АКАДЕМИЯ НАУК РОССИИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л.СОБОЛЕВА

На правах рукописи

ПАЩЕНКО Михаил Георгиевич

ЛАГРАНЖЕВЫ РЕЛАКСАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО СОСТАВА СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ

(01.01.09 – математическая кибернетика)

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
В.Л.Береснев

Новосибирск – 1998 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В данной работе рассматриваются динамические задачи выбора оптимального состава системы технических средств. На содержательном уровне задача формулируется следующим образом. Под системой технических средств будем понимать множество изделий, объединяемых общностью функционального назначения. Система технических средств характеризуется своим составом, который определяется набором образцов изделий и количеством изделий каждого образца. Область возможного выбора средств задается исходным рядом, т.е. перечнем образцов, которые в принципе могут войти в состав системы. В исходный ряд могут быть включены как образцы, находящиеся в производстве, так и перспективные образцы. Сфера применения исследуемой системы технических средств характеризуется совокупностью работ, которые должны быть выполнены с использованием рассматриваемых технических средств. Процесс выполнения работ разбивается на несколько этапов (лет), для каждого из которых известны объемы выполняемых работ. Задача состоит в том, чтобы найти такой набор технических средств (состав системы), который позволил бы выполнить все работы и имел бы минимальные суммарные затраты, связанные с разработкой, производством и эксплуатацией технических средств. Динамические задачи являются естественным обобщением задач, в которых осуществляется разовый выбор оптимального состава системы технических средств, так называемых статических задач. С математической точки зрения задача выбора оптимального состава системы технических средств относится к числу NP–трудных задач дискретной оптимизации даже в статическом варианте.

Первые постановки динамических задач выбора оптимального состава системы изучались в работе [5] в 1971 г. В ней получены первые результаты и, в частности, найдено точное решение задачи в предположении, что в определенные моменты времени может производиться полная замена старой системы технических средств на новую. В монографии [3] рассматривается простейшая динамическая задача выбора оптимального состава. Для ее решения предлагается алгоритм ветвей и границ, в котором в качестве нижней оценки используется некоторое достаточно хорошее решение двойственной задачи линейного программирования. В работе [4] эта же вычислительная схема реализована для модели, включающей некоторые дополнительные ограничения на процесс функционирования системы технических средств.

Одними из наиболее существенных и часто встречающихся в практических приложениях дополнительных ограничений являются ограничения на объемы производства технических средств. Задача выбора оптимального ряда изделий с ограничениями на объемы производства в статической постановке также рассматривалась в монографии [3], где для ее решения были использованы идеи метода ветвей и границ с модифицированным алгоритмом вычисления нижней границы. Однако применение ранее разработанных методов решения для динамической задачи связано со значительными трудностями, поскольку не удается получить приемлемых оценок для ее линейной релаксации.

В начале семидесятых годов была высказана одна очень продуктивная идея. Для многих NP-трудных задач множество ограничений можно разбить на две группы таким образом, что удаление одной из них превращает задачу в полиномиально-разрешимую. Эти ограничения заносятся в целевую функцию с некоторыми коэффициентами, так называемыми множителями Лагранжа. Оптимальное решение релаксированной таким способом задачи дает оценку снизу (для задач на минимум) на функционал исходной задачи. Эта оценка применяется в схеме ветвей и границ наряду с оценкой линейного программирования. Кроме того, решение релаксированной задачи может быть использовано в качестве исходной точки при построении допустимого решения исходной задачи, что позволяет строить приближенные алгоритмы с апостериорной оценкой точности.

