ЛЕКЦИЯ № 5

Необходимые условия экстремума

1. Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера
2. Критерий оптимальности (выпуклый случай)

Лекция 4:

Теорема 7 (Фаркаша–Минковского). Система уравнений $\boldsymbol{Ax = b, x \geq 0}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $\boldsymbol{(b, y) \leq 0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA \leq 0}$.

Следствие 3. **Система уравнений $\boldsymbol{Ax \leq b}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $\boldsymbol{(b, y) \geq 0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA = 0, y \geq 0}$.**

Следствие 4 (теорема Гордана). **Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:**

1. **Разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax < 0}$;**
2. **существует такой $\boldsymbol{\neq 0}$ вектор $\boldsymbol{y}$, что $\boldsymbol{yA = 0, y \geq 0}$.**

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

Найти:

$$\min f(x) \tag{1}$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Здесь $f, \varphi_i : R^n \longrightarrow R$ и $f, \varphi_i \in C^1$.

Определение 8. Направление $s \neq 0$ называется возможным в точке $x \in Q$, если существует такое число $\overline{\beta} > 0$, что $x + \beta s \in Q, \ \forall \beta \in [0, \overline{\beta}]$.

Комментарий

Множество $\boldsymbol{K}$ называется конусом, если $\forall\ \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ и $\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}$ имеем $\boldsymbol{\lambda x} \in \boldsymbol{K}$.

Очевидно, что множество возможных направлений в точке $\boldsymbol{x}$ образует конус, который обозначим как $\boldsymbol{K_f}(\boldsymbol{x})$.

Ограничение $\boldsymbol{\varphi_i}$ называется **активным** в точке $\boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{\varphi_i(x) = 0}$. $\boldsymbol{I(x)}$ – множество номеров ограничений активных в данной точке.

Лемма 7. Если вектор $\boldsymbol{s \neq 0}$ удовлетворяет системе

$$(\varphi_i'(x), s) + \sigma \leq 0, i \in I(x),$$

при некотором $\boldsymbol{\sigma > 0}$, то направление $\boldsymbol{s}$ является возможным в точке $\boldsymbol{x}$.

Доказательство. Считаем, что $\boldsymbol{I(x) \neq \varnothing}$ (т.к. иначе любое направление $\boldsymbol{s \neq 0}$ является возможным)

Если $i \notin I(x)$, то малое перемещение не нарушает строгое ограничение $\varphi_i(x) < 0 \Longrightarrow$ найдется подходящее $\overline{\beta_i}$.

Пусть $i \in I(x) (\equiv \varphi_i(x) = 0)$. Далее рассуждаем от противного. Допустим, что $\varphi_i(x+\beta s) > 0$, для достаточно малых $\beta > 0 \Longrightarrow$
$\varphi_i(x+\beta s)/\beta = (\varphi_i(x+\beta s) - \varphi_i(x))/\beta \longrightarrow$
$\longrightarrow (\varphi_i^{\prime}(x), s) \geq 0$ (при $\beta \to 0$).

Противоречие. Т.к. по условиям леммы

$(\varphi_i^{\prime}(x), s) < 0$, $\blacksquare$

Комментарий

Пусть $\boldsymbol{K_<(x) = \{s | s \neq 0}$ и $\boldsymbol{(\varphi_i'(x), s) < 0, \forall\ i \in I(x)\}.}$ Множество $\boldsymbol{K_<(x)}$ конус.

Лемма 7 утверждает, что конус $\boldsymbol{K_<(x)}$ является подмножеством конуса $\boldsymbol{K_f(x)}$.

Поэтому назовем конус $\boldsymbol{K_<(x)}$ конусом внутренней аппроксимации конуса $\boldsymbol{K_f(x)}$.

Теорема о замыкании конуса возможных направлений

$$K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 | (\varphi_i'(x), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x)\}.$$

Т.к. $K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x)$, то конус $K_{\leq}(x)$ называется внешней аппроксимацией конуса возможных направлений.

Теорема 7 (о замыкании конуса возможных направлений).

Если $K_{<}(x) \neq \emptyset$, то $\overline{K}_f(x) = K_{\leq}(x)$.

Доказательство. Действительно, пусть конус $K_{<}(x)$ не пуст. Тогда найдётся $\overline{s}$ такой, что

$$(\varphi_i'(x), \overline{s}) < 0, \forall\, i \in I(x).$$

Пусть $s \in K_{\leq}(x)$, т.е.

$$(\varphi_i'(x), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x).$$

Очевидно, что для любого $\lambda \in [0, 1)$:

$$\lambda s + (1 - \lambda)\overline{s} \in K_{<}(x).$$

Таким образом $\boldsymbol{s}$ предел последовательности направлений из $\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{\lambda}$ стремящимся к 1 снизу. Учитывая, что

$$\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}),$$

получим $\overline{\boldsymbol{K}}_<(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x})$.

Т.к.

$$\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_f(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}),$$

то

$$\overline{\boldsymbol{K}}_f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{s} \neq 0 | (\varphi_i'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}) \leq \mathbf{0}, \forall\, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})\}. \blacksquare$$

Теорема 8 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера). Пусть x^* — локальный экстремум задачи (1), (2), функции f, $\varphi_i, i = \overline{1, m}$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы и вектора $\varphi_i'(x^*), i \in I(x^*)$, линейно независимы. Тогда найдутся такие множители $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*), \qquad (3)$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \qquad (4)$$

Доказательство.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

Так как x^* — локальный минимум задачи (1), (2), то

$\forall s \neq 0$, если $s \in K_f(x^*)$, то выполняется неравенство $(f'(x), s) \geq 0$.

