

ЛЕКЦИЯ № 5

Необходимые условия экстремума

1. Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера
2. Критерий оптимальности (выпуклый случай)

Лекция 4:

Теорема 7 (Фаркаша–Минковского). Система уравнений $Ax = b, x \geq 0$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(b, y) \leq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA \leq 0$.

Следствие 3. Система уравнений $Ax \leq b$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(b, y) \geq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA = 0, y \geq 0$.

Следствие 4 (теорема Гордана). Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений $Ax < 0$;
2. существует такой $\neq 0$ вектор y , что $yA = 0, y \geq 0$.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

Найти:

$$\min f(x) \quad (1)$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Здесь $f, \varphi_i : R^n \longrightarrow R$ и $f, \varphi_i \in C^1$.

Определение 8. Направление $s \neq 0$ называется возможным в точке $x \in Q$, если существует такое число $\bar{\beta} > 0$, что $x + \beta s \in Q, \forall \beta \in [0, \bar{\beta}]$.

Комментарий

Множество $\mathbf{K}$ называется конусом, если $\forall \lambda > 0$ и $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{K}$ имеем $\lambda \mathbf{x} \in \mathbf{K}$.

Очевидно, что множество возможных направлений в точке $\mathbf{x}$ образует конус, который обозначим как $\mathbf{K}_f(\mathbf{x})$.

Ограничение φ_i называется **активным** в точке x , если $\varphi_i(x) = 0$. $I(x)$ – множество номеров ограничений активных в данной точке.

Лемма 7. Если вектор $s \neq 0$ удовлетворяет системе

$$(\varphi'_i(x), s) + \sigma \leq 0, i \in I(x),$$

при некотором $\sigma > 0$, то направление s является **возможным** в точке x .

Доказательство. Считаем, что $I(x) \neq \emptyset$ (т.к. иначе любое направление $s \neq 0$ является **возможным**)

Если $i \notin I(x)$, то малое перемещение не нарушает строгое ограничение $\varphi_i(x) < 0 \implies$ найдется подходящее $\overline{\beta}_i$.

Пусть $i \in I(x) (\equiv \varphi_i(x) = 0)$. Далее рассуждаем от противного. Допустим, что $\varphi_i(x + \beta s) > 0$, для достаточно малых $\beta > 0 \implies$
 $\varphi_i(x + \beta s) / \beta = (\varphi_i(x + \beta s) - \varphi_i(x)) / \beta \longrightarrow$
 $\longrightarrow (\varphi'_i(x), s) \geq 0$ (при $\beta \rightarrow 0$).

Противоречие. Т.к. по условиям леммы

$$(\varphi'_i(x), s) < 0, \blacksquare$$

Комментарий

Пусть $K_{<}(x) = \{s | s \neq 0 \text{ и } (\varphi'_i(x), s) < 0, \forall i \in I(x)\}$. Множество $K_{<}(x)$ конус.

Лемма 7 утверждает, что конус $K_{<}(x)$ является подмножеством конуса $K_f(x)$.

Поэтому назовем конус $K_{<}(x)$ конусом внутренней аппроксимации конуса $K_f(x)$.

Теорема о замыкании конуса возможных направлений

$$K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 \mid (\varphi'_i(x), s) \leq 0, \forall i \in I(x)\}.$$

Т.к. $K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x)$, то конус $K_{\leq}(x)$ называется внешней аппроксимацией конуса возможных направлений.

Теорема 7 (о замыкании конуса возможных направлений).

$$\text{Если } K_{<}(x) \neq \emptyset, \text{ то } \overline{K_f}(x) = K_{\leq}(x).$$

Доказательство. Действительно, пусть конус $K_{<}(x)$ не пуст. Тогда найдётся $\bar{s}$ такой, что

$$(\varphi'_i(x), \bar{s}) < 0, \forall i \in I(x).$$

Пусть $s \in K_{\leq}(x)$, т.е.

$$(\varphi'_i(x), s) \leq 0, \forall i \in I(x).$$

Очевидно, что для любого $\lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda s + (1 - \lambda)\bar{s} \in K_{<}(x).$$

Таким образом s предел последовательности направлений из $K_{<}(x)$ при λ стремящимся к 1 снизу. Учитывая, что

$$K_{<}(x) \subseteq K_{\leq}(x),$$

получим $\overline{K}_{<}(x) = K_{\leq}(x)$.

Т.к.

$$K_{<}(x) \subseteq K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x),$$

то

$$\overline{K}_f(x) = K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 | (\varphi'_i(x), s) \leq 0, \forall i \in I(x)\}. \blacksquare$$

Теорема 8 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера). Пусть x^* — локальный экстремум задачи (1), (2), функции f , $\varphi_i, i = \overline{1, m}$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы и вектора $\varphi'_i(x^*), i \in I(x^*)$, линейно независимы. Тогда найдутся такие множители $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*), \quad (3)$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Доказательство.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

Так как x^* — локальный минимум задачи (1), (2), то

$\forall s \neq 0$, если $s \in K_f(x^*)$, то выполняется неравенство $(f'(x^*), s) \geq 0$.

Т.к. $f \in C^1$, то

$\forall s \neq 0$, если $s \in \overline{K_f}(x^*)$, то выполняется неравенство $(f'(x^*), s) \geq 0$.