Использовать обобщенные множители Лагранжа в задачах дискретной оптимизации впервые предложил Everett [31] в 1963 г. Однако бум в этой области начался после выхода в свет статьи Held и Karp, посвященной задаче коммивояжера [42], которая послужила толчком для теоретических и прикладных исследований в этой области. В 1973 г. опубликована статья Fisher [32], в которой используется этот подход для задач теории расписаний. В этом же году выходит в свет статья Shapiro [52], а в 1974 Shapiro и Fisher [34], в которых метод лагранжевых релаксаций развивается применительно к общей задаче целочисленного программирования. Сам термин "Лагранжева релаксация" был предложен Geoffrion в 1974 г. [39]. В этой работе сформулированы и доказаны основные теоремы. Однако центральный вопрос: "Каким образом вычислять множители Лагранжа?" – оставался открытым и в 1975 г. Fisher, Northup и Shapiro в [35] дали подробнейшее разъяснение и по этому поводу. В 1979 г. Shapiro опубликовал обзор, в котором содержится обширная библиография по применению техники лагранжевой релаксации в задачах целочисленного программирования [53]. В 1981 г. вышел аналогичный обзор Fisher [33]. С тех пор этот метод успешно применялся при решении многих сложных задач дискретной оптимизации.

Поскольку применение метода Лагранжевых релаксаций занимает центральное место в данном исследовании, приведем его краткое описание. Рассмотрим задачу целочисленного линейного программирования P в следующей формулировке:

$$Z_P = \min cx,$$
$$Ax \geq b,$$
$$Bx \geq d,$$
$$x \geq 0,$$

где x – вектор целочисленных переменных, b, c, d – вектора и A, B – матрицы соответствующих размерностей.

Лагранжевой релаксацией задачи P по ограничениям $Ax \geq b$ с множителями $\lambda \geq 0$ называется задача $LR(\lambda)$:

$$Z_{LR(\lambda)} = \min cx + \lambda(b - Ax),$$
$$Bx \geq d,$$
$$x \geq 0,$$

Задача, двойственная к задаче P относительно ограничений $Ax \geq b$, по определению, есть задача D, вида

$$Z_D = \max Z_{LR(\lambda)},$$
$$\lambda \geq 0.$$

Множество ограничений задачи P разбито на два подмножества. Для задач линейного программирования $Z_P = Z_D$ для любого разбиения множества ограничений. Для дискретной задачи $Z_P \geq Z_D$, и разрыв двойственности может существенно зависеть от разбиения. Обозначим через $\overline{P}$ линейную релаксацию задачи P. В дальнейшем чертой сверху $\overline{(.)}$ всегда будем обозначать переход к линейной релаксации. И рассмотрим также задачу $P^\star$:

$$Z_{P^\star} = \min cx,$$

$$Ax \geq b,$$

$$x \in \ Co\{x \geq 0, \quad \text{целые}, \quad Bx \geq d.\}$$

Тогда $Z_{\overline{P}} \leq Z_{P^\star} = Z_D \leq Z_P$.

Среди методов решения задачи D наиболее широкое распространение получили методы субградиентной оптимизации. Это итеративные процедуры, формирующие последовательность векторов (λ^k), начиная с некоторого начального значения (λ°), по следующему правилу:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + t_k(Ax^k - b),$$

где x^k – оптимальное решение задачи $LR(\lambda^k)$, а t_k – размер шага. Фундаментальный теоретический результат заключается в том, что $Z_{LR(\lambda^k)} \longrightarrow Z_D$, если $t_k \longrightarrow 0$ и $\sum_{i=0}^{k} t_k \longrightarrow \infty$ [43],[18]. Размер шага на практике обычно выбирают следуя [18],

$$t_k = \frac{\Theta^k(Z^\star - Z_{LR(\lambda^k)})}{\parallel Ax^k - b \parallel^2},$$

где Θ^k – скаляр, $0 < \Theta^k \leq 2$, и $Z^\star$ – верхняя граница для Z_D. В качестве $Z^\star$ берется значение целевой функции задачи P на некотором допустимом решении. Последовательность Θ^k, как правило, начинается с $\Theta^\circ = 2$ и затем делится пополам, через фиксированное число итераций, зависящее от размерности задачи.

Если на некотором шаге невязка $Ax^k - b$ равна 0, то x^k будет решением исходной задачи P. К сожалению, такое равенство возможно только при отсутствии разрыва двойственности. Тем не менее, если невязка достаточно мала, то вектор x^k является решением достаточно "близкой" задачи P^k, отличающейся от исходной тем, что вектор b заменяется на вектор Ax^k. Решение x^k часто удается достроить до допустимого решения исходной задачи с помощью различных эвристических процедур. Это позволяет строить приближенные алгоритмы с апостериорной оценкой точности.

