

# ЛЕКЦИЯ № 2

## Линейное программирование

1. Базисные допустимые решения
2. Критерий разрешимости

### Симплекс-метод (С.-м.)

1. Идея метода

## Линейное программирование (ЛП)

Задача линейного программирования (ЛП) в канонической форме:

$$w(x) = (c, x) \longrightarrow \min \quad (5)$$

$$Ax = b, \quad (6)$$

$$x \geq 0, \quad (7)$$

где  $c = (c_j)$ ,  $x = (x_j) \in R^n$ ,  $A = (a_{ij})$  —  $(m \times n)$  матрица,  $b = (b_i) \in R^m$ ,  $m \leq n$ ,  $\text{rang}(A) = m$ .

$$Ax = b \equiv (a_i, x) = b_i, i = \overline{1, m},$$

$$Ax = b \equiv \sum_{j=1}^n A_j x_j = b.$$

## Линейное программирование (ЛП)

Произвольная задача линейного программирования:

$$w(x) = (c, x) \longrightarrow \min(\max)$$

$$(a_i, x) \leq b_i, i \in I_1;$$

$$(a_i, x) = b_i, i \in I_2;$$

$$x_j \geq 0, j \in J_1;$$

$$x_j - \text{свободное}, j \in J_2.$$

**Замечание 2:** любую задачу ЛП можно свести к эквивалентной задаче ЛП в канонической форме:

$$1) (a_i, x) \leq b_i \Leftrightarrow (a_i, x) + y = b_i, i \in I_1; y \geq 0,$$

$$2) x_j - \text{свободное} \Leftrightarrow x_j + y_1 - y_2 = 0; y_1, y_2 \geq 0,$$

$$3) (c, x) \longrightarrow \max \Leftrightarrow -(c, x) \longrightarrow \min$$

## ЛП: понятие базисного допустимого решения (б.д.р.).

Базис — любой набор  $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$  из  $m$  линейно независимых столбцов матрицы системы ограничений  $A$ .

Матрица  $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$  называется базисной.

Обозначения:

$$S = \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}, S' = \{1, \dots, n\} \setminus S, A = [B, N],$$

где  $N = [A_j]_{j \in S'}$ ,  $x = (x_B, x_N)$ ,  $x_B = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$  — базисные, а  $x_N = (x_j)_{j \in S'}$  — небазисные переменные.

$$E x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \quad (6')$$

Определение 3. Решение  $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$  системы уравнений (6) назовем базисным (соответствующим базису  $B$ ).

## ЛП: понятие б.д.р.

**Лемма 3.** Вектор  $x$  — базисное решение системы (6) тогда и только тогда, когда множество столбцов с индексами из множества  $S(x) = \{j | x_j \neq 0\}$  — линейно независимо.

Док-во: Дополним столбцы с индексами из  $S(x)$  до базиса. ■

**Определение 4.** Базисным допустимым решением (б.д.р.) называется любой элемент множества  $Q$ , являющийся базисным решением системы уравнений (6).

**Замечание 3.** Решение соответствующее базису  $B$  — б.д.р.  $\iff B^{-1}b \geq 0$ .

## ЛП: понятие б.д.р.

**Определение 5.** Вектор  $x \in Q$  — крайняя точка или вершина множества  $Q$ , если не существует допустимых решений  $x^1 \neq x^2$  из  $Q$  таких, что  $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$ , где  $0 < \alpha < 1$ .

**Теорема 2.** Вектор  $x$  — б.д.р. тогда и только тогда, когда  $x$  — крайняя точка множества  $Q$ .

**Доказательство.** Пусть  $x$  — крайняя точка, но не б.д.р. Из леммы 3  $\implies$

$$\exists y \neq 0 : Ay = 0, \quad (*)$$

при этом  $(x_j = 0 \implies y_j = 0) \implies$

$$\{j | y_j \neq 0\} \subseteq \{j | x_j > 0\}. \quad (**)$$

## ЛП: понятие б.д.р.

Т.к.  $x \in Q$ , то из (\*)  $\implies$

$$\forall t \in R : z(t) = x + t y \text{ — решение (6),}$$

тогда из (\*\*) $\implies$

$$\forall \text{ малого } t \in R : z(t) \in Q.$$

$\implies$

$$\exists \varepsilon > 0 : x^1 = x + \varepsilon y \in Q, x^2 = x - \varepsilon y \in Q,$$

$\implies$

$$x^1 \neq x^2 \text{ и } x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \implies x \text{ не крайняя точка — противоречие } \implies$$

$x$  — б.д.р.

## ЛП: понятие б.д.р.

Пусть  $x$  — б.д.р., но

$$\exists 0 < \alpha < 1, \exists x^1 \neq x^2, x^1, x^2 \in Q : x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2.$$

По условию  $Ax^1 = Ax^2 (= b) \implies A(x^1 - x^2) = 0$ , но

$$A(x^1 - x^2) = 0 \iff \{A_j | x_j^1 \neq x_j^2\} \text{ — линейно зависимо} \implies$$

$$\{A_j | \alpha x_j^1 + (1 - \alpha)x_j^2 > 0\} \text{ — линейно зависимо} \implies$$

$\{A_j | x_j > 0\}$  — линейно зависимо  $\implies x$  не б.д.р. — противоречие,

т.е. если  $x$  — б.д.р., то  $x$  — крайняя точка множества  $Q$ . ■

## ЛП: Критерий разрешимости

**Теорема 3 (Критерий разрешимости).** Задача линейного программирования (5)-(7) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем.

