МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
Лекция 2: Задачи линейного программирования

Панин Артем Александрович
Email: aapanin1988@gmail.com

Новосибирский государственный университет

2025

Задача линейного программирования (ЛП) в канонической форме:

$$w(x) = (c, x) \longrightarrow \min \tag{5}$$

$$Ax = b, \tag{6}$$

$$x \geq 0, \tag{7}$$

где $c = (c_j), x = (x_j) \in R^n$, $A = (a_{ij})$ — $(m \times n)$ матрица, $b = (b_i) \in R^m$, $m \leq n$, $rang(A) = m$.

$$Ax = b \equiv (a_i, x) = b_i, i = \overline{1, m},$$

$$Ax = b \equiv \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b.$$

Линейное программирование (ЛП)

Произвольная задача линейного программирования:

$$w(x) = (c, x) \longrightarrow \min(\max)$$

$$(a_i, x) \leq b_i, i \in I_1;$$

$$(a_i, x) = b_i, i \in I_2;$$

$$x_j \geq 0, j \in J_1;$$

$$x_j \text{ – свободное}, j \in J_2.$$

Замечание 2: любую задачу ЛП можно свести к эквивалентной задаче ЛП в канонической форме:

$1)(a_i, x) \leq b_i \Leftrightarrow (a_i, x) + y = b_i, i \in I_1; y \geq 0,$

$2)x_j$ – свободное $\Leftrightarrow x_j + y_1 - y_2 = 0; y_1, y_2 \geq 0,$

$3)(c, x) \longrightarrow \max \Leftrightarrow -(c, x) \longrightarrow \min$

Базис — любой набор $A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}$ из m линейно независимых столбцов матрицы системы ограничений A.
Матрица $B = [A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}]$ называется базисной.

Обозначения:

$$S = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}, S^{'} = \{1, \ldots, n\} \setminus S, A = [B, N],$$

где $N = [A_j]_{j \in S'}$, $x = (x_B, x_N)$, $x_B = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ — базисные, а $x_N = (x_j)_{j \in S'}$ — небазисные переменные.

$$E\ x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \qquad (6^{'})$$

Определение 3. Решение $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$ системы уравнений (6) назовем базисным (соответствующим базису B).

Лемма 3. Вектор x — базисное решение системы (6) тогда и только тогда, когда множество столбцов с индексами из множества $S(x) = \{j | x_j \neq 0\}$ — линейно независимо.

Док-во: Дополним столбцы с индексами из $S(x)$ до базиса. ■

Определение 4. Базисным допустимым решением (б.д.р.) называется любой элемент множества Q, являющийся базисным решением системы уравнений (6).

Замечание 3. Решение соответствующее базису B — б.д.р. $\Longleftrightarrow$ $B^{-1}b \geq 0$.

Определение 5. Вектор $x \in Q$ — **крайняя точка или вершина** множества Q, если не существует допустимых решений $x^1 \neq x^2$ из Q таких, что $x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$, где $0 < \alpha < 1$.

Теорема 2. Вектор x — б.д.р. тогда и только тогда, когда x — крайняя точка множества Q.

Доказательство. Пусть x — крайняя точка, но не б.д.р. Из леммы 3 $\Longrightarrow$

$$\exists\ y \neq 0 : \ Ay = 0, \tag{$*$}$$

при этом $(x_j = 0 \Longrightarrow y_j = 0) \Longrightarrow$

$$\{j | y_j \neq 0\} \subseteq \{j | x_j > 0\}. \tag{$**$}$$

Т.к. $x \in Q$, то из $(*) \Longrightarrow$

$$\forall\ t \in R : z(t) = x + t\ y \text{ — решение (6),}$$

тогда из $(**) \Longrightarrow$

$$\forall \text{ малого } t \in R : \ z(t) \in Q.$$

$\Longrightarrow$

$$\exists\ \varepsilon > 0 : \ x^1 = x + \varepsilon y \in Q, x^2 = x - \varepsilon y \in Q,$$

$\Longrightarrow$

$$x^1 \neq x^2 \text{ и } x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x \text{ не крайняя точка — противоречие } \Rightarrow$$

$$x \text{ — б.д.р.}$$

Пусть x — б.д.р., но

$$\exists\ 0 < \alpha < 1, \exists\ x^1 \neq x^2, x^1, x^2 \in Q : x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2.$$

По условию $Ax^1 = Ax^2 (= b) \Longrightarrow A(x^1 - x^2) = 0$, но

$$A(x^1 - x^2) = 0 \Longleftrightarrow \{A_j | x_j^1 \neq x_j^2\} \text{ — линейно зависимо } \Rightarrow$$

$$\{A_j | \alpha x_j^1 + (1-\alpha)x_j^2 > 0\} \text{ — линейно зависимо } \Rightarrow$$

$$\{A_j | x_j > 0\} \text{ — линейно зависимо } \Rightarrow x \text{ не б.д.р. — противоречие,}$$