Т.к. $f \in C^1$, то

$\forall s \neq 0$, если $s \in \overline{K_f}(x^*)$, то выполняется неравенство $(f'(x), s) \geq 0$.

Линейная независимость градиентов активных ограничений $\varphi_i'(x^*), i \in I(x^*)$ означает, что не существует таких ненулевых коэффициентов λ_i, $i \in I(x^*)$, что

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0.$$

Отсюда при помощи теоремы Гордана (след-е теор. Ф.–М.) выводим, что найдется такой ненулевой вектор s, что

$$(\varphi_i'(x^*), s) < 0, \forall\, i \in I(x^*).$$

Т.е. конус $K_<(x^*)$ является не пустым. Следовательно

$$\overline{K}_f(x^*) = \{s \neq 0 | (\varphi_i'(x^*), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x^*)\}.$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

Итак имеем, что

$\forall \boldsymbol{s} \neq \mathbf{0}$, если $(\varphi_i'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{s}) \leq \mathbf{0}, \forall\ \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)$, то выполняется неравенство $(-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}) \leq \mathbf{0}$.

Тогда по теореме Фаркаша-Минковского $\exists$ неотрицательное решение системы уравнений:

$$-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)} \boldsymbol{\lambda}_i \varphi_i'(\boldsymbol{x}^*), \tag{3}$$

Положим $\boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}, \boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)$ и получим

$$-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\lambda}_i \varphi_i'(\boldsymbol{x}^*), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \varphi_i(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}, \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{m}}. \tag{4}$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Задача (1), (2) называется задачей выпуклого программирования, если функции f, $\varphi_i, i = \overline{1, m},$ — выпуклы.

Множество Q выпукло. По прежнему считаем, что f, $\varphi_i \in C^1$.

Условие регулярности для выпуклого случая:

$$\forall i, i = \overline{1, m}, \ \exists x^i \in Q : \varphi_i(x^i) < 0.$$

Эквивалентно условию регулярности Слейтера

$$\exists \widetilde{x} \in Q : \varphi_i(\widetilde{x}) < 0, i = \overline{1, m}.$$

Лемма 8. Функция f дифференцируемая на выпуклом множестве Q, выпукла в том и только в том случае, когда для любых $x, y \in Q$: $(f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x)$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Лемма 9. Если

$$\boldsymbol{Q = \{x | \varphi_i(x) = (a_i, x) - b_i \leq 0, i = \overline{1, m}\},}$$

то условия

$$\boldsymbol{(a_i, s) \leq 0, i \in I(x^*)}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы направление $\boldsymbol{s}$ было возможным в точке $\boldsymbol{x^* \in Q}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\beta > 0}$. Рассмотрим

$$\boldsymbol{\varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = (a_i, x^*) - b_i + \beta(a_i, s).}$$

$$\boldsymbol{\forall i \notin I(x^*)\ (a_i, x^*) - b_i < 0 \Rightarrow \forall i \notin I(x^*)\ \varphi_i(x^* + \beta s) \leq 0,}$$

для достаточно малых $\boldsymbol{\beta}$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$\forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)\ \varphi_i(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\beta s}) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\beta s}) - \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{s}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\beta s} \in \boldsymbol{Q}\ \forall \boldsymbol{\beta} > 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{s}) \leq 0\ \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*).\blacksquare$$

Другими словами в лемме утверждается, что $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_{\leq}(\boldsymbol{x})$

Эта лемма позволяет элиминировать условие Слейтера в задаче выпуклого программирования в случае линейных ограничений.

Помним: функции $\boldsymbol{f}, \varphi_i$ — выпуклые, непрерывно-дифференцируемые. Множество допустимых решений $\boldsymbol{Q}$ удовлетворяет условию Слейтера.

Критерий оптимальности: выпуклый случай

Теорема 9 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*),$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. "Необходимость."

Из леммы 8 и условия Слейтера следует, что для любого $\boldsymbol{i \in I(x^*)}$

$$\mathbf{0} > \boldsymbol{\varphi_i(\widetilde{x}) = \varphi_i(\widetilde{x}) - \varphi_i(x^*) \geq (\varphi_i'(x^*), \widetilde{x} - x^*)}.$$

Таким образом вектор $\boldsymbol{s = (\widetilde{x} - x^*) \in K_{<}(x^*)}$. Следовательно, по теореме о замыкании конуса возможных направлений имеем $\boldsymbol{\overline{K}_f(x^*) = K_{\leq}(x^*)}$. Повторяем соответствующие рассуждения доказательства теоремы 8.

"Достаточность."

$$\boldsymbol{\forall z \in Q : s = (z - x^*) \in K_f(x^*) \Rightarrow (\varphi_i'(x^*), s) \leq \mathbf{0}, \forall\, i \in I(x^*).}$$

$$\forall z \in Q : f(z) - f(x^*) \geq (f'(x^*), z - x^*) = (f'(x^*), s) = (-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*), s) = \sum_{i=1}^{m} (-\lambda_i)(\varphi_i'(x^*), s) \geq 0. \blacksquare$$

Критерий оптимальности: линейный случай

Теорема 10 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i,$$

$$\lambda_i\big((a_i, x) - b_i\big) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Критерии оптимальности

Теорема 11 (Теорема Куна-Таккера в нелокальной форме). Вектор $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{Q}$ является оптимальным решением задачи выпуклого программирования тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\boldsymbol{\lambda}^*$, что пара $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ является седловой точкой функции Лагранжа.