**Следствие 3.** Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

**Следствие 4.** Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.

## Определение грани множества $Q$

Пусть  $S' \cup S = \{1, \dots, n\}$ ,  $S' \cap S = \emptyset$ . Множество решений системы уравнений

$$Ax = b, x_j = 0, j \in S', x_j \geq 0, j \in S,$$

называется гранью множества допустимых решений (6)-(7).

## Определение грани множества $Q$

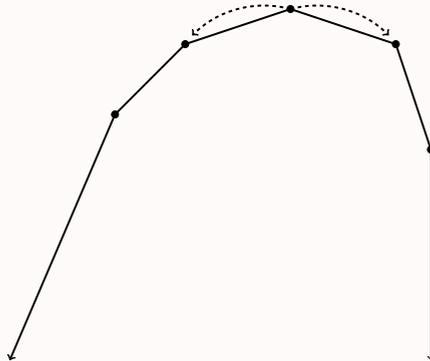
Величина  $n - m - |S'|$  — размерность данной грани (здесь  $m + |S'|$  — ранг системы уравнений).

Так как  $\bar{x}$  — б.д.р., то  $|S'| = n - m$ , следовательно,  $\bar{x}$  — грань размерности 0.

Если  $|S'| = n - m - 1$ , то получим грань размерности 1, т.е. ребро: ограниченное или неограниченное.

# Идея симплекс-метода

- 1) Разумно упорядоченный перебор вершин множества  $Q$  (б.д.р.);
- 2) Переход от одной вершины к другой по ребру.



## Идея симплекс-метода

Пусть  $\bar{x}$  — б.д.р.,  $B = (A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)})$  — базисная матрица. Тогда

$$Ex_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \quad (6')$$

следовательно

$$Ex_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, \text{ и}$$
$$w(x) = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N, \quad (5')$$

## Идея симплекс-метода

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

Величины  $z_{0j}$  называются оценками замещения. Знак оценки замещения определяет характер изменения целевой функции при движении по ребру.

$$(z_{10}, \dots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \dots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

## Элементарное преобразование б.д.р.

$x(t), t \geq 0 :$

$$\begin{aligned}x_{\sigma(i)}(t) &= \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\x_s(t) &= t, \\x_j(t) &= 0, j \in S' \setminus s\end{aligned}\tag{8}$$

Лемма 4 (признак оптимальности). Если оценки замещения неотрицательны, то текущее базисное допустимое решение  $\bar{x}$  является оптимальным решением задачи (5)–(7).

Пусть  $x \in Q$ . Так как  $z_{0j} \geq 0$  и  $x_j \geq 0$ ,  $j \in S'$ , то из (5') следует, что

$$\begin{aligned} w(x) &= c_B B^{-1} b + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j \geq c_B B^{-1} b = \\ &= w(\bar{x}) \blacksquare \end{aligned}$$

## Идея симплекс-метода

Лемма 5 (о неразрешимости). Если для номера  $s$  оценка замещения  $z_{0s} < 0$  и для всех индексов  $i$  коэффициенты замещения  $z_{is}$  неположительны, то в задаче (5)–(7) не существует оптимального решения.

## Идея симплекс-метода

Лемма 6 (о существовании лучшей вершины). Если оценка замещения  $z_{0s} < 0$  и существуют базисные переменные с коэффициентами замещения  $z_{is} > 0$ , то элементарное преобразование приведёт либо в вершину с меньшим значением целевой функции, либо вершина останется прежней, но изменится её базис.

## Идея симплекс-метода

Пусть

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is} > 0, i \geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Предположим, что  $\bar{t} > 0$ . Тогда

$$\forall i \forall t < \bar{t} : x_{\sigma(i)}(t) = \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t > 0,$$

$$x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = 0 \text{ и для } \forall t > \bar{t} \text{ имеем } x_{\sigma(r)}(t) < 0 \\ \implies$$

## Идея симплекс-метода

Семейство векторов  $\mathbf{x}(t)$ ,  $0 \leq t \leq \bar{t}$  – ограниченное ребро множества  $Q$ .

Вектор  $\mathbf{x}(\bar{t})$  – б.д.р.:

$$(z_{1s}, \dots, z_{ms})^\top = B^{-1} A_s \iff$$

$$A_s = B(z_{1s}, \dots, z_{ms})^\top \iff$$

$$A_s = \sum_{i=1}^m z_{is} A_{\sigma(i)} \quad (\text{отсюда и условия}) \quad z_{rs} > 0$$

следует, что матрица  $B'$  со столбцами

## Идея симплекс-метода

$[A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$   
невырождена.

Следовательно  $B'$  – базис б.д.р.  $x(\bar{t})$ . Т.к.

$$\forall t, 0 < t \leq \bar{t}, w(x(t)) = -z_{00} + z_{0s}t < -z_{00},$$

то  $x(\bar{t})$  – искомое б.д.р. с меньшим значением целевой функции.

## Идея симплекс-метода

Пусть  $\bar{t} = \mathbf{0}$ . В силу выбора  $r : x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = x_{\sigma(r)}(\mathbf{0}) = \bar{x}_{\sigma(i)} = z_{r0} = 0$ .

Т.к.  $z_{rs} > 0$ , то матрица  $B'$  со столбцами

$[A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$

снова невырождена. Следовательно  $B'$  – другой базис вершины  $\bar{x}$ . ■