МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
Лекция 3: Симплекс-метод

Панин Артем Александрович
Email: aapanin1988@gmail.com

Новосибирский государственный университет

2025

ЛП: Критерий разрешимости

Теорема 4 (Критерий разрешимости). Задача линейного программирования (5)-(7) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем.

Следствие 3. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следствие 4. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.

Определение грани множества Q

Пусть $S^{'} \cup S = \{1, \ldots, n\}$, $S^{'} \cap S = \emptyset$. Множество решений системы уравнений

$$Ax = b, x_j = 0, j \in S^{'}, x_j \geq 0, j \in S,$$

называется гранью множества допустимых

решений (6)-(7).

Определение грани множества Q

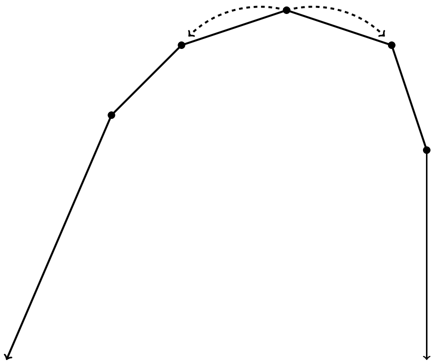
Величина $n - m - |S^{'}|$ — размерность данной грани (здесь $m + |S^{'}|$ – ранг системы уравнений).

Так как $\overline{x}$ – б.д.р., то $|S^{'}| = n - m$, следовательно, $\overline{x}$ – грань размерности 0.

Если $|S^{'}| = n - m - 1$, то получим грань размерности 1, т.е. ребро: ограниченное или неограниченное.

Идея симплекс-метода

1) Разумно упорядоченный перебор вершин множества Q (б.д.р.);
2) Переход от одной вершины к другой по ребру.



Пусть $\overline{x}$ — б.д.р., $B = (A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)})$ — базисная матрица. Тогда

$$Ex_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \tag{6'}$$

следовательно

$$Ex_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, \text{ и}$$

$$w(x) = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N, \tag{5'}$$

Симплекс-метод

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

Величины z_{0j} называются оценками замещения. Знак оценки замещения определяет характер изменения целевой функции при движении по ребру.

$$(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j,\quad j = 1, \ldots, n.$$

Элементарное преобразование б.д.р.

$x(t), t \geq 0:$

$$\begin{gathered} x_{\sigma(i)}(t) = \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\ x_s(t) = t, \\ x_j(t) = 0, j \in S' \backslash s \end{gathered} \tag{8}$$

Лемма 4 (признак оптимальности). Если оценки замещения неотрицательны, то текущее базисное допустимое решение $\overline{x}$ является оптимальным решением задачи (5)–(7).

Пусть $x \in Q$. Так как $z_{0j} \geq 0$ и $x_j \geq 0$, $j \in S'$, то из $(5^{'})$ следует, что

$$w(x) = c_B B^{-1} b + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j \geq c_B B^{-1} b =$$

$= w(\overline{x})$ ■

Лемма 5 (о неразрешимости). Если для номера s оценка замещения $z_{0s} < 0$ и для всех индексов i коэффициенты замещения z_{is} неположительны, то в задаче (5)–(7) не существует оптимального решения.

Лемма 6 (о существовании лучшей вершины). Если оценка замещения $z_{0s} < 0$ и существуют базисные переменные с коэффициентами замещения $z_{is} > 0$, то элементарное преобразование приведёт либо в вершину с меньшим значением целевой функции, либо вершина останется прежней, но изменится её базис.

Доказательство. Пусть

$$\bar{t} = \frac{\overline{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is}>0,\ i\geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Предположим, что $\bar{t} > 0$. Тогда

$$\forall i \forall t < \bar{t}: \ x_{\sigma(i)}(t) = \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t > 0,$$

$x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = 0$ и для $\forall t > \bar{t}$ имеем $x_{\sigma(r)}(\bar{t}) < 0 \Longrightarrow$