При использовании лагранжевых релаксаций разбиение множества ограничений осуществляется таким образом, чтобы, во-первых, релаксированная задача легко решалась, а во-вторых, множество релаксированных ограничений было более узким, так как от этого существенно зависит скорость сходимости субградиентной процедуры. Отметим, что при использовании лагранжевых релаксаций бывает полезно ввести дополнительные, избыточные ограничения, которые не влияют на множество допустимых решений исходной задачи, но оказываются существенными, когда часть ограничений заносится в целевую функцию. Эти избыточные ограничения позволяют находить лучшие оценки при тех же значениях множителей Лагранжа и, в некоторых случаях, облегчают решение релаксированных задач.

Многие задачи выбора оптимального состава системы могут интерпретироваться как задачи размещения производства. Динамические задачи размещения производства впервые были сформулированы Ballou в 1968 году [22]. В работе Wesolowssky [57] рассматривалась модель оптимального размещения одного предприятия и его перемещения в течении планового периода . Задачи с несколькими предприятиями впервые рассмотрел Scott в [51]. В этих моделях предусматривалась возможность закрытия существующих предприятий и открытия новых без учета ограничений на мощности и количество работающих предприятий. Первые модели динамических задач о "p-медиане" (или задач размещения с ограничениями на число работающих предприятий) представленны в [58]. Последующие исследования данных моделей размещения производства связаны с адаптацией алгоритмов, хорошо зарекомендовавших себя на статических моделях [56, 49]. В частности, в [56] представлен вариант метода ветвей и границ для нескольких постановок динамических задач, который фактически является вариантом наилучшего на сегодняшний день алгоритма Erlenkotter [29] для простейшей задачи размещения производства. Метод Лагранжевых релаксаций применяется в [37] для поиска приближенного решения задачи о "р-медиане". В работе исследуются две релаксации, и их поведение сравнивается на тестовых задачах средней размерности. В работах [50, 24] применялись методы локального поиска. Сравнение эффективности метода Лагранжевых релаксаций и одной из так называемых мета-эвристик (simulating anniling) проведено в [24]. Более подробно с обзором результатов в данной области можно познакомиться в [45].

Большое количество работ посвящено статической задаче размещения с ограничениями на объемы. Для ее решения разработаны как точные алгоритмы ветвей и границ, так и различные эвристические алгоритмы, в том числе и использующие лагранжевы релаксации. В 1995 г. вышел обзор Sridharan [54] посвященный алгоритмам решения ограниченной задачи размещения производства, в котором приводится обширная библиография.

Целью данной работы является построение приближенных алгоритмов решения динамических задач выбора оптимального состава систем с апостериорной оценкой точности. Основное внимание уделяется построению эффективных алгоритмов решения релаксированных задач.

В первой главе рассматривается задача выбора состава системы при многоэтапном процессе выполнения работ. В этой модели выбор качественного и количественного состава системы происходит однократно. Процесс выполнения работ разбит на этапы, определенная часть работ выполняется на первом этапе, часть — на втором и т.д. На каждом этапе известная доля комплектов выходит из строя и в дальнейшем процессе выполнения работ не участвует. Предложены две релаксации и соответствующие им двойственные задачи. Показано, что одна из них полиномиально разрешима. Предлагается комбинированный алгоритм решения задачи, использующий последовательно обе релаксации и имеющий относительную погрешность в среднем около одного процента. Приводятся результаты численного эксперимента.

Во второй главе рассматривается задача выбора двухуровневой системы технических средств. Особенностью предлагаемой постановки по сравнению с задачей, рассмотренной в первой главе, является то, что технические средства, образующие систему, состоят из некоторых составных частей (узлов). При этом узлы одного вида могут быть использованы для комплектации технических средств различных образцов.

