

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Лекция 4: Симплекс-метод

Панин Артем Александрович
Email: aapanin1988@gmail.com

Лекции и материалы по курсу:
http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Opt_MMF_2021.html

Новосибирский государственный университет

2021

Теорема 4 (Критерий разрешимости). Задача линейного программирования (5)-(7) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем.

Следствие 3. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следствие 4. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.

Пусть $S' \cup S = \{1, \dots, n\}$, $S' \cap S = \emptyset$. Множество решений системы уравнений

$$Ax = b, x_j = 0, j \in S', x_j \geq 0, j \in S,$$

называется гранью множества допустимых решений (6)-(7).

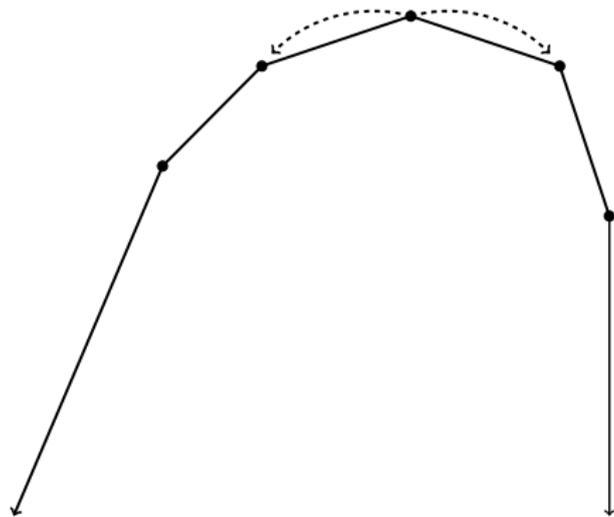
Величина $n - m - |S'|$ — размерность данной грани (здесь $m + |S'|$ — ранг системы уравнений).

Так как \bar{x} — б.д.р., то $|S'| = n - m$, следовательно, \bar{x} — грань размерности 0.

Если $|S'| = n - m - 1$, то получим грань размерности 1, т.е. ребро: ограниченное или неограниченное.

Идея симплекс-метода

- 1) Разумно упорядоченный перебор вершин множества Q (б.д.р.);
- 2) Переход от одной вершины к другой по ребру.



Пусть \bar{x} — б.д.р., $B = (A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)})$ — базисная матрица. Тогда

$$Ex_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \quad (6')$$

следовательно

$$Ex_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, \text{ и}$$
$$w(x) = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N, \quad (5')$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

Величины z_{0j} называются оценками замещения. Знак оценки замещения определяет характер изменения целевой функции при движении по ребру.

$$(z_{10}, \dots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \dots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

$x(t), t \geq 0 :$

$$\begin{aligned}x_{\sigma(i)}(t) &= \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\x_s(t) &= t, \\x_j(t) &= 0, j \in S' \setminus s\end{aligned}\tag{8}$$

Лемма 4 (признак оптимальности). Если оценки замещения неотрицательны, то текущее базисное допустимое решение \bar{x} является оптимальным решением задачи (5)–(7).

Пусть $x \in Q$. Так как $z_{0j} \geq 0$ и $x_j \geq 0$, $j \in S'$, то из (5') следует, что

$$w(x) = c_B B^{-1} b + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j \geq c_B B^{-1} b =$$

$$= w(\bar{x}) \blacksquare$$

Лемма 5 (о неразрешимости). Если для номера s оценка замещения $z_{0s} < 0$ и для всех индексов i коэффициенты замещения z_{is} неположительны, то в задаче (5)–(7) не существует оптимального решения.

Лемма 6 (о существовании лучшей вершины). Если оценка замещения $z_{0s} < 0$ и существуют базисные переменные с коэффициентами замещения $z_{is} > 0$, то элементарное преобразование приведёт либо в вершину с меньшим значением целевой функции, либо вершина останется прежней, но изменится её базис.

Доказательство. Пусть

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is} > 0, i \geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Предположим, что $\bar{t} > 0$. Тогда

$$\forall i \forall t < \bar{t} : x_{\sigma(i)}(t) = \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t > 0,$$

$$x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = 0 \text{ и для } \forall t > \bar{t} \text{ имеем } x_{\sigma(r)}(t) < 0 \implies$$

Семейство векторов $x(t), 0 \leq t \leq \bar{t}$ – ограниченное ребро множества Q .

