«Методы оптимизации», 2015 г.

ЛЕКЦИЯ № 3

1. Двухфазный симплекс-метод (метод искусственного базиса)

2. Двойственная задача ЛП

3. Теоремы двойственности для линейного программирования

Двухфазный симплекс-метод

0. Построить симплекс–таблицу для задачи

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min, \tag{1}$$

$$a_i x + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1, m}; \tag{2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n+m}, \tag{3}$$

выбрав в качестве базиса $B = (A_{n+i}, \ldots, A_{n+m})$.

Двухфазный симплекс-метод

Здесь $\boldsymbol{a_i}$ — это $\boldsymbol{i}$-я строка матрицы $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1, m}})$. Так как матрица $\boldsymbol{B}$ единичная, то для построения таблицы достаточно в целевой функции $\boldsymbol{\xi}$ выразить базисные переменные (искусственный базис) $\boldsymbol{x_{n+i}}$ $(\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1, m}})$ через небазисные переменные $\boldsymbol{x_j}$ $(\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1, n}})$, используя ограничения (2). В результате получим, что

$$\boldsymbol{\xi = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i x).}$$

Двухфазный симплекс-метод

Следовательно,

$$z_{00} = -\sum_{i=1}^{m} b_i, \text{ а } z_{0j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \; j = \overline{1, n}.$$

При этом симплекс–таблица прямо допустима, а базисное допустимое решение имеет вид $x_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$, и $x_{n+i} = b_i$ $(i = \overline{1, m})$.

Двухфазный симплекс-метод

1. Проделать шаги 1–4 алгоритма симплекс–метода, описанного в подразд. 4.4.

Так как целевая функция задачи (1)–(3) ограничена снизу нулем и допустимое множество, задаваемое условиями (2)–(3), непусто, то задача (1)–(3) всегда разрешима и минимум неотрицателен. Поэтому на первом этапе вычисления могут завершиться только получением прямо и двойственно допустимого базиса. Как только такой базис будет получен, перейти к следующему пункту.

Двухфазный симплекс-метод

2. Если оптимальное решение $\boldsymbol{\xi^*} > \mathbf{0}$, то КОНЕЦ (исходная задача не имеет допустимых решений: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\emptyset}$), иначе удалить из симплекс–таблицы все столбцы, соответствующие искусственным переменным $\boldsymbol{x_j}$ $(\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}, \boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}})$, и нулевую строку.

3. Если базисными переменными являются только переменные исходной задачи $\boldsymbol{x_j}$ $(\boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n})$, то перейти на шаг 7.

4. Выбрать строку, соответствующую искусственной переменной $\boldsymbol{x_r}$ $(\boldsymbol{r} > \boldsymbol{n})$.

Двухфазный симплекс-метод

5. Если существует $z_{rs} \neq 0\,(1 \leq s \leq n)$, то выполнить элементарное преобразование базиса с ведущим элементом z_{rs} и перейти на шаг 3.

6. Если $z_{rj} = 0$ для всех $j = \overline{1, n}$, то удалить r-ю строку из симплекс–таблицы и перейти на шаг 3.

7. Добавить нулевую строку в симплекс–таблицу, записав в неё коэффициенты целевой функции основной задачи $w(x)$, выраженной через небазисные переменные. Получена прямо допустимая симплекс–таблица исходной задачи.

Двухфазный симплекс-метод

Шаги 0–7 описанного выше способа получения базисного допустимого решения обычно называют *первым этапом* симплекс–метода, а метод в целом — *двухэтапным* симплекс–методом.

Выполнение шага 6 свидетельствует о линейной зависимости уравнений $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, что позволяет удалить часть уравнений. Подобная ситуация возникает, если ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ меньше числа уравнений $\boldsymbol{m}$.

Двухфазный симплекс-метод

После выполнения шага 7 имеем прямо допустимую симплекс–таблицу исходной задачи, т. е. завершён $\mathbf{0}$-й шаг алгоритма подразд. 4.4. и можно переходить к его шагам 1–4. В результате либо установим, что целевая функция $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ не ограничена снизу, либо получим оптимальное решение.