Первые математические модели выбора состава двухуровневых систем технических средств были рассмотрены в [2]. Наиболее полно такие системы изучались в монографии [3], где, в частности, установлена сведимость наиболее простой линейной задачи выбора состава двухуровневых систем к задаче минимизации полинома от булевых переменных. В [6] приводится описание метода ветвей и границ для статического случая с модифицированным алгоритмом вычисления нижней оценки целевой функции. Большинство статей (см., например, [15, 48, 55, 23]) посвящено исследованию частного случая рассматриваемой задачи, так называемой двухуровневой задачи размещения производства. Для двухуровневых задач размещения производства вопрос построения нижних границ и их взаимосвязь изучались в [23].

В этой главе рассматриваются две оценки, получаемые в результате релаксации двух различных групп ограничений. Показано, что эти оценки несравнимы между собой и могут быть вычислены за полиномиальное время. Для полученных оценок выделяются области доминирования.

В третьей главе рассматриваются динамические задачи выбора оптимального состава системы технических средств и приводятся алгоритмы их решения, основанные на лагранжевой релаксации. Для решения релаксированных задач приводится точный эффективный алгоритм и доказывается, что разрыв двойственности может быть сколь угодно большим. Выделяется подкласс задач, для которых двойственная задача полиномиально разрешима. Рассматриваются обобщения исходной задачи на случай нелинейной зависимости стоимости изделий от объемов производства и дополнительных ограничений на номенклатуру технических средств. Приводятся результаты расчетов.

В четвертой главе впервые формулируется математическая модель, рассматривающая развитие двухуровневой системы технических средств в течении планового периода. Исследуются три нижние оценки, получаемые с использованием различных лагранжевых релаксаций. Приводятся точные эффективные алгоритмы решения релаксированных задач, использующие, в частности, сведение к задаче о минимальном разрезе.

Результаты приведенные в теоремах 2, 4, 8 и 9 получены совместно с Кочетовым Юрием Андреевичем.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [16, 12, 14, 13, 17] и докладывались на III Всесоюзной школе-семинаре "Дискретная оптимизация и компьютеры" (Таштагол, 1987), Всесоюзной школе-семинаре по комбинаторной оптимизации (Алушта, 1991), X Байкальской школе-семинаре "Методы оптимизации и их приложения" (Иркутск, 1995), международной конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения" (Омск, 1997), 16 Европейской конференции по исследованию операций (Брюссель, 1998). Полученные результаты использовались при выполнении различных НИР.

Автор выражает искренюю признательность научному руководителю В.Л.Бересневу и Ю.А.Кочетову за постоянное внимание и всестороннюю поддержку при выполнении данной работы.

Глава 1

Многоэтапная задача

1.1 Постановка задачи

Пусть множество $\boldsymbol{I} = \{1, 2, ..., I\}$ задает исходный ряд образцов технических средств. Исходный ряд включает в себя номера образцов, которые выпускаются серийно, либо могут быть выпущены в ближайшем будущем. Область применения системы будем обозначать множеством $\boldsymbol{J} = \{1, 2, ..., J\}$. Считаем, что для каждой работы области применения существуют технические средства, предназначенные для ее выполнения, и каждое техническое средство может использоваться только для выполнения работ области применения. Процесс выполнения работ разбит на L этапов. На первом этапе выполняются работы из множества $\boldsymbol{J}_1, \ \ \boldsymbol{J}_1 \subset \boldsymbol{J}$, на втором - $\boldsymbol{J}_2, \ \ \boldsymbol{J}_2 \subset \boldsymbol{J}$, и т.д. На каждом этапе известная доля использующихся технических средств выходит из строя и в дальнейшем процессе выполнения работ не участвует. Будем считать, что $\boldsymbol{J} = \cup(\boldsymbol{J}_l, \quad l \in \boldsymbol{L}), \quad \boldsymbol{J}_l \cap \boldsymbol{J}_k = \emptyset$, если $k \neq l$. Задача состоит в том, чтобы найти такой состав системы, который позволил бы выполнить все работы с минимальными суммарными затратами. Математическая постановка задачи может быть записана в виде задачи линейного частично-целочисленного программирования. Пусть для каждого $i \in \boldsymbol{I}$:

v_i° — число изделий, уже имеющихся в составе системы;

c_i° — затраты на НИОКР и подготовку производства;

c_i — затраты на производство одного изделия;

s_{il} — доля потерь на l-ом этапе;

