

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Лекция 4: Теория двойственности

Панин Артем Александрович
Email: aapanin1988@gmail.com

Новосибирский государственный университет

2025

Рассмотрим задачу P с произвольными функциями f и φ_i :

$$f(x) \longrightarrow \min \quad (1)$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Определение 1. Функцию

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x),$$

определенную при всех x и λ , назовем функцией Лагранжа для задачи (1), (2).

Пусть

$$g(x) = \sup_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$$

Тогда

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q, \\ +\infty, & x \notin Q. \end{cases} \implies$$

Задача P эквивалентна следующей:

$$g(x) \longrightarrow \min$$

Пусть

$$h(\lambda) = \inf_{x \in R^n} L(x, \lambda).$$

Рассмотрим задачу D :

$$h(\lambda) \longrightarrow \max_{\lambda \geq 0}.$$

(D) – задача двойственная к прямой (или исходной) задаче P .

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – двойственные переменные,

x_1, \dots, x_n – прямые переменные.

Если $x \in Q$, $\lambda \geq 0$, то x – допустимое решение прямой задачи, а λ – допустимое решение двойственной задачи.

Лемма 1. (Слабая теорема двойственности).

$$\forall x \in Q \quad \forall \lambda \geq 0 \quad (h(\lambda) \leq f(x)).$$

Док-во: $h(\lambda) = \inf_{\tilde{x} \in R^n} L(\tilde{x}, \lambda) \leq L(x, \lambda) \leq \sup_{\tilde{\lambda} \geq 0} L(x, \tilde{\lambda}) = f(x). \blacksquare$

Лемма 2. Если $\bar{x} \in Q$ и $\bar{\lambda} \geq 0$ и $f(\bar{x}) = h(\bar{\lambda})$, то \bar{x} и $\bar{\lambda}$ – оптимальные решения задачи P и D , соответственно.

Определение 2. Пара (x^*, λ^*) , $\lambda^* \geq 0$, называется седловой точкой функции Лагранжа, если

$$L(x^*, \lambda) \stackrel{(4)}{\leq} L(x^*, \lambda^*) \stackrel{(5)}{\leq} L(x, \lambda^*) \quad \forall x \in R^n, \forall \lambda \geq 0.$$

Теорема 1. Вектора $\bar{x}, \bar{\lambda}$ – оптимальные решения прямой и двойственной задачи и $f(\bar{x}) = h(\bar{\lambda})$ тогда и только тогда, когда пара $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ – седловая точка функции Лагранжа. При этом $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) = h(\bar{\lambda})$.

Док-во:

1) НЕОБХОДИМОСТЬ.

Пусть $\bar{x}, \bar{\lambda}$ – оптимальные решения прямой и двойственной задачи.
Тогда:

$$f(\bar{x}) = \sup_{\lambda \geq 0} L(\bar{x}, \lambda) \geq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq \inf_{x \in R^n} L(x, \bar{\lambda}) = h(\bar{\lambda}).$$

Но $f(\bar{x}) = h(\bar{\lambda})$. Возьмем произвольные $x \in R^n$, $\lambda \geq 0$. Получается, что

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq \sup_{\lambda \geq 0} L(\bar{x}, \lambda) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \inf_{x \in R^n} L(x, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}).$$

Из последнего следуют (4) и (5).

2) ДОСТАТОЧНОСТЬ.

Пусть $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ – седловая точка функции Лагранжа. Тогда из (4) следует:

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) \varphi_i(\bar{x}) \leq 0, \forall \lambda \geq 0.$$

Предположим, что $\bar{x} \notin Q$. Т.е. $\exists i : \varphi_i(\bar{x}) > 0$. Тогда для достаточно большого $\lambda_i > 0$:

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) \varphi_i(\bar{x}) > 0.$$

Противоречие. Следовательно, $\bar{x} \in Q$.