Семейство векторов $x(t), 0 \leq t \leq \bar{t}$ – ограниченное ребро множества Q.
Вектор $x(\bar{t})$ – б.д.р.:

$$(z_{1s}, \ldots, z_{ms})^{\top} = B^{-1} A_s \Longleftrightarrow$$

$$A_s = B(z_{1s}, \ldots, z_{ms})^{\top} \Longleftrightarrow$$

$$A_s = \sum_{i=1}^{m} z_{is} A_{\sigma(i)} \text{ (отсюда и условия) } z_{rs} > 0$$

следует, что матрица B' со столбцами

$$[A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}]$$

невырождена.
Следовательно $B^{'}$ – базис б.д.р. $x(\bar{t})$. Т.к.

$$\forall t, 0 < t \leq \bar{t}, w(x(t)) = -z_{00} + z_{0s}t < -z_{00},$$

то $x(\bar{t})$ – искомое б.д.р. с меньшим значением целевой функции.

Пусть $\bar{t} = 0$. В силу выбора $r : x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = = x_{\sigma(r)}(0) = \overline{x}_{\sigma(i)} = z_{r0} = 0$.
Т.к. $z_{rs} > 0$, то матрица $B^{'}$ со столбцами

$$[A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}]$$

снова невырождена. Следовательно $B^{'}$ – другой базис вершины $\overline{x}$. ■

Симплекс-таблица

x – допустимое решение задачи (5–7) со значением целевой функции $(c, x) = w \Leftrightarrow$ пара (w, x) – решение системы уравнений $(5')$, $(6')$, (7) или системы

$$-w + (c_N - c_B B^{-1} N)x_N = -c_B B^{-1} b, \tag{5'}$$

$$E x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b, \tag{6'}$$

$$x \geq 0 \tag{7}$$

Симплекс-таблица

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \qquad (5'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \ i = \overline{1, m}, \qquad (6'')$$

где

$$z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\overline{x}),$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \ j = 1, \ldots, n,$$

$$(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \ \ j = 1, \ldots, n.$$

Симплекс-таблица

		x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
$-w$	z_{00}	z_{01}	$\dots$	z_{0j}	$\dots$	z_{0n}
$x_{\sigma(1)}$	z_{10}	z_{11}	$\dots$	z_{1j}	$\dots$	z_{1n}
$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_{\sigma(i)}$	z_{i0}	z_{i1}	$\dots$	z_{ij}	$\dots$	z_{in}
$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_{\sigma(m)}$	z_{m0}	z_{m1}	$\dots$	z_{mj}	$\dots$	z_{mn}

Симплекс-таблица

$$
\begin{array}{c|c|cccccccc|}
 & & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_n \\
\hline
-w & z_{00} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & z_{0m+1} & \dots & z_{0n} \\
\hline
x_1 & z_{10} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & z_{1m+1} & \dots & z_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_i & z_{i0} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & z_{im+1} & \dots & z_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_m & z_{m0} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & z_{mm+1} & \dots & z_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Определение 6. Симплекс–таблица прямо допустима, если $z_{i0} \geq 0,\ i = 1, \dots, m.$

Базис B, соответствующий ей, также называется прямо допустимым.

Определение 7. Симплекс–таблица двойственно допустима, если $z_{0j} \geq 0,\ j = 1, \dots, n.$

Базис B, соответствующий этой таблице, также называется двойственно допустимым.

Элементарное преобразование б.д.р.

$x(t), t \geq 0:$

$$\begin{aligned} x_{\sigma(i)}(t) &= \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\ x_s(t) &= t, \\ x_j(t) &= 0, j \in S' \backslash s \end{aligned} \tag{10}$$

$$\bar{t} = \frac{\overline{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is}>0,\ i\geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Симплекс-таблица

$\alpha'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \ldots, z'_{in})\,(i = \overline{0,m})$ строки новой симплекс– таблицы:

$$\begin{cases} \alpha'_i &= \alpha_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r,\ i \neq r, \\ \alpha'_r &= \dfrac{1}{z_{rs}}\alpha_r. \end{cases} \tag{11}$$

r-я строка, s-й столбец и элемент z_{rs} называются ведущими.

Соотношения (11) эквивалентны следующим

$$\begin{cases} z'_{ij} & = & z_{ij} - \dfrac{z_{is} z_{rj}}{z_{rs}}, \ i \neq r, \\ z'_{rj} & = & \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Замечание 3. Элементарные преобразования сохраняют прямо допустимость с.-т.

