

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

## Лекция 5: Необходимые условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера (ККТ)

**Панин Артем Александрович**  
**Email: aapanin1988@gmail.com**

Новосибирский государственный университет

2025

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

Найти:

$$\min f(x) \quad (1)$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Здесь  $f, \varphi_i : R^n \rightarrow R$  и  $f, \varphi_i \in C^1$ .

**Определение 8.** Направление  $s \neq 0$  называется возможным в точке  $x \in Q$ , если существует такое число  $\bar{\beta} > 0$ , что  $x + \beta s \in Q, \forall \beta \in [0, \bar{\beta}]$ .

**Комментарий.** Множество  $K$  называется конусом, если  $\forall \lambda > 0$  и  $\forall x \in K$  имеем  $\lambda x \in K$ .

Очевидно, что множество возможных направлений в точке  $x$  образует конус, который обозначим как  $K_f(x)$ .

Ограничение  $\varphi_i$  называется **активным** в точке  $x$ , если  $\varphi_i(x) = 0$ .  $I(x)$  – множество номеров ограничений активных в данной точке.

**Лемма 7.** Если вектор  $s \neq 0$  удовлетворяет системе

$$(\varphi_i'(x), s) < 0, i \in I(x),$$

то направление  $s$  является **возможным** в точке  $x$ .

**Доказательство.** Считаем, что  $I(x) \neq \emptyset$  ( т.к. иначе любое направление  $s \neq 0$  является возможным)

Если  $i \notin I(x)$ , то малое перемещение не нарушает строгое ограничение  $\varphi_i(x) < 0 \implies$  найдется подходящее  $\bar{\beta}_i$ .

Пусть  $i \in I(x) (\equiv \varphi_i(x) = 0)$ . Далее рассуждаем от противного. Допустим, что  $\varphi_i(x + \beta s) > 0$ , для достаточно малых  $\beta > 0 \implies$

$$\begin{aligned} \varphi_i(x + \beta s)/\beta &= (\varphi_i(x + \beta s) - \varphi_i(x))/\beta \longrightarrow \\ &\longrightarrow (\varphi_i'(x), s) \geq 0 \quad (\text{при } \beta \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Противоречие. Т.к. по условиям леммы

$$(\varphi_i'(x), s) < 0, \blacksquare$$

**Комментарий.** Пусть  $K_{<}(x) = \{s | s \neq 0 \text{ и } (\varphi'_i(x), s) < 0, \forall i \in I(x)\}$ .  
Множество  $K_{<}(x)$  конус.

Лемма 7 утверждает, что конус  $K_{<}(x)$  является подмножеством конуса  $K_f(x)$ .

Поэтому назовем конус  $K_{<}(x)$  конусом внутренней аппроксимации конуса  $K_f(x)$ .

$$K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 \mid (\varphi'_i(x), s) \leq 0, \forall i \in I(x)\}.$$

Т.к.  $K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x)$ , то конус  $K_{\leq}(x)$  называется внешней аппроксимацией конуса возможных направлений.

**Теорема 7 (о замыкании конуса возможных направлений).**

$$\text{Если } K_{<}(x) \neq \emptyset, \text{ то } \overline{K}_f(x) = K_{\leq}(x).$$

**Доказательство.** Действительно, пусть конус  $K_{<}(x)$  не пуст. Тогда найдётся  $\bar{s}$  такой, что

$$(\varphi'_i(x), \bar{s}) < 0, \forall i \in I(x).$$

Пусть  $s \in K_{\leq}(x)$ , т.е.

$$(\varphi'_i(x), s) \leq 0, \forall i \in I(x).$$

Очевидно, что для любого  $\lambda \in [0, 1)$ :

$$\lambda s + (1 - \lambda)\bar{s} \in K_{<}(x).$$

Таким образом  $s$  предел последовательности направлений из  $K_{<}(x)$  при  $\lambda$  стремящимся к 1 снизу. Учитывая, что

$$K_{<}(x) \subseteq K_{\leq}(x),$$

получим  $\overline{K}_{<}(x) = K_{\leq}(x)$ .