При $\lambda = 0$ имеем:

$$\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \varphi_i(\bar{x}) \geq 0,$$

откуда:

$$\bar{\lambda}_i \varphi_i(\bar{x}) = 0, \forall i = \overline{1, m}.$$

Следовательно, $f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda})$. Из (5) следует, что:

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \inf_{x \in R^n} L(x, \bar{\lambda}) = h(\bar{\lambda}).$$

По Лемме 2, \bar{x} и $\bar{\lambda}$ – оптимальные решения прямой и двойственной задачи, соответственно. ■

Следствие Пусть $x^*, \bar{x} \in Q, \lambda^*, \bar{\lambda} \geq 0$.

Если пары $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ и (x^*, λ^*) — седловые точки функции Лагранжа, то пары (\bar{x}, λ^*) и $(x^*, \bar{\lambda})$ — также седловые точки функции Лагранжа, причем

$$L(x^*, \bar{\lambda}) = L(\bar{x}, \lambda^*) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = L(x^*, \lambda^*).$$

Задача (5) – (7) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned}(c, x) &\longrightarrow \min \\(a_i, x) - b_i &\leq 0, & \lambda_i^1 &\geq 0 \\-(a_i, x) + b_i &\leq 0, & \lambda_i^2 &\geq 0 \\-x_j &\leq 0. & \mu_j &\geq 0\end{aligned}$$

Ее функция Лагранжа:

$$\begin{aligned}L(x, \lambda^1, \lambda^2, \mu) &= (c, x) + (\lambda^1, Ax - b) + (\lambda^2, -Ax + b) + (\mu, -x) = \\&= \left(c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu, x \right) - (\lambda^1 - \lambda^2, b).\end{aligned}$$

Следовательно, целевая функция двойственной задачи имеет вид:

$$h(\lambda^1, \lambda^2, \mu) = \inf_x L(x, \lambda^1, \lambda^2, \mu) =$$
$$= \begin{cases} -(b, \lambda^1 - \lambda^2), & \text{если } c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \implies$$

Двойственная задача

$$h(\lambda^1, \lambda^2, \mu) \longrightarrow \sup_{\lambda^1 \geq 0, \lambda^2 \geq 0, \mu \geq 0},$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(b, \lambda^1 - \lambda^2) \longrightarrow \max$$

$$c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu = 0 \equiv c + (\lambda^1 - \lambda^2)A \geq 0.$$

Умножим ограничения на -1 , обозначим $y = -(\lambda^1 - \lambda^2)$

Получим

$$(b, y) \longrightarrow \max \quad (9)$$

$$yA \leq c. \quad (10)$$

Замечание. Для задач (5)-(7) и (9)-(10) выполняются все утверждения: л. 1, л. 2, теор. 1, следствия 1 — 2.

Теорема 4. Задача двойственная к задаче (9)-(10) совпадает с исходной задачей (5)-(7).

Доказательство. Задача (9)-(10) эквивалентна задаче

$$-(b, y) \longrightarrow \min$$

$$yA \leq c.$$

$$yA \leq c \equiv \text{системе неравенств } (y, A_j) - c_j \leq 0, \quad x_j \geq 0$$

(сопоставили каждому ограничению двойственную переменную (множитель Лагранжа))

Функция Лагранжа:

$$L(y, x) = -(b, y) + (x, yA - c) =$$

$$-(b, y) + (Ax, y) - (x, c) = (Ax - b, y) - (c, x).$$

Целевая функция двойственной задачи

$$h(x) = \inf_y L(y, x) =$$

$$\begin{cases} -(c, x), & \text{если } Ax = b, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \implies$$

Задача

$$\max_{x \geq 0} h(x)$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(c, x) \longrightarrow \max$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

или

$$\min(c, x)$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0.$$



Прямая задача

$$w(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$a_i x \geq b_i$$

$$a_i x = b_i$$

$$x_j \geq 0$$

x_j – своб.

$$i \in I_1$$

$$i \in I_2$$

$$j \in J_1$$

$$j \in J_2$$

Двойственная задача

$$z(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max$$

$$y_i \geq 0$$

y_i – своб.

$$y A_j \leq c_j$$

$$y A_j = c_j.$$

Упражнение.

