ЛЕКЦИЯ № 4

Теория двойственности ЛП

1. Двойственная задача

2. Теоремы двойственности ЛП

3. Теоремы Фаркаша – Минковского и Гордана

ЛП: двойственная задача

Задача $(\mathbf{5}) - (\mathbf{7})$ эквивалентна задаче

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_i \le \mathbf{0}, \qquad & \boldsymbol{\lambda}_i^1 \ge \mathbf{0} \\ -(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}_i \le \mathbf{0}, \qquad & \boldsymbol{\lambda}_i^2 \ge \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{x}_j \le \mathbf{0}. \qquad & \boldsymbol{\mu}_j \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ее функция Лагранжа:

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{\lambda}^2, \boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{\lambda}^2, -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{\mu}, -\boldsymbol{x}) =$$

$$= \Big(\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}\Big) - (\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2, \boldsymbol{b}).$$

Следовательно, целевая функция двойственной задачи имеет вид:

ЛП: двойственная задача

$$h(\boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{\lambda}^2, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{\lambda}^2, \boldsymbol{\mu}) =$$

$$= \begin{cases} -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2), & \text{если } \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \Longrightarrow$$

Двойственная задача

$$h(\boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{\lambda}^2, \boldsymbol{\mu}) \longrightarrow \sup_{\boldsymbol{\lambda}^1 \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}^2 \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}},$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2) \longrightarrow \max$$

$$\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \equiv \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2)\boldsymbol{A} \geq \mathbf{0}.$$

Умножим ограничения на $-\mathbf{1}$, обозначим $\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2)$

ЛП: двойственная задача

Получим

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \max \tag{9}$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}. \tag{10}$$

Замечание. **Для задач (5)-(7) и (9)-(10) выполняются все утверждения: л. 1, л. 2, теор. 1, следствия 1 — 2.**

Теорема 4. **Задача двойственная к задаче (9)-(10) совпадает с исходной задачей (5)-(7).**

Доказательство. Задача (9)-(10) эквивалентна задаче

$$-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \min$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}.$$

ЛП: двойственная задача

$$\boldsymbol{yA} \leq \boldsymbol{c} \equiv \text{системе неравенств } (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}_j) - \boldsymbol{c}_j \leq \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{x}_j \geq \mathbf{0}$$

(сопоставили каждому ограничению двойственную переменную (множитель Лагранжа))

Функция Лагранжа:

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{yA} - \boldsymbol{c}) =$$

$$-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}).$$

Целевая функция двойственной задачи

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) =$$

$$\begin{cases} -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}), & \text{если } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

ЛП: двойственная задача

Задача

$$\max_{x \geq 0} h(x)$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(c, x) \longrightarrow \max$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

или

$$\min(c, x)$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0.$$

■

ЛП: двойственная задача

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Прямая задача} & & \text{Двойственная задача} \\
w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min & & z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max \\
a_i x \ge b_i & i \in I_1 & y_i \ge 0 \\
a_i x = b_i & i \in I_2 & y_i - \text{ своб.} \\
x_j \ge 0 & j \in J_1 & y A_j \le c_j \\
x_j - \text{ своб.} & j \in J_2 & y A_j = c_j.
\end{array}
$$

Упражнение.

Техника получения этой схемы: либо повторить выкладки, приведшие к задаче (9)–(10), либо воспользоваться сводимостью общей задачи ЛП к задаче ЛП в канонической форме и применить готовый рецепт (задача (9)–(10)).

Первая теорема двойственности

Теорема 5 (Первая теорема двойственности). Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.

Первая теорема двойственности

Доказательство. Согласно Лемме 1 (Слабой теореме двойственности) прямая и двойственная задача не могут быть одновременно неразрешимы в силу неограниченности значения целевой функции.

Без ограничения общности будем считать, что прямая задача в канонической форме. Допустим, что прямая задача разрешима. Тогда найдется оптимальный базис $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{c_B B^{-1} b}$ – оптимальное значение. Рассмотрим означивание $\boldsymbol{y = c_B B^{-1}}$; $\boldsymbol{(y, b) = c_B B^{-1} b}$. Покажем, что $\boldsymbol{yA \le c}$:

$$\boldsymbol{yA = c_B B^{-1}[B, N] = [c_B, c_B B^{-1} N] \le [c_B, c_N].}$$

Вторая теорема двойственности

Теорема 6 (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). **Допустимые решения $\overline{\boldsymbol{x}}$ и $\overline{\boldsymbol{y}}$ соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:**

$$\boldsymbol{y_i(a_i x - b_i) = 0 \ (i \in I),}$$

$$\boldsymbol{(c_j - yA_j)x_j = 0 \ (j \in J).}$$

Первая теорема двойственности

Доказательство. Достаточность:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}.$$

Необходимость:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} =$$

$$= \boldsymbol{y}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Теорема 7 (Фаркаша–Минковского). Система уравнений $\boldsymbol{Ax = b, x \geq 0}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $\boldsymbol{(b, y) \leq 0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA \leq 0}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\boldsymbol{\exists x}$ $\boldsymbol{Ax = b, x \geq 0}$ и пусть $\boldsymbol{y}$ — произвольное решение системы $\boldsymbol{yA \leq 0}$. Тогда

$$\boldsymbol{(b, y) = (Ax, y) = (x, yA) \leq (x, 0) = 0.}$$

Достаточность. Пусть неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \leq \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы неравенств $\boldsymbol{yA} \leq \mathbf{0}$.

Рассмотрим прямую и двойственную задачи ЛП:

$$(\boldsymbol{P}) : \mathbf{0} \to \min_{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b};$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

$$(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{by} \to \max_{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{yA} \leqslant \mathbf{0}.$$

Следствие 3. Система уравнений $\boldsymbol{Ax \le b}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \ge 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA = 0, y \ge 0}$.

$\boldsymbol{Ax \le b}$ разрешима $\Longleftrightarrow$ разрешима система $\boldsymbol{Ax_1 - Ax_2 + Eu = b, x_1, x_2, u \ge 0} \Longleftrightarrow$ когда неравенство $\boldsymbol{(b, y) \le 0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA \le 0, -yA \le 0, Ey \le 0} \Longleftrightarrow$ неравенство $\boldsymbol{(b, y) \ge 0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA = 0, y \ge 0}$. ■

Следствие 4 (теорема Гордана). Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$;

2. существует такой $\neq \mathbf{0}$ вектор $\boldsymbol{y}$, что $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

Действительно, система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$ разрешима $\Longleftrightarrow$ разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} \leq (-\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \ldots, -\mathbf{1})^\top$. По теореме Ф.–М. разрешимость последней системы эквивалентна выполнению условия:

если вектор $\boldsymbol{y}$ решение системы $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$, то выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$. Т.е. не существует ненулевого вектора $\boldsymbol{y}$ такого, что $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

Теперь пусть существует ненулевой вектор $\boldsymbol{y}$ такой, что $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$. Но тогда не выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0} \implies$ не выполнено условие теоремы Ф.–М. $\implies$ система $\boldsymbol{Ax} \leq (-\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \ldots, -\mathbf{1})^\top$ неразрешима $\implies$ неразрешима система

$\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$.■