

ЛЕКЦИЯ № 5

Методы решения конечномерных задач оптимизации (Задачи условной оптимизации)

1. Метод Келли

2. Методы штрафных функций

2.1. Метод внешних штрафов

2.2. Метод внутренних штрафов

МЕТОД КЕЛЛИ

$$(c, x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \longrightarrow \min$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}.$$

Пусть в задаче существует оптимальное решение x^* , которое содержится в многогранном множестве $Q_0 = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$, а также $Q \subseteq Q_0$.

МЕТОД КЕЛЛИ = (ВНЕШНЯЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ/РЕЛАКСАЦИЯ)

Итерация k .

Шаг 1. Решаем задачу ЛП

$$(c, x) \longrightarrow \min$$

$$x \in Q^k,$$

где Q^k – текущее многогранное приближение множества Q , $Q \subseteq Q^k$.

Пусть x^k – оптимальное решение этой задачи.

МЕТОД КЕЛЛИ

Если x^k – допустимое решение исходной задачи, то оно его оптимальное решение. Конец работы алгоритма. Иначе переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Найдём номер i_k ограничения, для которого величина $\varphi_{i_k}(x^k) > 0$ максимальна. Перейдём к выполнению следующей итерации с

$$Q^{k+1} = Q^k \cap \{x | \varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq 0.\}$$

МЕТОД КЕЛЛИ

Корректность определения множества Q^{k+1} .

1. Т.к. ограничение $\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq 0$ линейно, то множество Q^{k+1} является многогранным.

2. Т.к. множество Q^k и функция φ_{i_k} выпуклые, то

$$\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq \varphi_{i_k}(x)$$

для всех $x \in Q^k$ (Лемма 8, лек. № 4) $\implies Q \subseteq Q^{k+1}$.

МЕТОД КЕЛЛИ

(Другими словами ограничение

$$\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) = 0$$

является отсечением, которое отсекает точку x^k .)

Если алгоритм останавливается через конечное число шагов, то текущее приближение – оптимальное решение задачи. Рассмотрим случай, когда последовательность $\{x^k\}$ бесконечна.

МЕТОД КЕЛЛИ

Теорема 12. Любая предельная точка последовательности $\{x^k\}$, порождённая методом секущих плоскостей, есть оптимальное решение задачи.

Доказательство. Последовательность $\{(c, x^k)\}$ монотонно неубывающая и ограничена сверху (т.к. существует оптимальное решение). Поэтому без ограничения общности считаем, что последовательность $\{x^k\}$ ограничена. Тогда считаем, что последовательность $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится и $\bar{x}$ — её предел.

МЕТОД КЕЛЛИ

Выберем произвольное ограничение с номером i . Пусть $\{x^k\}_{k \in T}$, где $T \subseteq N$, — подпоследовательность элементов, для которых текущая плоскость порождалась с помощью i -го ограничения. Возможны два случая.

МЕТОД КЕЛЛИ

1. Найдётся номер k_0 такой, что $\varphi_i(x^k) \leq 0$ для всех $k \geq k_0$. Тогда

$$\varphi_i(x^k) \longrightarrow \varphi_i(\bar{x}) \leq 0.$$

Либо

2. Подпоследовательность $\{x^k\}_{k \in T}$ бесконечна. Тогда для любого $k' > k$

$$\varphi_i(x^k) + (\varphi'_i(x^k), x^{k'} - x^k) \leq 0.$$

МЕТОД КЕЛЛИ

Следовательно,

$$\varphi_i(x^k) \leq \|\varphi'_i(x^k)\| \|x^{k'} - x^k\|.$$

Т.к. $\|x^{k'} - x^k\| \longrightarrow 0$ (из-за сходимости последовательности), $\|\varphi'_i(x^k)\| \longrightarrow \|\varphi'_i(\bar{x})\|$ ($\varphi_i \in C^1(R^n)$).

Таким образом

$$\varphi_i(x^k) \longrightarrow \varphi_i(\bar{x}) \leq 0.$$

МЕТОД КЕЛЛИ

Следовательно, $\bar{x}$ – допустимое решение задачи (в силу произвольного выбора i). Но для любого k имеем $(c, x^k) \leq (c, x^*) \implies (c, \bar{x}) \leq (c, x^*)$. Т.е. $\bar{x}$ – оптимальное решение задачи. ■

МЕТОД ШТРАФОВ

$$\min f(x)$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим нелинейную функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(\varphi_i(x)),$$

где для каждого i выполняется $\lambda_i(\varphi_i(x)) = 0$, если $\varphi_i(x) \leq 0$ и $\lambda_i(\varphi_i(x)) = +\infty$ иначе. Очевидно, что исходная задача эквивалентна задаче

$$\min_x L(x, \lambda)$$

ИДЕЯ МЕТОДА ВНЕШНИХ ШТРАФОВ

Свести решение задачи

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in Q} \quad (1)$$

$$Q = \{x \in R^n \mid \varphi_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, m\} \quad (2)$$

к решению последовательности задач минимизации

$$F_k(x) = f(x) + P_k(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}, \ k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

где $P_k(x)$ — штрафная функция множества Q .

