

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Лекция 6: Необходимые условия оптимальности Куна-Таккера

Панин Артем Александрович
Email: aaanin1988@gmail.com

Лекции и материалы по курсу:
http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Opt_MMF_2021.html

Новосибирский государственный университет

2021

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

Найти:

$$\min f(x) \quad (1)$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Здесь $f, \varphi_i : R^n \rightarrow R$ и $f, \varphi_i \in C^1$.

Определение 8. Направление $s \neq 0$ называется возможным в точке $x \in Q$, если существует такое число $\bar{\beta} > 0$, что $x + \beta s \in Q, \forall \beta \in [0, \bar{\beta}]$.

Комментарий. Множество K называется конусом, если $\forall \lambda > 0$ и $\forall x \in K$ имеем $\lambda x \in K$.

Очевидно, что множество возможных направлений в точке x образует конус, который обозначим как $K_f(x)$.

Ограничение φ_i называется **активным** в точке x , если $\varphi_i(x) = 0$. $I(x)$ – множество номеров ограничений активных в данной точке.

Лемма 7. Если вектор $s \neq 0$ удовлетворяет системе

$$(\varphi'_i(x), s) + \sigma \leq 0, i \in I(x),$$

при некотором $\sigma > 0$, то направление s является возможным в точке x .

Доказательство. Считаем, что $I(x) \neq \emptyset$ (т.к. иначе любое направление $s \neq 0$ является возможным)

Если $i \notin I(x)$, то малое перемещение не нарушает строгое ограничение $\varphi_i(x) < 0 \implies$ найдется подходящее $\bar{\beta}_i$.

Пусть $i \in I(x) (\equiv \varphi_i(x) = 0)$. Далее рассуждаем от противного.
Допустим, что $\varphi_i(x + \beta s) > 0$, для достаточно малых $\beta > 0 \implies$
 $\varphi_i(x + \beta s)/\beta = (\varphi_i(x + \beta s) - \varphi_i(x))/\beta \longrightarrow$
 $\longrightarrow (\varphi_i'(x), s) \geq 0$ (при $\beta \rightarrow 0$).

Противоречие. Т.к. по условиям леммы

$$(\varphi_i'(x), s) < 0, \blacksquare$$

Комментарий. Пусть $K_{<}(x) = \{s | s \neq 0 \text{ и } (\varphi'_i(x), s) < 0, \forall i \in I(x)\}$.
Множество $K_{<}(x)$ конус.

Лемма 7 утверждает, что конус $K_{<}(x)$ является подмножеством конуса $K_f(x)$.

Поэтому назовем конус $K_{<}(x)$ конусом внутренней аппроксимации конуса $K_f(x)$.

$$K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 \mid (\varphi'_i(x), s) \leq 0, \forall i \in I(x)\}.$$

Т.к. $K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x)$, то конус $K_{\leq}(x)$ называется внешней аппроксимацией конуса возможных направлений.

Теорема 7 (о замыкании конуса возможных направлений).

$$\text{Если } K_{<}(x) \neq \emptyset, \text{ то } \overline{K}_f(x) = K_{\leq}(x).$$

Доказательство. Действительно, пусть конус $K_{<}(x)$ не пуст. Тогда найдётся \bar{s} такой, что

$$(\varphi'_i(x), \bar{s}) < 0, \forall i \in I(x).$$

Пусть $s \in K_{\leq}(x)$, т.е.

$$(\varphi'_i(x), s) \leq 0, \forall i \in I(x).$$

Очевидно, что для любого $\lambda \in [0, 1)$:

$$\lambda s + (1 - \lambda)\bar{s} \in K_{<}(x).$$

Таким образом s предел последовательности направлений из $K_{<}(x)$ при λ стремящимся к 1 снизу. Учитывая, что

$$K_{<}(x) \subseteq K_{\leq}(x),$$

получим $\overline{K}_{<}(x) = K_{\leq}(x)$.

Т.к.

$$K_{<}(x) \subseteq K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x),$$

то

$$\overline{K}_f(x) = K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 \mid (\varphi'_i(x), s) \leq 0, \forall i \in I(x)\}. \blacksquare$$

Теорема 7 (Фаркаша–Минковского). Система уравнений $Ax = b, x \geq 0$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(b, y) \leq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA \leq 0$.

Следствие 4 (теорема Гордана). Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений $Ax < 0$;
2. существует такой $\neq 0$ вектор y , что $yA = 0, y \geq 0$.

Теорема 8 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера). Пусть x^* — локальный экстремум задачи (1), (2), функции $f, \varphi_i, i = \overline{1, m}$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы и вектора $\varphi'_i(x^*), i \in I(x^*)$, линейно независимы. Тогда найдутся такие множители $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*), \quad (3)$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Доказательство.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

Так как x^* — локальный минимум задачи (1), (2), то

$\forall s \neq 0$, если $s \in K_f(x^*)$, то выполняется неравенство $(f'(x^*), s) \geq 0$.

Т.к. $f \in C^1$, то

$\forall s \neq 0$, если $s \in \overline{K}_f(x^*)$, то выполняется неравенство $(f'(x^*), s) \geq 0$.

Линейная независимость градиентов активных ограничений

$\varphi'_i(x^*), i \in I(x^*)$ означает, что не существует таких ненулевых коэффициентов $\lambda_i, i \in I(x^*)$, что

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi'_i(x^*) = 0.$$

Отсюда при помощи теоремы Гордана (след-е теор. Ф.–М.) выводим, что найдется такой ненулевой вектор s , что

$$(\varphi'_i(x^*), s) < 0, \forall i \in I(x^*).$$

Т.е. конус $K_<(x^*)$ является не пустым. Следовательно

$$\overline{K}_f(x^*) = \{s \neq 0 \mid (\varphi'_i(x^*), s) \leq 0, \forall i \in I(x^*)\}.$$

Итак имеем, что

$\forall s \neq 0$, если $(\varphi'_i(x^*), s) \leq 0, \forall i \in I(x^*)$, то выполняется неравенство $(-f'(x), s) \leq 0$.