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $z_{0j} \geq 0,\ \ j = \overline{1, n}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $s : z_{os} < 0,\ \ s \geq 1$.

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{\ \frac{z_{i0}}{z_{is}}\ \mid\ z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить

$\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Пусть $\alpha', \alpha'' \in R^{n+1}$.

Вектор α' лексикографически больше вектора α'' $(\alpha' \succ \alpha'') \Leftrightarrow$ $\alpha' - \alpha'' \succ 0$.

Симплекс-таблица *нормальна*, если каждая ее строка $\alpha_i,\ i = 1, \ldots, m$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический с. - м.

0) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = lex\min\{\ \frac{1}{z_{is}}\alpha_i\ \mid\ z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Лексикографический с. - м.

Сохранение нормальности с.-т. на шаге 4:

1. $\alpha_r \succ 0$, $z_{rs} > 0 \Rightarrow \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r \succ 0$
2. $z_{is} \leq 0 \Rightarrow \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r \succeq \alpha_i \succ 0$
3. $z_{is} > 0 \Rightarrow z_{is}[\frac{1}{z_{is}}\alpha_i - \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r] \succ 0$.

Лексикографическое возрастание 0-й строки:

$z_{0s} < 0$, $z_{rs} > 0$ и $\alpha_r \succ 0$, то

$$\alpha_0 - \frac{z_{0s}}{z_{rs}}\alpha_r \succ \alpha_0.$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.

Метод искусственного базиса

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\xi = u_1 + \cdots + u_m \longrightarrow \min$$

$$Ax + Eu = b \geq 0$$

$$(a_i x + u_i = b_i \geq 0, i = \overline{1, m})$$

$$x, u \geq 0$$

$z^0 = (0, b) \in R^{n+m}$ – б.д.р.

Вспомогательная задача разрешима и $\min \xi \geq 0$. Пусть $z^* = (x^*, u^*)$ – оптимальное решение

A. $\min \xi > 0 \Longleftrightarrow Q = \emptyset$

B. $\min \xi = 0 \Longrightarrow u_i^* = 0$, $i = \overline{1, m}$, $\Longrightarrow$ вектор x^* – доп. реш. задачи (5)-(7) $\Longrightarrow x^*$ – б.д.р. задачи (5)-(7).

$\{A_j | j \in S\} \cup \{E_i | i \in I^{'}\}$ – базис z^*, где

$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $I^{'} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ и

Метод искусственного базиса

$$|S| + |I^{'}| = m.$$

Возможны случаи:

B1. $I^{'} = \emptyset$.

B2. $I^{'} \neq \emptyset$ и $\exists r \in I^{'}, \exists s \notin S \; z_{rs} \neq 0$.

B3. $I^{'} \neq \emptyset$ и $\forall r \in I^{'}, \forall s = \overline{1, n} \; z_{rs} = 0$.

B1. $I^{'} = \emptyset \Longrightarrow |S| = m \Longrightarrow$ множество $\{A_j | j \in S\}$ – базис б.д.р. x^*.

Преобразовать оптимальную с.-т.:

1. Вычеркнуть столбцы для переменных:

$u_1, \ldots, u_m$.

2. Пересчитать 0-строку: $z_{00} = -(c, x^*)$,

$z_{0k} = 0, k \in S,\ z_{0k} = c_k - \sum_{j \in I} c_j z_{jk}, k \notin S$.

B2. $I^{'} \neq \emptyset$ и $\exists r \in I^{'}$, $\exists s \notin S$ $z_{rs} \neq 0 \Longrightarrow$ Выполнить элементарное преобразование с.-т. с ведущим элементом $z_{rs} \neq 0$. Новая с.-т. соответствует базису

$$\{A_j | j \in S \cup \{s\}\} \cup \{E_i | i \in I^{'} \setminus \{r\}\}.$$

В3. $I^{'} \neq \emptyset$ и $\forall r \in I^{'}, \forall s = \overline{1,n} : z_{rs} = 0.$
Ограничения $a_i x = b_i$ системы (6) с номерами $i \in I^{'}$ являются избыточными.