

# ЛЕКЦИЯ № 7

[www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Opt\\_FIT\\_2015.html](http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Opt_FIT_2015.html)

1. Целочисленное линейное программирование

2. Метод ветвей и границ

## Задача ЦЛП

Задача Линейного программирования (ЛП):

$$\min\{(c, x) | x \in Q\}.$$

Задача Целочисленного линейного программирования (ЦЛП):

$$\min\{(c, x) | x \in Q \cap Z\}.$$

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ (идея)

Рассмотрим задачу:

$$\min\{f(x) | x \in Q\}$$

1. Множество  $Q$  должно быть разложимым, т.е. существует конечное разбиение на атомарные подмножества.

2. Заданы функции:  $x(d)$  – "наилучшее" решение,  $b(d)$  – ветвления и  $H(d)$  – нижняя граница.

$$H(d) \leq \min_{x \in d} f(x)$$

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ (идея)

Функция  $H(d)$  — невозрастающая, то есть такая, что  $H(d_1) \geq H(d_2)$ , если  $d_1 \subseteq d_2$ .

3. Задан рекорд  $x_0$  — "наилучшее" найденное допустимое решение.

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Пусть к очередному шагу имеется разбиение  $t_1, \dots, t_L$  множества непроверенных решений и рекорд  $x^0$ . На первом шаге имеем  $t_1 = Q$ ,  $x^0$  – произвольный элемент множества  $Q$ .

**Описание текущего шага.** Проверка элементов разбиения:

множество  $t_l$  проверено и отбрасывается если  
или

$$1) H(t_l) \geq f(x^0),$$

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

или

2) функция  $x(d)$  определена на множестве  $t_l$ .

причём, если

$$f(x(t_l)) < f(x^0),$$

то устанавливается новое значение рекорда  $x^0 = x(t_l)$ .

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Если отброшенными оказываются все элементы разбиения, то алгоритм заканчивает работу и  $x^0$  – решение, найденное в результате его работы.

Пусть  $t'_1, \dots, t'_{L'}$ ,  $0 < L' \leq L$  – множества, не отброшенные в результате проверок. Выберем среди них некоторое "перспективное" подмножество  $t'_{l_0}$ .

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Применим к нему функцию ветвления  $b(d)$ , в результате чего получим его разбиение  $d_1, \dots, d_N$  и в целом новое разбиение

$$t'_1, \dots, t'_{l_0-1}, d_1, \dots, d_N, t'_{l_0+1}, \dots, t'_{L'}$$

множества неотброшенных решений.

После этого начинается следующий шаг.

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Конечность алгоритма:

1. На любом шаге множество непросмотренных решений – объединение конечного числа разложимых подмножеств.
2. На каждом шаге алгоритма хотя бы один элемент разбиения либо отбрасывается, либо разбивается на подмножества, каждое из которых состоит из меньшего числа атомарных множеств.
3. Атомарные множества всегда отбрасываются.

# МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

При разработке алгоритма МВиГ необходимо конкретизировать следующие элементы общей схемы:

- атомарные множества решений;
- способ задания подмножеств решений;
- функцию ветвления;
- способ вычисления нижней границы;
- функцию выбора наилучшего решения;
- правило выбора перспективного элемента разбиения.

## Пример решения ЦЛП

Пример решения задачи ЦЛП

$$\min\{(c, x) | x \in Q \cap Z\} :$$

- 1) Ветвление:  $x_i \leq x_i^0$  или  $x_i \geq x_i^0 + 1$ ;
- 2) Нижняя граница – решение соответствующей задачи ЛП (отказ от ограничения целочисленности);
- 3) Атомарное множество – произвольное допустимое решение.