Тогда по теореме Фаркаша–Минковского \exists неотрицательное решение системы уравнений:

$$-f'(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi'_i(x^*), \quad (3)$$

Положим $\lambda_i = 0, i \notin I(x^*)$ и получим

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*), \quad (3)$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Задача (1), (2) называется задачей выпуклого программирования, если функции $f, \varphi_i, i = \overline{1, m}$, — выпуклы.

Множество Q выпукло. По прежнему считаем, что $f, \varphi_i \in C^1$.

Условие регулярности для выпуклого случая:

$$\forall i, i = \overline{1, m}, \exists x^i \in Q : \varphi_i(x^i) < 0.$$

Эквивалентно условию регулярности Слейтера

$$\exists \tilde{x} \in Q : \varphi_i(\tilde{x}) < 0, i = \overline{1, m}.$$

Лемма 8. Функция f дифференцируемая на выпуклом множестве Q , выпукла в том и только в том случае, когда для любых $x, y \in Q$: $(f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x)$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Доказательство. $\forall x \neq y \in Q, \forall \alpha 0 < \alpha \leq 1$

$$f(x + \alpha(y - x)) \leq f(x) + \alpha(f(y) - f(x)).$$

Перепишем неравенство:

$$\|y - x\| \frac{f(x + \beta s) - f(x)}{\beta} \leq f(y) - f(x),$$

где $s = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, $\beta = \alpha\|y - x\|$. Устремим β к 0. В пределе получим

$$(f'(x), s) \|y - x\| \leq f(y) - f(x).$$

Но

$$(f'(x), s) \|y - x\| = (f'(x), y - x).$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Итак, доказали неравенство

$$(f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x).$$

В обратную сторону. Пусть $\forall x, y \in Q : (f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x)$.

По условию $\forall \alpha \in [0, 1] : z = \alpha x + (1 - \alpha)y \in Q$.

Умножим неравенство $(f'(z), x - z) \leq f(x) - f(z)$ на α , а

неравенство $(f'(z), y - z) \leq f(y) - f(z)$ на $(1 - \alpha)$ и сложим их

$$\begin{aligned} 0 &= (f'(z), \alpha(x - z) + (1 - \alpha)(y - z)) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - f(z) \\ &\implies f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \end{aligned}$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Лемма 9. Если

$$Q = \{x \mid \varphi_i(x) = (a_i, x) - b_i \leq 0, i = \overline{1, m}\},$$

то условия

$$(a_i, s) \leq 0, i \in I(x^*)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы направление s было возможным в точке $x^* \in Q$.

Доказательство. Пусть $\beta > 0$. Рассмотрим

$$\varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = (a_i, x^*) - b_i + \beta(a_i, s).$$

$$\forall i \notin I(x^*) \quad (a_i, x^*) - b_i < 0 \Rightarrow \forall i \notin I(x^*) \quad \varphi_i(x^* + \beta s) \leq 0,$$

для достаточно малых β .

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$\begin{aligned} \forall i \in I(x^*) \quad \varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = \beta(a_i, s) \Rightarrow \\ \Rightarrow x^* + \beta s \in Q \quad \forall \beta > 0 \Leftrightarrow (a_i, s) \leq 0 \quad \forall i \in I(x^*). \blacksquare \end{aligned}$$

Другими словами в лемме утверждается, что $K_f(x) = K_{\leq}(x)$

Эта лемма позволяет элиминировать условие Слейтера в задаче выпуклого программирования в случае линейных ограничений.

Помним: функции f, φ_i — выпуклые, непрерывно-дифференцируемые. Множество допустимых решений Q удовлетворяет условию Слейтера.

Теорема 9 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*),$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. "Необходимость."

Из леммы 8 и условия Слейтера следует, что для любого $i \in I(x^*)$

$$0 > \varphi_i(\tilde{x}) = \varphi_i(\tilde{x}) - \varphi_i(x^*) \geq (\varphi_i'(x^*), \tilde{x} - x^*).$$

Таким образом вектор $s = (\tilde{x} - x^*) \in K_{<}(x^*)$. Следовательно, по теореме о замыкании конуса возможных направлений имеем $\overline{K}_f(x^*) = K_{\leq}(x^*)$. Повторяем соответствующие рассуждения доказательства теоремы 8.

"Достаточность."

$$\forall z \in Q : s = (z - x^*) \in K_f(x^*) \Rightarrow (\varphi_i'(x^*), s) \leq 0, \forall i \in I(x^*).$$

$$\begin{aligned} \forall z \in Q : f(z) - f(x^*) &\geq (f'(x^*), z - x^*) = (f'(x^*), s) = \\ &(- \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i'(x^*), s) = \sum_{i=1}^m (-\lambda_i) (\varphi_i'(x^*), s) \geq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 10 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме).
Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i,$$

$$\lambda_i((a_i, x) - b_i) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Теорема 11 (Теорема Куна-Таккера в нелокальной форме). Вектор $x^* \in Q$ является оптимальным решением задачи выпуклого программирования тогда и только тогда, когда существует такой вектор λ^* , что пара (x^*, λ^*) является седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x^* \in Q$ — оптимальное решение. Тогда из теоремы 9 имеем

$$\exists \lambda^* \geq 0 : \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} \Big|_{(x^*, \lambda^*)} = f'(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \varphi_i'(x^*) = 0 \text{ и}$$

$$\lambda_i^* \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Достаточность. Как в теореме 1. ■