Линейная независимость градиентов активных ограничений $\varphi'_i(x^*), i \in I(x^*)$ означает, что не существует таких ненулевых коэффициентов $\lambda_i, i \in I(x^*)$, что

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi'_i(x^*) = 0.$$

Отсюда при помощи теоремы Гордана (след-е теор. Ф.–М.) выводим, что найдется такой ненулевой вектор s , что

$$(\varphi'_i(x^*), s) < 0, \forall i \in I(x^*).$$

Т.е. конус $K_{<}(x^*)$ является не пустым. Следовательно

$$\overline{K_f}(x^*) = \{s \neq 0 | (\varphi'_i(x^*), s) \leq 0, \forall i \in I(x^*)\}.$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

Итак имеем, что

$\forall s \neq 0$, если $(\varphi'_i(x^*), s) \leq 0, \forall i \in I(x^*)$, то выполняется неравенство $(-f'(x), s) \leq 0$.

Тогда по теореме Фаркаша–Минковского $\exists$ неотрицательное решение системы уравнений:

$$-f'(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi'_i(x^*), \quad (3)$$

Положим $\lambda_i = 0, i \notin I(x^*)$ и получим

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*), \quad (3)$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Задача (1), (2) называется задачей выпуклого программирования, если функции f , $\varphi_i, i = \overline{1, m}$, — выпуклы.

Множество Q выпукло. По прежнему считаем, что $f, \varphi_i \in C^1$.

Условие регулярности для выпуклого случая:

$$\forall i, i = \overline{1, m}, \exists x^i \in Q : \varphi_i(x^i) < 0.$$

Эквивалентно условию регулярности Слейтера

$$\exists \tilde{x} \in Q : \varphi_i(\tilde{x}) < 0, i = \overline{1, m}.$$

Лемма 8. Функция f дифференцируемая на выпуклом множестве Q , выпукла в том и только в том случае, когда для любых $x, y \in Q$:
 $(f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x).$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпук- лый случай

Лемма 9. Если

$$Q = \{x | \varphi_i(x) = (a_i, x) - b_i \leq 0, i = \overline{1, m}\},$$

то условия

$$(a_i, s) \leq 0, i \in I(x^*)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы направление s было воз-
можным в точке $x^* \in Q$.

Доказательство. Пусть $\beta > 0$. Рассмотрим

$$\varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = (a_i, x^*) - b_i + \beta(a_i, s).$$

$$\forall i \notin I(x^*) \quad (a_i, x^*) - b_i < 0 \Rightarrow \forall i \notin I(x^*) \quad \varphi_i(x^* + \beta s) \leq 0,$$

для достаточно малых β .

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$\begin{aligned}\forall i \in I(x^*) \quad \varphi_i(x^* + \beta s) &= (a_i, x^* + \beta s) - b_i = \beta(a_i, s) \Rightarrow \\ \Rightarrow x^* + \beta s &\in Q \quad \forall \beta > 0 \Leftrightarrow (a_i, s) \leq 0 \quad \forall i \in I(x^*). \blacksquare\end{aligned}$$

Другими словами в лемме утверждается, что $K_f(x) = K_{\leq}(x)$

Эта лемма позволяет элиминировать условие Слейтера в задаче выпуклого программирования в случае линейных ограничений.

Помним: функции f, φ_i — выпуклые, непрерывно-дифференцируемые. Множество допустимых решений Q удовлетворяет условию Слейтера.

Критерий оптимальности: выпуклый случай

Теорема 9 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$\begin{aligned} -f'(x^*) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*), \\ \lambda_i \varphi_i(x^*) &= 0, i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Доказательство. "Необходимость."

Из леммы 8 и условия Слейтера следует, что для любого $i \in I(x^*)$

$$0 > \varphi_i(\tilde{x}) = \varphi_i(\tilde{x}) - \varphi_i(x^*) \geq (\varphi'_i(x^*), \tilde{x} - x^*)$$

Таким образом вектор $s = (\tilde{x} - x^*) \in K_{<}(x^*)$.

Следовательно, по теореме о замыкании конуса возможных направлений имеем $\overline{K}_f(x^*) = K_{\leq}(x^*)$.

Повторяем соответствующие рассуждения доказательства теоремы 8.

"Достаточность."

$$\forall z \in Q : s = (z - x^*) \in K_f(x^*) \Rightarrow (\varphi'_i(x^*), s) \leq 0, \forall i \in I(x^*).$$

$$\begin{aligned} \forall z \in Q : f(z) - f(x^*) &\geq (f'(x^*), z - x^*) = (f'(x^*), s) = (-\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*), s) = \\ \sum_{i=1}^m (-\lambda_i)(\varphi'_i(x^*), s) &\geq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Критерий оптимальности: линейный случай

Теорема 10 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i,$$

$$\lambda_i((a_i, x) - b_i) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Критерии оптимальности

Теорема 11 (Теорема Куна-Таккера в нелокальной форме). Вектор $x^* \in Q$ является оптимальным решением задачи выпуклого программирования тогда и только тогда, когда существует такой вектор λ^* , что пара (x^*, λ^*) является седловой точкой функции Лагранжа.