Двойственная задача ЛП

Задача линейного программирования (ЛП) в канонической форме записи:

$$\boldsymbol{w(x) = (c, x) \longrightarrow \min} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{Ax = b,} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{x \geq 0,} \tag{7}$$

где:

$\boldsymbol{c = (c_j),\ x = (x_j) \in R^n,\ b = (b_i) \in R^m,}$

$\boldsymbol{A = (a_{ij}) - (m \times n)}$ матрица,

$\boldsymbol{m \leq n,\ rang(A) = m}$.

ЛП: двойственная задача

Задача $(\mathbf{5})$ — $(\mathbf{7})$ эквивалентна задаче

$$(c, x) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} (a_i, x) - b_i &\le 0, && \lambda_i^1 \ge 0 \\ -(a_i, x) + b_i &\le 0, && \lambda_i^2 \ge 0 \\ -x_j &\le 0. && \mu_j \ge 0 \end{aligned}$$

Ее функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda^1, \lambda^2, \mu) = (c, x) + (\lambda^1, Ax - b) + (\lambda^2, -Ax + b) + (\mu, -x) =$$

$$= \Big(c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu, x\Big) - (\lambda^1 - \lambda^2, b).$$

Следовательно, целевая функция двойственной задачи имеет вид:

ЛП: двойственная задача

$$h(\lambda^1, \lambda^2, \mu) = \inf_x L(x, \lambda^1, \lambda^2, \mu) =$$

$$= \begin{cases} -(b, \lambda^1 - \lambda^2), & \text{если } c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \Longrightarrow$$

Двойственная задача

$$h(\lambda^1, \lambda^2, \mu) \longrightarrow \sup_{\lambda^1 \geq 0, \lambda^2 \geq 0, \mu \geq 0},$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(b, \lambda^1 - \lambda^2) \longrightarrow \max$$

$$c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu = 0 \equiv c + (\lambda^1 - \lambda^2)A \geq 0.$$

Умножим ограничения на -1, обозначим $y = -(\lambda^1 - \lambda^2)$

ЛП: двойственная задача

Получим

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \max \tag{8}$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}. \tag{9}$$

Замечание 1. Для задач (5)-(7) и (8)-(9) выполняются все утверждения: л. 1, л. 2, теор. 1, следствия 1 — 2.

Теорема 2. Задача двойственная к задаче (8)-(9) совпадает с исходной задачей (5)-(7).

Доказательство. Задача (8)-(9) эквивалентна задаче

$$-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \min$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}.$$

ЛП: двойственная задача

$$\boldsymbol{yA \le c} \equiv \text{системе неравенств } (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A_j}) - \boldsymbol{c_j} \le \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x_j \ge 0}$$

(сопоставили каждому ограничению двойственную переменную (множитель Лагранжа))

Функция Лагранжа:

$$\boldsymbol{L(y, x) = -(b, y) + (x, yA - c) =}$$

$$\boldsymbol{-(b, y) + (Ax, y) - (x, c) = (Ax - b, y) - (c, x).}$$

Целевая функция двойственной задачи

$$\boldsymbol{h(x) = \inf_{y} L(y, x) =}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{-(c, x)}, & \text{если } \boldsymbol{Ax = b}, \\ \boldsymbol{-\infty}, & \text{иначе.} \end{cases} \Longrightarrow$$

ЛП: двойственная задача

Задача

$$\max_{x \geq 0} h(x)$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(c, x) \longrightarrow \max$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

или

$$\min(c, x)$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0. \quad \blacksquare$$

ЛП: двойственная задача

Прямая задача		Двойственная задача
$w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$		$z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$a_i x \geq b_i$	$i \in I_1$	$y_i \geq 0$
$a_i x = b_i$	$i \in I_2$	y_i — своб.
$x_j \geq 0$	$j \in J_1$	$yA_j \leq c_j$
x_j — своб.	$j \in J_2$	$yA_j = c_j$.

Упражнение. Техника получения этой схемы: либо повторить выкладки, приведшие к задаче (8), (9), либо воспользоваться сводимостью общей задачи ЛП к задаче ЛП в канонической форме и применить готовый рецепт (задача (8), (9)).

Первая теорема двойственности

Теорема 5 (Первая теорема двойственности). Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одноврем
но неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.

Вторая теорема двойственности

Теорема 6 (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). **Допустимые решения $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:**

$$y_i(a_i x - b_i) = 0 \ (i \in I),$$

$$(c_j - yA_j)x_j = 0 \ (j \in J).$$