МЕТОД ВНЕШНИХ ШТРАФОВ

Определение. Функция $P_k(x)$ называется штрафной функцией множества Q , если $P_k(x) \geq 0$ для любых $k = 1, 2, \dots$, $x \in R^n$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in Q \\ +\infty, & \text{если } x \notin Q, \end{cases}$$

где $P_k(x) = kH(x)$, k – коэффициент штрафа,

МЕТОД ВНЕШНИХ ШТРАФОВ

$$H(x) = \sum_{i=1}^m [\varphi_i(x)]_+^2 \text{ или } H(x) = \sum_{i=1}^m [\varphi_i(x)]_+ \\ ([a]_+ = \max(0, a)).$$

МЕТОД ВНЕШНИХ ШТРАФОВ

Пусть $x^l = x(k_l)$ – оптимальное решение задачи без ограничений (5) на шаге l .

Шаг $l+1$. Найти решение задачи (5) с коэффициентом штрафа $k_{l+1} > k_l$. Если $H(x^{l+1}) \leq \epsilon$, то алгоритм завершает работу, иначе перейти на следующий шаг.

МЕТОД ВНЕШНИХ ШТРАФОВ

Соглашения:

1. функция $H : R^n \longrightarrow R$ непрерывна и $H(x) \geq 0, \forall x \in R^n$,

2. $H(x) = 0 \iff x \in Q = \{x | \varphi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$

3. f — непрерывная функция, а множество Q замкнуто

МЕТОД ВНЕШНИХ ШТРАФОВ

Теорема 13. Пусть выполняется одно из двух условий:

(а). $f(x_k) \longrightarrow +\infty$ для любой последовательности $\{x_k\} \in Q$, $\|x_k\| \longrightarrow +\infty$ или

(б). Q ограничено и $H(x_k) \longrightarrow +\infty$ для любой последовательности $\{x_k\}$, $\|x_k\| \longrightarrow +\infty$

Тогда 1). последовательность x^l имеет хотя бы одну предельную точку и любая предельная точка этой последовательности есть оптимальное решение задачи; 2). $H(x^l) \longrightarrow 0$

МЕТОД ВНУТРЕННИХ ШТРАФОВ ИЛИ МЕТОД БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Проблема метода внешних штрафов: приближения $x^1 = x^1(k_1), x^2 = x^2(k_2), \dots, x^l = x^l(k_l), \dots$

не являются допустимыми решениями задачи $\implies$ попробуем аппроксимировать оптимум изнутри.

Идея метода, как и ранее, заключается в сведении исходной задачи (1)–(2) к последовательности задач минимизации следующего вида:

$$F_k(x) = f(x) + a_k B(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

где $B(x)$ — барьерная функция, $a_k > 0$ — барьерный коэффициент, $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Определение. Функция $B(x)$ называется барьерной функцией для множества Q , если $B(x)$ определена, конечна и неотрицательна во всех точках из $\text{Int}Q$ и

$$\lim_{x \rightarrow \partial Q} B(x) = +\infty.$$

Соглашение: $B(x) = +\infty$, для $x \in \partial Q$ (граница множества).

Примеры барьерных функций:

$$-\sum_{i=1}^m \varphi_i(x)^{-1}, \sum_{i=1}^m |\varphi_i(x)|^{-1}, \sum_{i=1}^m |\varphi_i(x)|^{-2}.$$

Соглашение: Задачу (6) решаем методом градиентов: $x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x_k)$, $\alpha_k \geq 0$.

Если $x^k \in \text{Int}Q$, то при достаточно малом α_k $x^{k+1} \in \text{Int}Q$.

Таким образом, если $x^0 \in \text{Int}Q$, то из определения следует, что все приближения x^k – допустимые решения (1)-(2)

ИДЕЯ МЕТОДА

Пусть x^k — решение задачи (6) на шаге k и $x^k \in \text{Int}Q$.

Итерация $(k+1)$. Находим решение задачи (6) со значением барьерного коэффициента $a_{k+1} < a_k$. Если $a_{k+1}B(x^{k+1}) \leq \epsilon$, то алгоритм завершает работу. Иначе начинаем новую итерацию.

Соглашения:

1. Q замкнуто;
2. $\text{Int}Q \neq \emptyset$;
3. любая точка $x \in Q$ есть предел последовательности точек из внутреннейности Q ;
4. f — непрерывная функция на всем R^n ;
5. функция $B(x)$ непрерывна на множестве $\text{Int}Q$.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 14. Пусть выполняется одно из двух условий:

- (а). $f(x_k) \longrightarrow +\infty$ для любой последовательности $\{x_k\} \in Q$, $\|x_k\| \longrightarrow +\infty$ или
- (б). Q ограничено.

Тогда 1) последовательность x^k имеет хотя бы одну предельную точку и любая предельная точка этой последовательности есть оптимальное решение задачи; 2) $a_k B(x^k) \longrightarrow 0$