Т.к.

$$K_{<}(x) \subseteq K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x),$$

то

$$\overline{K}_f(x) = K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 \mid (\varphi'_i(x), s) \leq 0, \forall i \in I(x)\}. \blacksquare$$

**Теорема 7 (Фаркаша–Минковского).** Система уравнений  $Ax = b, x \geq 0$  разрешима в том и только в том случае когда неравенство  $(b, y) \leq 0$  выполняется для всех решений системы уравнений  $yA \leq 0$ .

**Следствие 4 (теорема Гордана).** Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений  $Ax < 0$ ;
2. существует такой  $\neq 0$  вектор  $y$ , что  $yA = 0, y \geq 0$ .

**Теорема 8 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера).** Пусть  $x^*$  — локальный экстремум задачи (1), (2), функции  $f, \varphi_i, i = \overline{1, m}$ , непрерывны и непрерывно дифференцируемы и вектора  $\varphi'_i(x^*), i \in I(x^*)$ , линейно независимы. Тогда найдутся такие множители  $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ , что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*), \quad (3)$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

**Доказательство.**

# Необходимые условия оптимальности ККТ

Так как  $x^*$  — локальный минимум задачи (1), (2), то  
 $\forall s \neq 0$ , если  $s \in K_f(x^*)$ , то выполняется неравенство  $(f'(x^*), s) \geq 0$ .

Т.к.  $f \in C^1$ , то

$\forall s \neq 0$ , если  $s \in \overline{K_f}(x^*)$ , то выполняется неравенство  $(f'(x^*), s) \geq 0$ .

Линейная независимость градиентов активных ограничений  $\varphi'_i(x^*), i \in I(x^*)$  означает, что не существует таких ненулевых коэффициентов  $\lambda_i, i \in I(x^*)$ , что

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi'_i(x^*) = 0.$$

Отсюда при помощи теоремы Гордана (след-е теор. Ф.–М.) выводим, что найдется такой ненулевой вектор  $s$ , что

$$(\varphi'_i(x^*), s) < 0, \forall i \in I(x^*).$$

Т.е. конус  $K_{<}(x^*)$  является не пустым. Следовательно

$$\overline{K_f}(x^*) = \{s \neq 0 \mid (\varphi'_i(x^*), s) \leq 0, \forall i \in I(x^*)\}.$$

Итак имеем, что

$\forall s \neq 0$ , если  $(\varphi'_i(x^*), s) \leq 0, \forall i \in I(x^*)$ , то выполняется неравенство  $(-f'(x), s) \leq 0$ .

Тогда по теореме Фаркаша-Минковского  $\exists$  неотрицательное решение системы уравнений:

$$-f'(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi'_i(x^*), \quad (3)$$

Положим  $\lambda_i = 0, i \notin I(x^*)$  и получим

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*), \quad (3)$$

$$\lambda_i \varphi'_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

# Необходимые условия оптимальности ККТ: выпуклый случай

Задача (1), (2) называется задачей выпуклого программирования, если функции  $f, \varphi_i, i = \overline{1, m}$ , — выпуклы.

Множество  $Q$  выпукло. По прежнему считаем, что  $f, \varphi_i \in C^1$ .

Условие регулярности для выпуклого случая:

$$\forall i, i = \overline{1, m}, \exists x^i \in Q : \varphi_i(x^i) < 0.$$

Эквивалентно условию регулярности Слейтера

$$\exists \tilde{x} \in Q : \varphi_i(\tilde{x}) < 0, i = \overline{1, m}.$$

**Лемма 8.** Функция  $f$  дифференцируемая на выпуклом множестве  $Q$ , выпукла в том и только в том случае, когда для любых  $x, y \in Q$ :  $(f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x)$ .

# Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

**Лемма 9.** Если

$$Q = \{x \mid \varphi_i(x) = (a_i, x) - b_i \leq 0, i = \overline{1, m}\},$$

то условия

$$(a_i, s) \leq 0, i \in I(x^*)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы направление  $s$  было возможным в точке  $x^* \in Q$ .

**Доказательство.** Пусть  $\beta > 0$ . Рассмотрим

$$\varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = (a_i, x^*) - b_i + \beta(a_i, s).$$

$$\forall i \notin I(x^*) \quad (a_i, x^*) - b_i < 0 \Rightarrow \forall i \notin I(x^*) \quad \varphi_i(x^* + \beta s) \leq 0,$$

для достаточно малых  $\beta$ .

# Необходимые условия оптимальности ККТ: выпуклый случай

$$\begin{aligned} \forall i \in I(x^*) \quad \varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = \beta(a_i, s) &\Rightarrow \\ \Rightarrow x^* + \beta s \in Q \quad \forall \beta > 0 &\Leftrightarrow (a_i, s) \leq 0 \quad \forall i \in I(x^*). \blacksquare \end{aligned}$$

Другими словами в лемме утверждается, что  $K_f(x) = K_{\leq}(x)$

Эта лемма позволяет элиминировать условие Слейтера в задаче выпуклого программирования в случае линейных ограничений.

Помним: функции  $f, \varphi_i$  — выпуклые, непрерывно-дифференцируемые. Множество допустимых решений  $Q$  удовлетворяет условию Слейтера.

**Теорема 9 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме).** Точка  $x^* \in Q$  — оптимальное решение задачи выпуклого программирования в том и только в том случае, когда существуют такие числа  $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ , что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_i(x^*),$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

**Доказательство.** "Необходимость."

Из леммы 8 и условия Слейтера следует, что для любого  $i \in I(x^*)$

$$0 > \varphi_i(\tilde{x}) = \varphi_i(\tilde{x}) - \varphi_i(x^*) \geq (\varphi_i'(x^*), \tilde{x} - x^*).$$

Таким образом вектор  $s = (\tilde{x} - x^*) \in K_{<}(x^*)$ . Следовательно, по теореме о замыкании конуса возможных направлений имеем  $\overline{K}_f(x^*) = K_{\leq}(x^*)$ . Повторяем соответствующие рассуждения доказательства теоремы 8.

"Достаточность."

$$\forall z \in Q : s = (z - x^*) \in K_f(x^*) \Rightarrow (\varphi_i'(x^*), s) \leq 0, \forall i \in I(x^*).$$

$$\begin{aligned} \forall z \in Q : f(z) - f(x^*) &\geq (f'(x^*), z - x^*) = (f'(x^*), s) = \\ &(-\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i'(x^*), s) = \sum_{i=1}^m (-\lambda_i)(\varphi_i'(x^*), s) \geq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

**Теорема 10 (Теорема ККТ в локальной форме).**

Точка  $x^* \in Q$  — оптимальное решение задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями в том и только в том случае, когда существуют такие числа  $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ , что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i,$$

$$\lambda_i ((a_i, x) - b_i) = 0, i = \overline{1, m}.$$

**Теорема 11 (Теорема ККТ в нелокальной форме).** Вектор  $x^* \in Q$  является оптимальным решением задачи выпуклого программирования тогда и только тогда, когда существует такой вектор  $\lambda^*$ , что пара  $(x^*, \lambda^*)$  является седловой точкой функции Лагранжа.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $x^* \in Q$  — оптимальное решение. Тогда из теоремы 9 имеем

$$\exists \lambda^* \geq 0 : \left. \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} \right|_{(x^*, \lambda^*)} = f'(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \varphi_i'(x^*) = 0 \text{ и}$$

$$\lambda_i^* \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

**Достаточность.** Как в теореме 1. ■