Техника получения этой схемы: либо повторить выкладки, приведшие к задаче (9)–(10), либо воспользоваться сводимостью общей задачи ЛП к задаче ЛП в канонической форме и применить готовый рецепт (задача (9)–(10)).

Теорема 5 (Первая теорема двойственности). Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.

Доказательство. Согласно Лемме 1 (Слабой теореме двойственности) прямая и двойственная задача не могут быть одновременно неразрешимы в силу неограниченности значения целевой функции.

Без ограничения общности будем считать, что прямая задача в канонической форме. Допустим, что прямая задача разрешима. Тогда найдется оптимальный базис B ; $c_B B^{-1}b$ – оптимальное значение.

Рассмотрим означивание $y = c_B B^{-1}$; $(y, b) = c_B B^{-1}b$. Покажем, что $yA \leq c$:

$$yA = c_B B^{-1}[B, N] = [c_B, c_B B^{-1}N] \leq [c_B, c_N].$$

Теорема 6 (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). Допустимые решения \bar{x} и \bar{y} соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$y_i(a_i x - b_i) = 0 \quad (i \in I),$$

$$(c_j - y A_j) x_j = 0 \quad (j \in J).$$

Доказательство. Достаточность:

$$0 = y(Ax - b) + (c - yA)x = cx - yb = 0.$$

Необходимость:

$$\begin{aligned} 0 &= cx - yb = yAx - yb + cx - yAx = \\ &= y(Ax - b) + (c - yA)x = 0. \end{aligned}$$

Теорема 7 (Фаркаша–Минковского). Система уравнений $Ax = b, x \geq 0$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(b, y) \leq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA \leq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\exists x Ax = b, x \geq 0$ и пусть y — произвольное решение системы $yA \leq 0$. Тогда

$$(b, y) = (Ax, y) = (x, yA) \leq (x, 0) = 0.$$

Достаточность. Пусть неравенство $(b, y) \leq 0$ выполняется для всех решений системы неравенств $yA \leq 0$.

Рассмотрим прямую и двойственную задачи ЛП:

$$(P) : 0 \rightarrow \min_x$$

$$Ax = b;$$

$$x \geq 0.$$

$$(D) : by \rightarrow \max_y$$

$$yA \leq 0.$$

Следствие 3. Система уравнений $Ax \leq b$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(b, y) \geq 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA = 0, y \geq 0$.

$Ax \leq b$ разрешима \iff разрешима система
 $Ax_1 - Ax_2 + Eu = b, x_1, x_2, u \geq 0 \iff$ когда неравенство $(b, y) \leq 0$
выполняется для всех решений системы уравнений
 $yA \leq 0, -yA \leq 0, Ey \leq 0 \iff$ неравенство $(b, y) \geq 0$ выполняется для
всех решений системы уравнений $yA = 0, y \geq 0$. ■

Следствие 4 (теорема Гордана). Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений $Ax < 0$;
2. существует такой $\neq 0$ вектор y , что $yA = 0, y \geq 0$.

Действительно, система уравнений $Ax < 0$ разрешима \iff разрешима система уравнений $Ax \leq (-1, -1, \dots, -1)^T$. По теореме Ф.–М. разрешимость последней системы эквивалентна выполнению условия:

если вектор y решение системы $yA = 0, y \geq 0$, то выполняется неравенство $-y \geq 0$. Т.е. не существует ненулевого вектора y такого, что $yA = 0, y \geq 0$.

Теперь пусть существует ненулевой вектор y такой, что $yA = 0, y \geq 0$. Но тогда не выполняется неравенство $-y \geq 0 \implies$ не выполнено условие теоремы Ф.–М. \implies система $Ax \leq (-1, -1, \dots, -1)^T$ неразрешима \implies неразрешима система $Ax < 0$. ■