z_{0n} \\
\hline
x_{\sigma(1)} & z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1j} & \cdots & z_{1n} \\
. & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{\sigma(i)} & z_{i0} & z_{i1} & \cdots & z_{ij} & \cdots & z_{in} \\
. & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{\sigma(m)} & z_{m0} & z_{m1} & \cdots & z_{mj} & \cdots & z_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$
\begin{array}{c|c|cccccccc|}
 & & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_n \\
\hline
-w & z_{00} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & z_{0m+1} & \dots & z_{0n} \\
\hline
x_1 & z_{10} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & z_{1m+1} & \dots & z_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_i & z_{i0} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & z_{im+1} & \dots & z_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_m & z_{m0} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & z_{mm+1} & \dots & z_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

z_{0j} – оценки замещения,

z_{ij} – коэффициенты замещения,

z_{i0} – значения базисных компонент текущего б.д.р.

Симплекс-таблица: признак оптимальности

Лемма 4 (признак оптимальности). Если оценки замещения неотрицательны, то текущее базисное допустимое решение $\overline{x}$ является оптимальным решением задачи (5)–(7).

Доказательство. Пусть $x \in Q$. Так как $z_{0j} \geq 0$ и $x_j \geq 0$, $j \in S'$, то из $(5')$ следует, что

$$w(x) = c_B B^{-1} b + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j \geq c_B B^{-1} b =$$

$$= w(\overline{x}) \blacksquare$$

Симплекс-таблица: признак оптимальности

Определение 6. Симплекс–таблица прямо допустима, если $z_{i0} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m.$

Базис B, соответствующий ей, также называется прямо допустимым.

Определение 7. Симплекс–таблица двойственно допустима, если $z_{0j} \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$

Базис B, соответствующий этой таблице, также называется двойственно допустимым.

Элементарное преобразование б.д.р.

$x(t), t \geq 0:$

$$\begin{aligned} x_{\sigma(i)}(t) &= \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\ x_s(t) &= t, \\ x_j(t) &= 0, j \in S' \backslash s \end{aligned} \tag{10}$$

$$\bar{t} = \frac{\overline{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is}>0,\ i\geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Элементарное преобразование с.-т.

$\alpha'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \ldots, z'_{in})$ $(i = \overline{0, m})$ строки новой симплекс– таблицы:

$$\begin{cases} \alpha'_i = \alpha_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}} \alpha_r, \; i \neq r, \\ \alpha'_r = \dfrac{1}{z_{rs}} \alpha_r. \end{cases} \qquad (11)$$

r-я строка, s-й столбец и элемент z_{rs} называются ведущими.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Соотношения (11) эквивалентны следующим

$$\begin{cases} z'_{ij} = z_{ij} - \dfrac{z_{is} z_{rj}}{z_{rs}}, \ i \neq r, \\ z'_{rj} = \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Замечание 3. Элементарные преобразования сохраняют прямо допустимость с.-т.

Симплекс-метод: идея метода

Лемма 5 (о неразрешимости). Если для номера s оценка замещения $z_{0s} < 0$ и для всех индексов i коэффициенты замещения z_{is} неположительны, то в задаче (5)–(7) не существует оптимального решения.

Симплекс-метод: идея метода

Лемма 6 (о существовании лучшей вершины). Если оценка замещения $z_{0s} < 0$ и существуют базисные переменные с коэффициентами замещения $z_{is} > 0$, то элементарное преобразование приведёт либо в вершину с меньшим значением целевой функции, либо вершина останется прежней, но изменится её базис.

Симплекс-метод

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $\boldsymbol{z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $\boldsymbol{z_{0j} \geq 0,\ j = \overline{1, n}}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $\boldsymbol{s : z_{0s} < 0,\ s \geq 1}$.

Симплекс-метод

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{\frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Лексикографический с. - м.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'' \in \boldsymbol{R}^{n+1}$.

Вектор $\boldsymbol{\alpha}'$ лексикографически больше вектора $\boldsymbol{\alpha}''$ $(\boldsymbol{\alpha}' \succ \boldsymbol{\alpha}'') \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}'' \succ \mathbf{0}$.

Симплекс-таблица *нормальна*, если каждая ее строка $\boldsymbol{\alpha}_i,\ i = 1, \ldots, m$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический с. - м.

0) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

3) Если $\{i \mid z_{is} < 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = lex\min\{\frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Сохранение нормальности с.-т. на шаге 4:

1. $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0 \Rightarrow \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r \succ 0}$
2. $\boldsymbol{z_{is} \leq 0 \Rightarrow \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_i \succeq \alpha_i \succ 0}$
3. $\boldsymbol{z_{rs} > 0 \Rightarrow z_{is}[\frac{1}{z_{is}}\alpha_i - \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r] \succ 0}$.

Лексколграфическое возрастанение 0-й строки:

$\boldsymbol{z_{0s} < 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0}$ и $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, то

$$\boldsymbol{\alpha_0 - \frac{z_{0s}}{z_{rs}}\alpha_r \succ \alpha_0.}$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.