Вектор $x(\bar{t})$ – б.д.р.:

$$(z_{1s}, \dots, z_{ms})^\top = B^{-1}A_s \iff$$

$$A_s = B(z_{1s}, \dots, z_{ms})^\top \iff$$

$$A_s = \sum_{i=1}^m z_{is} A_{\sigma(i)} \quad (\text{отсюда и условия}) \quad z_{rs} > 0$$

следует, что матрица B' со столбцами

$$[A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$$

невырождена.

Следовательно B' – базис б.д.р. $x(\bar{t})$. Т.к.

$$\forall t, 0 < t \leq \bar{t}, w(x(t)) = -z_{00} + z_{0s}t < -z_{00},$$

то $x(\bar{t})$ – искомое б.д.р. с меньшим значением целевой функции.

Пусть $\bar{t} = 0$. В силу выбора $r : x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = x_{\sigma(r)}(0) = \bar{x}_{\sigma(i)} = z_{r0} = 0$.
Т.к. $z_{rs} > 0$, то матрица B' со столбцами

$$[A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$$

снова невырождена. Следовательно B' – другой базис вершины \bar{x} . ■

x – допустимое решение задачи (5–7) со значением целевой функции $(c, x) = w \Leftrightarrow$ пара (w, x) – решение системы уравнений (5'), (6'), (7) или системы

$$-w + (c_N - c_B B^{-1} N)x_N = -c_B B^{-1} b, \quad (5')$$

$$E x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b, \quad (6')$$

$$x \geq 0 \quad (7)$$

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \quad (5'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6'')$$

где

$$z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\bar{x}),$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(z_{10}, \dots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \dots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Симплекс-таблица

		x_1	\dots	x_j	\dots	x_n
$-w$	z_{00}	z_{01}	\dots	z_{0j}	\dots	z_{0n}
$x_{\sigma(1)}$	z_{10}	z_{11}	\dots	z_{1j}	\dots	z_{1n}
\cdot	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$x_{\sigma(i)}$	z_{i0}	z_{i1}	\dots	z_{ij}	\dots	z_{in}
\cdot	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$x_{\sigma(m)}$	z_{m0}	z_{m1}	\dots	z_{mj}	\dots	z_{mn}

Симплекс-таблица

		x_1	\dots	x_i	\dots	x_m	x_{m+1}	\dots	x_n
$-w$	z_{00}	0	\dots	0	\dots	0	z_{0m+1}	\dots	z_{0n}
x_1	z_{10}	1	\dots	0	\dots	0	z_{1m+1}	\dots	z_{1n}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
x_i	z_{i0}	0	\dots	1	\dots	0	z_{im+1}	\dots	z_{in}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
x_m	z_{m0}	0	\dots	0	\dots	1	z_{mm+1}	\dots	z_{mn}

Определение 6. Симплекс-таблица прямо допустима, если $z_{i0} \geq 0, i = 1, \dots, m$.

Базис B , соответствующий ей, также называется прямо допустимым.

Определение 7. Симплекс-таблица двойственно допустима, если $z_{0j} \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Базис B , соответствующий этой таблице, также называется двойственно допустимым.

$x(t), t \geq 0$:

$$\begin{aligned}x_{\sigma(i)}(t) &= \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\x_s(t) &= t, \\x_j(t) &= 0, j \in S' \setminus s\end{aligned}\tag{10}$$

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is} > 0, i \geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

$\alpha'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \dots, z'_{in})$ ($i = \overline{0, m}$) строки новой симплекс-таблицы:

$$\begin{cases} \alpha'_i = \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}} \alpha_r, & i \neq r, \\ \alpha'_r = \frac{1}{z_{rs}} \alpha_r. \end{cases} \quad (11)$$

r -я строка, s -й столбец и элемент z_{rs} называются ведущими.

Соотношения (11) эквивалентны следующим

$$\begin{cases} z'_{ij} = z_{ij} - \frac{z_{is}z_{rj}}{z_{rs}}, & i \neq r, \\ z'_{rj} = \frac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Замечание 3. Элементарные преобразования сохраняют прямо допустимость с.-т.

