МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Лекция 6: Методы решения конечномерных задач оптимизации (Задачи условной оптимизации)

Панин Артем Александрович
Email: aapanin1988@gmail.com

Новосибирский государственный университет

2025

Метод генерации столбцов

Рассмотрим (координирующую) задачу линейного программирования:

$$(c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \min$$

при условии, что

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b;$$

$$x \geq 0.$$

Пусть задача разрешима. Обозначим множество индексов переменных за J. Рассмотрим $J_0 \subset J$ такое, что система $\sum\limits_{j \in J_0} A_j x_j = b$ имеет неотрицательное решение.

Метод генерации столбцов

Рассмотрим релакисрованную координирующую задачу (для итерации k, $J_0 \subset J_k$):

$$\sum_{j \in J_k} c_j x_j \longrightarrow \min$$

$$\sum_{j \in J_k} A_j x_j = b;$$

$$x_j \leq 0, j \in J_k.$$

Рассмотрим двойственную к ней задачу:

$$yb \longrightarrow \max$$

$$yA_j \leq c_j, j \in J_k.$$

Метод генерации столбцов

Так как система ограничений прямой задачи совместна, тогда двойственная задача может быть неразрешима только в силу несовместности системы ограничений.

Если оптимальное решение y допустимо для J, то оно является оптимальным для двойственной к координирующей задаче, а текущий набор столбцов J_k является достаточным. Остается только решить релаксированную координирующую задачу.

Иначе найти нарушающий допустимость столбец j, положить $J_{k+1} := J_k \cup j$ и перейти на шаг $k + 1$.

Метод декомпозиции Бендерса

Рассмотрим задачу:

$$(c, x) + f(y) \longrightarrow \max_{x \geq 0, y \in Y}$$

при условии, что

$$Ax + F(y) \leq b.$$

Пусть задача разрешима, а (x^*, y^*) — оптимальное решение.
Расмотрим следующую задачу:

$$\max_{y \in Y \cap V} \{f(y) + \sup_{x \geq 0}[(c, x) | Ax \leq b - F(y)]\},$$

где V — проекция области допустимых решений задачи на переменные y.

$$V = \{y | \exists x \geq 0 : Ax \leq b - F(y)\}$$

Метод декомпозиции Бендерса

Рассмотрим задачу линейного программирования $P(y)$:

$$\max\{(c,x)|x \geq 0, Ax \leq b - F(y)\},$$

которая разрешима при $y = y^*$. Следоательно, двойственная к ней $D(y)$:

$$\min\{(b - F(y), u)|uA \geq c, u \geq 0\},$$

допустима для любого y.

Пусть $u_1, ..., u_p$ — вершины, а $u_{p+1}, ...u_{p+q}$ — направляющие вектора бесконечных ребер задачи $D(y)$.

Метод декомпозиции Бендерса

Задача $P(y)$ допустима $\iff$ задача $D(y)$ разрешима $\iff$

$$(b - F(y), u^j) \geq 0, j = p + 1, ...p + q.$$

Т.е. проекция представима в следующем виде:

$$\max_{y \in Y : (b - F(y), u^j) \geq 0, j = p+1, ...p+q} \{f(y) + \max[(c, x) | x \geq 0, Ax \leq b - F(y)]\}.$$

Получаем следующую задачу:

$$\max_{y \in Y : (b - F(y), u^j) \geq 0, j = p+1, ...p+q} \{f(y) + \min[(b - F(y), u^j), j = 1, ..., p]\}.$$

Метод декомпозиции Бендерса

Исходная задача эквивалентна следующей координирующей задаче:

$$\max_{y \in Y, y_0} \{f(y) + y_0\}$$

$$y_0 \leq (b - F(y), u^j), j = 1, ..., p;$$

$$(b - F(y), u^j) \geq 0, j = p + 1, ...p + q.$$

Проблема: большое число вершин и ребер! Приходится прибегать к релаксации.

Декомпозиции для максиминных задач

$$z = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} R(x, y).$$

Для некоторого $\tilde{Y} \subset Y$:
ШАГ 1. Решить релаксированную задачу:

$$\overline{z} = \max \gamma$$

$$\gamma \leq R(x, y), y \in \tilde{Y}.$$

Пусть x^* — оптимальное решение.
ШАГ 2. Решить подзадачу:

$$\underline{z} = \min_{y \in Y} R(x^*, y).$$

Пусть y^* — оптимальное решение.
ШАГ 3. Если $\overline{z} = \underline{z}$, то СТОП. Иначе $\tilde{Y} := \tilde{Y} \cup y^*$ и go to ШАГ 1.

Декомпозиции для максиминных задач

Если на ШАГах 1 и 2 существуют оптимальные решения, то $\overline{z} \geq z \geq \underline{z}$.

Если на одном из ШАГов 1 или 2 решение повторяется, то метод конечен.

Метод Келли или метод секущих плоскостей

Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования:

$$(c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \min$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}.$$

Пусть в задаче существует оптимальное решение x^*, которое содержится в многогранном множестве $Q_0 = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$, а также $Q \subseteq Q_0$.

Итерация k.