т.е. если x — б.д.р., то x — крайняя точка множества Q. ■

Теорема 4 (Критерий разрешимости). Задача линейного программирования (5)-(7) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена (снизу) на нем.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности покажем, что

$$\forall\ x^0 \in Q\ \exists\ \text{б.д.р.}\ \overline{x} : w(\overline{x}) \leq w(x^0).$$

Пусть

$$\overline{x} \in Q^0 = \{x \in Q | w(x) \leq w(x^0)\} \neq \emptyset$$

и имеет минимальное число ненулевых компонент $(supp(\overline{x}))$.

Докажем, что $\overline{x}$ — б.д.р. Допустим противное. $\Longrightarrow$

множество

$$\{A_j | \overline{x}_j > 0\} \text{ линейно зависимо } \Longrightarrow$$

$$\exists\ y \neq 0 : Ay = 0 \text{ и } \text{ если } \overline{x}_j = 0, \text{ то } y_j = 0.$$

Пусть $w(y) \leq 0$ (если необходимо, то возьмем $-y$). Положим $x(t) = \overline{x} + ty$. Выполняется следующее свойство

$$\forall \text{ малого } t \in R : \ x(t) \in Q.$$

1). Пусть $\forall j : y_j \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0\ x(t) \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0\ x(t) \in Q$

отсюда и неравенства $w(x(t)) = w(\overline{x}) + tw(y) \geq const$(по условию)

учитывая, что $w(y) \leq 0$ и $t \geq 0$ — произвольно,

имеем: $w(y) = 0$ и, следовательно, $w(x(t)) = w(\overline{x})\ \forall t$.

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. из условия $y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j > 0$, то

$$\forall \text{ малого по абсолютной величине } t < 0 : \; x(t) \in Q.$$

Найдем такое $\bar{t}$ наибольшее по абсолютной величине из условия:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j + \bar{t} y_j \geq 0)$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j \geq (-\bar{t}) y_j) \iff$$

$$(-\bar{t}) = \min_{y_j > 0} \frac{\overline{x}_j}{y_j} \iff \bar{t} = -\min_{y_j > 0} \frac{\overline{x}_j}{y_j}.$$

Итак $x(\bar{t}) \in Q$ и $w(x(\bar{t})) = w(\overline{x}) \leq w(x^0) \Rightarrow x(\bar{t}) \in Q^0$.

Получили противоречие. Т.к. $supp(x(\bar{t})) \leq supp(\overline{x}) - 1$.

2). Пусть $\exists j : y_j < 0$. Тогда

$$\forall \text{ достаточно малых } t \geq 0 : \ x(t) \in Q.$$

Найдем наибольшее такое $\bar{t}$ из условия:

$$\forall j (y_j < 0 \Rightarrow \overline{x}_j + \bar{t} y_j \geq 0)$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall j (y_j < 0 \Rightarrow \overline{x}_j \geq \bar{t}(-y_j)) \iff$$

$$\iff \bar{t} = \min_{y_j < 0} \frac{\overline{x}_j}{-y_j}.$$

Итак $x(\bar{t}) \in Q$ и т.к. $\bar{t} > 0, d \leq 0$, то $w(x(\bar{t})) = w(\overline{x}) + d\bar{t} \leq$
$\leq w(x^0) \Rightarrow x(\bar{t}) \in Q^0$.

Получили противоречие. Т.к. $supp(x(\bar{t})) \leq supp(\overline{x}) - 1$.

Т.к. по условию $Q \neq \varnothing$, то множество базисных допустимых решений задачи не пусто. Т.к. оно конечно, то

$$\exists\, x^* \text{ — б.д.р.: } w(x^*) \leq w(x) \ \forall \text{ б.д.р. } x.$$

Из ранее доказанного следует, что x^* — оптимальное решение. ■

Следствие 3. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следует из доказательства теоремы 4 (взять $w(x) \equiv 0$).

Следствие 4. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.

Определение грани множества Q

Пусть $S^{'} \cup S = \{1, \ldots, n\}$, $S^{'} \cap S = \emptyset$. Множество решений системы уравнений

$$Ax = b, x_j = 0, j \in S^{'}, x_j \geq 0, j \in S,$$

называется гранью множества допустимых

решений (6)-(7).

Величина $n - m - |S^{'}|$ — размерность данной грани (здесь $m + |S^{'}|$ – ранг системы уравнений).

Так как $\overline{x}$ – б.д.р., то $|S^{'}| = n - m$, следовательно, $\overline{x}$ – грань размерности 0.

Если $|S^{'}| = n - m - 1$, то получим грань размерности 1, т.е. ребро: ограниченное или неограниченное.