0) Построить симплекс-таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}$).

1) Если симплекс-таблица двойственно допустима, т.е. $z_{0j} \geq 0, j = \overline{1, n}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $s : z_{0s} < 0, s \geq 1$.

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0, i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\left\{ \frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0, i \geq 1 \right\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

4) Преобразовать симплекс-таблицу, положить

$\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Пусть $\alpha', \alpha'' \in R^{n+1}$.

Вектор α' лексикографически больше вектора α'' ($\alpha' \succ \alpha''$) \Leftrightarrow
 $\alpha' - \alpha'' \succ 0$.

Симплекс-таблица *нормальна*, если каждая ее строка α_i , $i = 1, \dots, m$ лексикографически больше нуля.

0) Начать с нормальной симплекс-таблицы.

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0, i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = \text{lex min} \left\{ \frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0, i \geq 1 \right\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Сохранение нормальности с.-т. на шаге 4:

1. $\alpha_r \succ 0, z_{rs} > 0 \Rightarrow \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r \succ 0$
2. $z_{is} \leq 0 \Rightarrow \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r \succ \alpha_i \succ 0$
3. $z_{is} > 0 \Rightarrow z_{is}[\frac{1}{z_{is}}\alpha_i - \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r] \succ 0.$

Лексикографическое возрастание 0-й строки:

$z_{0s} < 0, z_{rs} > 0$ и $\alpha_r \succ 0$, то

$$\alpha_0 - \frac{z_{0s}}{z_{rs}}\alpha_r \succ \alpha_0.$$

Итак базисы не могут повторяться, следовательно, метод конечен.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\xi = u_1 + \dots + u_m \longrightarrow \min$$

$$Ax + Eu = b \geq 0$$

$$(a_i x + u_i = b_i \geq 0, i = \overline{1, m})$$

$$x, u \geq 0$$

$$z^0 = (0, b) \in R^{n+m} - \text{б.д.р.}$$

Вспомогательная задача разрешима и $\min \xi \geq 0$. Пусть $z^* = (x^*, u^*)$ – оптимальное решение

A. $\min \xi > 0 \iff Q = \emptyset$

B. $\min \xi = 0 \implies u_i^* = 0, i = \overline{1, m}, \implies$ вектор x^* – доп. реш. задачи (5)-(7) $\implies x^*$ – б.д.р. задачи (5)-(7).

$\{A_j | j \in S\} \cup \{E_i | i \in I'\}$ – базис z^* , где $S \subseteq \{1, \dots, n\}, I' \subseteq \{1, \dots, m\}$ и

$$|S| + |I'| = m.$$

Возможны случаи:

B1. $I' = \emptyset$.

B2. $I' \neq \emptyset$ и $\exists r \in I', \exists s \notin S, z_{rs} \neq 0$.

B3. $I' \neq \emptyset$ и $\forall r \in I', \forall s = \overline{1, n} z_{rs} = 0$.

В1. $I' = \emptyset \implies |S| = m \implies$ множество $\{A_j | j \in S\}$ – базис б.д.р. x^* .

Преобразовать оптимальную с.-т.:

1. Вычеркнуть столбцы для переменных:

$$u_1, \dots, u_m.$$

2. Пересчитать 0-строку: $z_{00} = -(c, x^*)$,

$$z_{0k} = 0, k \in S, z_{0k} = c_k - \sum_{j \in I} c_j z_{jk}, k \notin S.$$

B2. $I' \neq \emptyset$ и $\exists r \in I', \exists s \notin S, z_{rs} \neq 0 \implies$ Выполнить элементарное преобразование с.-т. с ведущим элементом $z_{rs} \neq 0$. Новая с.-т. соответствует базису

$$\{A_j | j \in S \cup \{s\}\} \cup \{E_i | i \in I' \setminus \{r\}\}.$$

В3. $I' \neq \emptyset$ и $\forall r \in I', \forall s = \overline{1, n} : z_{rs} = 0$.

Ограничения $a_i x = b_i$ системы (6) с номерами $i \in I'$ являются избыточными.