

ЛЕКЦИЯ № 3

Симплекс-метод

1. Симплекс-таблица (с.-т.). Элементарное преобразование б.д.р., базиса и с.-т. Алгоритм симплекс-метода
2. Лексикографический симплекс-метод
3. Двухфазный симплекс-метод или метод искусственного базиса

Симплекс-таблица (с.-т.)

x – допустимое решение задачи (5–7) со значением целевой функции $(c, x) = w \Leftrightarrow$ пара (w, x) – решение системы уравнений $(5')$, $(6')$, (7) или системы

$$-w + (c_N - c_B B^{-1} N)x_N = -c_B B^{-1} b, \quad (5')$$

$$Ex_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b, \quad (6')$$

$$x \geq 0 \quad (7)$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \quad (5'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6'')$$

где

$$z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\bar{x}),$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(z_{10}, \dots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \dots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

		x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
$-w$	z_{00}	z_{01}	$\dots$	z_{0j}	$\dots$	z_{0n}
$x_{\sigma(1)}$	z_{10}	z_{11}	$\dots$	z_{1j}	$\dots$	z_{1n}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_{\sigma(i)}$	z_{i0}	z_{i1}	$\dots$	z_{ij}	$\dots$	z_{in}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_{\sigma(m)}$	z_{m0}	z_{m1}	$\dots$	z_{mj}	$\dots$	z_{mn}

Симплекс-таблица (с.-т.)

		x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_n
$-w$	z_{00}	0	$\dots$	0	$\dots$	0	z_{0m+1}	$\dots$	z_{0n}
x_1	z_{10}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	z_{1m+1}	$\dots$	z_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_i	z_{i0}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	z_{im+1}	$\dots$	z_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	z_{m0}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	z_{mm+1}	$\dots$	z_{mn}

Симплекс-таблица (с.-т.)

Определение 6. Симплекс-таблица прямо допустима, если $z_{i0} \geq 0, i = 1, \dots, m$.

Базис B , соответствующий ей, также называется прямо допустимым.

Определение 7. Симплекс-таблица двойственно допустима, если $z_{0j} \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Базис B , соответствующий этой таблице, также называется двойственно допустимым.

Элементарное преобразование б.д.р.

$x(t), t \geq 0 :$

$$\begin{aligned}x_{\sigma(i)}(t) &= \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\x_s(t) &= t, \\x_j(t) &= 0, j \in S' \setminus s\end{aligned}\tag{10}$$

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is} > 0, i \geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\alpha'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \dots, z'_{in})$ ($i = \overline{0, m}$) строки новой симплекс-таблицы:

$$\begin{cases} \alpha'_i = \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}} \alpha_r, & i \neq r, \\ \alpha'_r = \frac{1}{z_{rs}} \alpha_r. \end{cases} \quad (11)$$

r -я строка, s -й столбец и элемент z_{rs} называются ведущими.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Соотношения (11) эквивалентны следующим

$$\begin{cases} z'_{ij} = z_{ij} - \frac{z_{is}z_{rj}}{z_{rs}}, & i \neq r, \\ z'_{rj} = \frac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Замечание 3. Элементарные преобразования сохраняют прямо допустимость с.-т.

Симплекс-метод

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $z_{0j} \geq 0, j = \overline{1, n}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $s : z_{0s} < 0, s \geq 1$.

Симплекс-метод

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0, i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\left\{ \frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0, i \geq 1 \right\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

4) Преобразовать симплекс-таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Лексикографический с. - м.

Пусть $\alpha', \alpha'' \in R^{n+1}$.

Вектор α' лексикографически больше вектора α''
($\alpha' \succ \alpha''$) $\Leftrightarrow \alpha' - \alpha'' \succ 0$.

Симплекс-таблица *нормальна*, если каждая ее строка α_i , $i = 1, \dots, m$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический с. - м.

0) Начать с нормальной симплекс-таблицы.

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0, i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}} \alpha_r = \text{lex min} \left\{ \frac{1}{z_{is}} \alpha_i \mid z_{is} > 0, i \geq 1 \right\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Сохранение нормальности с.-т. на шаге 4:

1. $\alpha_r \succ 0, z_{rs} > 0 \Rightarrow \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r \succ 0$
2. $z_{is} \leq 0 \Rightarrow \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r \succeq \alpha_i \succ 0$
3. $z_{is} > 0 \Rightarrow z_{is}[\frac{1}{z_{is}}\alpha_i - \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r] \succ 0.$

Лексикографическое возрастание 0-й строки:

$z_{0s} < 0, z_{rs} > 0$ и $\alpha_r \succ 0$, то

$$\alpha_0 - \frac{z_{0s}}{z_{rs}}\alpha_r \succ \alpha_0.$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.

Метод искусственного базиса

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\xi = u_1 + \dots + u_m \longrightarrow \min$$

$$Ax + Eu = b \geq 0$$

$$(a_i x + u_i = b_i \geq 0, i = \overline{1, m})$$

$$x, u \geq 0$$

$$z^0 = (0, b) \in R^{n+m} - \text{б.д.р.}$$

Метод искусственного базиса

Вспомогательная задача разрешима и $\min \xi \geq 0$.

Пусть $z^* = (x^*, u^*)$ – оптимальное решение

$$\text{A. } \min \xi > 0 \iff Q = \emptyset$$

В. $\min \xi = 0 \implies u_i^* = 0, i = \overline{1, m}, \implies$
вектор x^* – доп. реш. задачи (5)-(7) $\implies x^*$ –
б.д.р. задачи (5)-(7).

$\{A_j | j \in S\} \cup \{E_i | i \in I'\}$ – базис z^* , где
 $S \subseteq \{1, \dots, n\}, I' \subseteq \{1, \dots, m\}$ и

Метод искусственного базиса

$$|S| + |I'| = m.$$

Возможны случаи:

B1. $I' = \emptyset$.

B2. $I' \neq \emptyset$ и $\exists r \in I', \exists s \notin S, z_{rs} \neq 0$.

B3. $I' \neq \emptyset$ и $\forall r \in I', \forall s = \overline{1, n} z_{rs} = 0$.

Метод искусственного базиса

В1. $I' = \emptyset \implies |S| = m \implies$ множество $\{A_j | j \in S\}$ – базис б.д.р. x^* .

Преобразовать оптимальную с.-т.:

1. Вычеркнуть столбцы для переменных:

$u_1, \dots, u_m$.

2. Пересчитать 0-строку: $z_{00} = -(c, x^*)$,

$z_{0k} = 0, k \in S, z_{0k} = c_k - \sum_{j \in I} c_j z_{jk}, k \notin S$.

Метод искусственного базиса

В2. $I' \neq \emptyset$ и $\exists r \in I', \exists s \notin S, z_{rs} \neq 0 \implies$

Выполнить элементарное преобразование с.-т. с ведущим элементом $z_{rs} \neq 0$. Новая с.-т. соответствует базису

$$\{A_j | j \in S \cup \{s\}\} \cup \{E_i | i \in I' \setminus \{r\}\}.$$

Метод искусственного базиса

В3. $I' \neq \emptyset$ и $\forall r \in I', \forall s = \overline{1, n} : z_{rs} = 0$.

Ограничения $a_i x = b_i$ системы (6) с номерами $i \in I'$ являются избыточными.