

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Лекция 1: Введение в методы оптимизации

Панин Артем Александрович
Email: aapanin1988@gmail.com

Новосибирский государственный университет

2025

- 1) Ларин Р.М., Пяткин А.В., Плясунов А.В. Методы оптимизации примеры и задачи (2009)
- 2) Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Плясунов А. В. Численные методы оптимизации (2008)
- 3) Алексеева Е. В. Построение математических моделей челочисленного линейного программирования. Примеры и задачи (2012)

Пример оптимизационной задачи: задача о космическом корабле (рюкзаке)

Содержательная постановка:

При исследовании Марса астронавт обнаружил несколько минералов определенного веса и определенной ценности. Все предметы на космический корабль он погрузить не может, так как имеется ограничение по весу. Помогите астронавту погрузить на борт предметы таким образом, чтобы корабль мог взлететь, а суммарная ценность груза была максимальной.

Построим математическую модель (моделирование):

Пусть множество $I = \{1, \dots, n\}$ будет множеством минералов, W_i – вес минерала $i \in I$, C_i – ценность минерала $i \in I$, и W – вместимость корабля. Обозначим $x_i \in \{0, 1\}$ ($\in B$), $i \in I$, переменные задачи. Пусть $x_i = 1$, если мы взяли минерал $i \in I$ на борт, и $x_i = 0$ в противном случае. Тогда можно записать математическую модель следующим образом:

Пример оптимизационной задачи: задача о космическом корабле (рюкзаке)

$$\max_{x \in B^n} \sum_{i \in I} C_i x_i$$

при условии, что

$$\sum_{i \in I} W_i x_i \leq W$$

Оптимизационная (экстремальная) задача (каноническая форма)

В оптимизационной (экстремальной) задаче требуется найти:

$$\min f(x) \quad || \quad f(x) \rightarrow \min \quad (1)$$

при условии, что $x \in Q$, где Q – множество допустимых решений (допустимое множество, допустимая область). Чаще всего Q представляет собой множество решений системы:

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$x \in S \subseteq R^n \text{ или } Z^n \text{ или } B^n. \quad (3)$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор переменных;

$f : R^n \rightarrow R$ – целевая функция задачи;

$\min f(x)$ – критерий оптимизации;

$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, x \in S$ – ограничения задачи.

Замечание:

1) $\max f(x) \Leftrightarrow \min -f(x)$;

2) $\varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_i(x) \leq 0$ и $-\varphi_i(x) \leq 0$.

Пример оптимизационной задачи: задача о космическом корабле (рюкзаке)

$$\max_{x \in B^n} \sum_{i \in I} C_i x_i$$

при условии, что

$$\sum_{i \in I} W_i x_i \leq W$$

Или в канонической форме:

$$\min - \sum_{i \in I} C_i x_i$$

при условии, что

$$\sum_{i \in I} W_i x_i - W \leq 0$$

$$x \in B^n$$

Вектор x – допустимое решение задачи, если выполняются ограничения (2),(3).

$Q = \{x \in R^n | \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, x \in S\}$ – множество допустимых решений задачи.

Оптимальное решение (глобальный минимум) – любое допустимое решение задачи, на котором достигается минимум целевой функции f на множестве Q .

Задача оптимизации решена, если

- либо найдено её оптимальное решение,
- либо найден конечный инфимум целевой функции на множестве Q , в случае, когда оптимального решения не существует,
- либо доказано, что целевая функция неограничена снизу на множестве допустимых решений,
- либо установлено, что множество допустимых решений задачи пусто.

Примеры: $\min x + y$, если $x + y = 5$;

$$\min_{x \geq 1} x^{-1};$$

$$\min x;$$

$$\min 0, \text{ если } x \leq 1 \text{ и } x \geq 2.$$

Возьмем пару оптимизационных задач A и B с целевыми функциями f_A и f_B и допустимыми областями Q_A и Q_B соответственно.