Шаг 1. Решаем задачу ЛП

$$(c, x) \longrightarrow \min$$

$$x \in Q^k,$$

где Q^k – текущее многогранное приближение множества Q, $Q \subseteq Q^k$.

Пусть x^k – оптимальное решение этой задачи. Если x^k – допустимое решение исходной задачи, то оно его оптимальное решение. Конец работы алгоритма. Иначе переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Найдём номер i_k ограничения, для которого величина $\varphi_{i_k}(x^k) > 0$ максимальна. Перейдём к выполнению следующей итерации с

$$Q^{k+1} = Q^k \cap \{x | \varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq$$

$$\leq 0.\}$$

Корректность определения множества Q^{k+1}.

1. Т.к. ограничение $\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq 0$ линейно, то множество Q^{k+1} является многогранным.

2. Т.к. множество Q^k и функция φ_{i_k} выпуклые, то

$$\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq \varphi_{i_k}(x)$$

для всех $x \in Q^k$ (Лемма 8, лек. № 5)$\Longrightarrow Q \subseteq Q^{k+1}$.

Метод Келли или метод секущих плоскостей

(Другими словами ограничение

$$\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) = 0$$

является отсечением, которое отсекает точку x^k.)

Если алгоритм останавливается через конечное число шагов, то текущее приближение – оптимальное решение задачи.

Когда последовательность $\{x^k\}$ бесконечна, любая предельная точка последовательности $\{x^k\}$, порождённая методом секущих плоскостей, есть оптимальное решение задачи.

$$\min f(x)$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим нелинейную функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\varphi_i(x)),$$

где для каждого i выполняется $\lambda_i(\varphi_i(x)) = 0$, если $\varphi_i(x) \leq 0$ и $\lambda_i(\varphi_i(x)) = +\infty$ иначе.

Очевидно, что исходная задача эквивалентна задаче

$$\min_x L(x, \lambda)$$

Метод внешних штрафов

Свести решение задачи

$$f(x) \to \min_{x \in Q} \tag{1}$$

$$Q = \{x \in R^n \mid \varphi_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m\} \tag{2}$$

к решению последовательности задач минимизации

$$F_k(x) = f(x) + P_k(x) \to \min_{x \in R^n}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

где $P_k(x)$ — штрафная функция множества Q.

Метод внешних штрафов

Определение. Функция $P_k(x)$ называется штрафной функцией множества Q, если $P_k(x) \geq 0$ для любых $k = 1, 2, \ldots,\ x \in R^n$ и

$$\lim_{k\to\infty} P_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in Q \\ +\infty, & \text{если } x \notin Q, \end{cases}$$

где $P_k(x) = kH(x)$, k – коэффициент штрафа.

Примеры:

$H(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+^2$ или $H(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+$ $([a]_+ = \max(0, a))$.

Метод внешних штрафов

Пусть $x^l = x(k_l)$ – оптимальное решение задачи без ограничений (5) на шаге l.

Шаг $l+1$. Найти решение задачи (5) с коэффициентом штрафа $k_{l+1} > k_l$. Если $H(x^{l+1}) \leq \varepsilon$, то алгоритм завершает работу, иначе перейти на следующий шаг.

Метод внутренних штрафов

Проблема метода внешних штрафов: приближения

$$x^1 = x^1(k_1), x^2 = x^2(k_2), \ldots, x^l = x^l(k_l), \ldots$$

не являются допустимыми решениями задачи $\Longrightarrow$ попробуем аппроксимировать оптимум изнутри.

Идея метода, как и ранее, заключается в сведении исходной задачи (1)–(2) к последовательности задач минимизации следующего вида:

Метод внутренних штрафов

$$F_k(x) = f(x) + a_k B(x) \to \min_{x \in R^n}, k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

где $B(x)$ — барьерная функция, $a_k > 0$ — барьерный коэффициент, $a_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть ∂Q – граница множества Q.

Определение. Функция $B(x)$ называется барьерной функцией для множества Q, если $B(x)$ определена, конечна и неотрицательна во всех точках из $\mathrm{Int}Q$ и

$$\lim_{x \to \partial Q} B(x) = +\infty.$$

Соглашение: $B(x) = +\infty$, для $x \in \partial Q$ (граница множества)

Метод внутренних штрафов

Примеры барьерных функций:

$$-\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x)^{-1}, \sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(x)|^{-1}, \quad \sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(x)|^{-2}.$$

Соглашение: Задачу (6) решаем методом градиентов:
$x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x_k), \alpha_k \geq 0.$

Если $x^k \in \text{Int}Q$, то при достаточно малом α_k $x^{k+1} \in \text{Int}Q$.

Таким образом, если $x^0 \in \text{Int}Q$, то из определения следует, что все приближения x^k – допустимые решения (1)-(2)

Метод внутренних штрафов

Пусть x^k — решение задачи (6) на шаге k и $x^k \in \text{Int}Q$.

Итерация $(k+1)$. Находим решение задачи (6) со значением барьерного коэффициента $a_{k+1} < a_k$. Если $a_{k+1}B(x^{k+1}) \leq \varepsilon$, то алгоритм завершает работу. Иначе начинаем новую итерацию.