

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

## Лекция 5: Теория двойственности ЛП

Панин Артем Александрович  
Email: aapanin1988@gmail.com

Лекции и материалы по курсу:  
[http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Opt\\_MMF\\_2021.html](http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Opt_MMF_2021.html)

Новосибирский государственный университет

2021

Задача (5) – (7) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned}(c, x) &\longrightarrow \min \\(a_i, x) - b_i &\leq 0, & \lambda_i^1 &\geq 0 \\-(a_i, x) + b_i &\leq 0, & \lambda_i^2 &\geq 0 \\-x_j &\leq 0. & \mu_j &\geq 0\end{aligned}$$

Ее функция Лагранжа:

$$\begin{aligned}L(x, \lambda^1, \lambda^2, \mu) &= (c, x) + (\lambda^1, Ax - b) + (\lambda^2, -Ax + b) + (\mu, -x) = \\&= \left( c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu, x \right) - (\lambda^1 - \lambda^2, b).\end{aligned}$$

Следовательно, целевая функция двойственной задачи имеет вид:

$$h(\lambda^1, \lambda^2, \mu) = \inf_x L(x, \lambda^1, \lambda^2, \mu) =$$
$$= \begin{cases} -(b, \lambda^1 - \lambda^2), & \text{если } c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \implies$$

Двойственная задача

$$h(\lambda^1, \lambda^2, \mu) \longrightarrow \sup_{\lambda^1 \geq 0, \lambda^2 \geq 0, \mu \geq 0},$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(b, \lambda^1 - \lambda^2) \longrightarrow \max$$

$$c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu = 0 \equiv c + (\lambda^1 - \lambda^2)A \geq 0.$$

Умножим ограничения на  $-1$ , обозначим  $y = -(\lambda^1 - \lambda^2)$

Получим

$$(b, y) \longrightarrow \max \quad (9)$$

$$yA \leq c. \quad (10)$$

Замечание. Для задач (5)-(7) и (9)-(10) выполняются все утверждения: л. 1, л. 2, теор. 1, следствия 1 — 2.

Теорема 4. Задача двойственная к задаче (9)-(10) совпадает с исходной задачей (5)-(7).

Доказательство. Задача (9)-(10) эквивалентна задаче

$$-(b, y) \longrightarrow \min$$

$$yA \leq c.$$

$$yA \leq c \equiv \text{системе неравенств } (y, A_j) - c_j \leq 0, \quad x_j \geq 0$$

(сопоставили каждому ограничению двойственную переменную (множитель Лагранжа))

Функция Лагранжа:

$$L(y, x) = -(b, y) + (x, yA - c) =$$

$$-(b, y) + (Ax, y) - (x, c) = (Ax - b, y) - (c, x).$$

Целевая функция двойственной задачи

$$h(x) = \inf_y L(y, x) =$$

$$\begin{cases} -(c, x), & \text{если } Ax = b, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \implies$$

Задача

$$\max_{x \geq 0} h(x)$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(c, x) \longrightarrow \max$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

или

$$\min(c, x)$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0.$$



Прямая задача

$$w(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$a_i x \geq b_i$$

$$a_i x = b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$x_j$  – своб.

$$i \in I_1$$

$$i \in I_2$$

$$j \in J_1$$

$$j \in J_2$$

Двойственная задача

$$z(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max$$

$$y_i \geq 0$$

$y_i$  – своб.

$$y A_j \leq c_j$$

$$y A_j = c_j.$$

## Упражнение.

Техника получения этой схемы: либо повторить выкладки, приведшие к задаче (9)–(10), либо воспользоваться сводимостью общей задачи ЛП к задаче ЛП в канонической форме и применить готовый рецепт (задача (9)–(10)).

**Теорема 5 (Первая теорема двойственности).** Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.



**Доказательство.** Согласно Лемме 1 (Слабой теореме двойственности) прямая и двойственная задача не могут быть одновременно неразрешимы в силу неограниченности значения целевой функции.

Без ограничения общности будем считать, что прямая задача в канонической форме. Допустим, что прямая задача разрешима. Тогда найдется оптимальный базис  $B$ ;  $c_B B^{-1}b$  – оптимальное значение. Рассмотрим означивание  $y = c_B B^{-1}$ ;  $(y, b) = c_B B^{-1}b$ . Покажем, что  $yA \leq c$ :

$$yA = c_B B^{-1}[B, N] = [c_B, c_B B^{-1}N] \leq [c_B, c_N].$$

**Теорема 6 (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости).** Допустимые решения  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$y_i(a_i x - b_i) = 0 \quad (i \in I),$$

$$(c_j - y A_j) x_j = 0 \quad (j \in J).$$

**Доказательство.** Достаточность:

$$0 = y(Ax - b) + (c - yA)x = cx - yb = 0.$$

Необходимость:

$$\begin{aligned} 0 &= cx - yb = yAx - yb + cx - yAx = \\ &= y(Ax - b) + (c - yA)x = 0. \end{aligned}$$

**Теорема 7 (Фаркаша–Минковского).** Система уравнений  $Ax = b, x \geq 0$  разрешима в том и только в том случае когда неравенство  $(b, y) \leq 0$  выполняется для всех решений системы уравнений  $yA \leq 0$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $\exists x Ax = b, x \geq 0$  и пусть  $y$  — произвольное решение системы  $yA \leq 0$ . Тогда

$$(b, y) = (Ax, y) = (x, yA) \leq (x, 0) = 0.$$

Достаточность. Пусть неравенство  $(b, y) \leq 0$  выполняется для всех решений системы неравенств  $yA \leq 0$ .

Рассмотрим прямую и двойственную задачи ЛП:

$$(P) : 0 \rightarrow \min_x$$

$$Ax = b;$$

$$x \geq 0.$$

$$(D) : by \rightarrow \max_y$$

$$yA \leq 0.$$

**Следствие 3.** Система уравнений  $Ax \leq b$  разрешима в том и только в том случае когда неравенство  $(b, y) \geq 0$  выполняется для всех решений системы уравнений  $yA = 0, y \geq 0$ .

$Ax \leq b$  разрешима  $\iff$  разрешима система  
 $Ax_1 - Ax_2 + Eu = b, x_1, x_2, u \geq 0 \iff$  когда неравенство  $(b, y) \leq 0$   
выполняется для всех решений системы уравнений  
 $yA \leq 0, -yA \leq 0, Ey \leq 0 \iff$  неравенство  $(b, y) \geq 0$  выполняется для  
всех решений системы уравнений  $yA = 0, y \geq 0$ . ■

Следствие 4 (теорема Гордана). Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений  $Ax < 0$ ;
2. существует такой  $\neq 0$  вектор  $y$ , что  $yA = 0, y \geq 0$ .

Действительно, система уравнений  $Ax < 0$  разрешима  $\iff$  разрешима система уравнений  $Ax \leq (-1, -1, \dots, -1)^T$ . По теореме Ф.–М. разрешимость последней системы эквивалентна выполнению условия:

если вектор  $y$  решение системы  $yA = 0, y \geq 0$ , то выполняется неравенство  $-y \geq 0$ . Т.е. не существует ненулевого вектора  $y$  такого, что  $yA = 0, y \geq 0$ .

Теперь пусть существует ненулевой вектор  $y$  такой, что  $yA = 0, y \geq 0$ . Но тогда не выполняется неравенство  $-y \geq 0 \implies$  не выполнено условие теоремы Ф.–М.  $\implies$  система  $Ax \leq (-1, -1, \dots, -1)^T$  неразрешима  $\implies$  неразрешима система  $Ax < 0$ . ■