Пара оптимизационных задач A и B эквивалентны, если они одновременно разрешимы или неразрешимы, а также существуют отображения $G_{AB} : Q_A \rightarrow 2^{Q_B}$ и $G_{BA} : Q_B \rightarrow 2^{Q_A}$ такие, что:

- 1) для любого $q \in Q_A$, $G_{AB}(q)$ не пусто;
- 2) для любого $q \in Q_B$, $G_{BA}(q)$ не пусто;
- 3) для произвольных $q_1, q_2 \in Q_A$, если $f_A(q_1) \leq f_A(q_2)$, то и $f_B(\bar{q}_1) \leq f_B(\bar{q}_2)$, для любых $\bar{q}_1 \in G_{AB}(q_1)$ и $\bar{q}_2 \in G_{AB}(q_2)$;
- 4) для произвольных $q_1, q_2 \in Q_B$, если $f_B(q_1) \leq f_B(q_2)$, то и $f_A(\bar{q}_1) \leq f_A(\bar{q}_2)$, для любых $\bar{q}_1 \in G_{BA}(q_1)$ и $\bar{q}_2 \in G_{BA}(q_2)$.

$$1) g(x) = 0 \equiv g(x) \leq 0, -g(x) \leq 0;$$

$$2) g(x) \leq 0 \equiv g(x) + y = 0, \text{ где } y \geq 0;$$

$$3) \max_{x \in Q} g(x) \equiv \min_{x \in Q} -g(x)$$

Пример оптимизационной задачи: задача о космическом корабле (другая запись мат. модели)

$$\max_{\tilde{I} \subseteq I} \sum_{i \in \tilde{I}} C_i$$

при условии, что

$$\sum_{i \in \tilde{I}} W_i \leq W$$

Или в канонической форме:

$$\min - \sum_{i \in \tilde{I}} C_i$$

при условии, что

$$\sum_{i \in \tilde{I}} W_i - W \leq 0$$

$$\tilde{I} \subseteq I$$

Классификация задач

В зависимости от природы множества S задачи оптимизации классифицируются как:

- дискретные (комбинаторные) – S конечно или счетно,
- целочисленные – $x \in S \subseteq Z^n$,
- булевы – $x \in S \subseteq B^n$,
- вещественные (непрерывные) – $x \in S \subseteq R^n$,
- бесконечномерные – S подмножество гильбертова пространства.

Если $S = R^n$ или Z^n или B^n , ($m = 0$), то говорят о задаче безусловной оптимизации. В противном случае говорят о задаче условной оптимизации.

Производитель назначает на своих предприятиях цену на однородный продукт;

Каждый потребитель выбирает то предприятие, на котором его суммарные затраты на покупку и транспортировку товара минимальны, и совершает покупку только в том случае, когда эти затраты не превышают бюджет;

Цель игры – найти такие цены, при которых доход производителя максимален.

Задача ценообразования

Введем обозначения:

$I = \{1, \dots, m\}$ – множество предприятий;

$J = \{1, \dots, n\}$ – множество потребителей;

$b_j \geq 0$ – бюджет j -го потребителя;

$c_{ij} \geq 0$ – транспортные затраты j -го потребителя, если он обслуживается в i -м предприятии;

$p_i \geq 0$ – цена продукции на предприятии i ;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если потребитель } j \text{ обслуживается в предприятии } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in J} x_{ij} \rightarrow \max_{p, x}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1, j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} (b_j - c_{ij} - p_i) x_{ij} \geq 0, j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} (c_{ij} + p_i) x_{ij} \leq c_{kj} + p_k, k \in I, j \in J;$$

$$p_i \geq 0, x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J.$$

Задача. Имеется набор камней определенного веса. Можно ли разбить этот набор на два равновеликих набора (одинакового веса)?

Требуется построить математическую модель.

Задача. Имеется N работников и N станков. Известна эффективность каждого работника на каждом станке. Требуется разместить работников по станкам так, чтобы их суммарная эффективность была максимальной | чтобы минимальная эффективность работников была максимальной.

Требуется построить математическую модель.