V_i — максимально возможный объем производства изделий;

p_{ij} — число изделий, требующихся для выполнения j-й работы;

c_{ij} — стоимость выполнения j-й работы;

Переменные задачи $(z_i), (v_i), (x_{ij})$ имеют следующий смысл:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й образец включен в состав системы,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$v_i \geq 0$ — объем производства i-го изделия;

$x_{ij} \geq 0$ — доля j-й работы, выполняемая изделиями i-го образца.

С использованием введенных обозначений сформулированная задача (обозначим ее P) записывается следующим образом:

$$Z_P = \min \sum_{i \in I} (c_i^\circ\ z_i + c_i\ v_i + \sum_{j \in J} c_{ij}\ x_{ij}) \tag{1.1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \ = 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}; \tag{1.2}$$

$$\sum_{i \in I} z_i \ \leq K, \tag{1.3}$$

$$\sum_{j \in J_l} p_{ij}\ x_{ij} \leq v_i^\circ + v_i - \sum_{l'=1}^{l-1} s_{il'} \sum_{j \in J_{l'}} p_{ij}\ x_{ij}, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ l \in \boldsymbol{L}; \tag{1.4}$$

$$0\ \leq\ v_i\ \leq\ V_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}; \tag{1.5}$$

$$0\ \leq\ x_{ij}\ \leq z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ j \in \boldsymbol{J}; \tag{1.6}$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \qquad i \in \boldsymbol{J}. \tag{1.7}$$

Целевая функция выражает суммарные затраты на создание и функционирование системы. Равенства (1.2) гарантируют выполнение всех работ области применения. Ограничение (1.3) устанавливает потолок на число типов используемых технических средств (не более K типов, K— целое число). В левой части неравенства (1.4) стоит выражение для объема средств i-го образца, требующегося на l-м этапе, а в правой части - выражение для имеющегося в наличии объема с учетом потерь средств на предшествующих этапах. Ограничение (1.5) устанавливает верхнюю границу на возможные объемы производства изделий, а неравенство (1.6) запрещает использование технических средств, не включенных в состав системы.

1.2 Нижние оценки

Традиционно для получения нижних оценок в задачах частично-целочисленного программирования используется линейная релаксация, при которой условие булевости переменных заменяется на требование их принадлежности единичному отрезку:

$$0 \ \leq \ z_i \ \leq \ 1, \qquad i \in \boldsymbol{I}; \tag{1.8}$$

Обозначим такую задачу через $\overline{P}$, а значение ее целевой функции через $\overline{Z_P}$. Очевидно, что $\overline{Z_P} \leq Z_P$. Задача $\overline{P}$ является задачей линейного программирования и значение $\overline{Z_P}$ может быть найдено за полиномиальное время. $\overline{Z_P}$, как правило, не совпадает с Z_P и величина разности $Z_P - \overline{Z_P}$, называемая разрывом двойственности, может достигать значительных размеров [46]. Используя различные эквивалентные переформулировки задачи, можно улучшить оценку $\overline{Z_P}$. Заменим в исходной задаче ограничения (1.4),(1.5) на условия

$$\sum_{j\in J_l} p_{ij}\ x_{ij} \leq v_i^{\circ}\ z_i + v_i - \sum_{l'=1}^{l-1} s_{il'} \sum_{j\in J_{l'}} p_{ij}\ x_{ij}, \qquad i \in \boldsymbol{I},\, l \in \boldsymbol{L}; \tag{1.9}$$

$$0 \ \leq \ v_i \ \leq \ V_i\ z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}; \tag{1.10}$$

и обозначим полученную задачу через P_X . Очевидно, что задачи P и P_X эквивалентны, но $\overline{Z_P} \leq \overline{Z_{P_X}}$, т.к. область допустимых значений в задаче $\overline{P_X}$ уже, чем в задаче $\overline{P}$.

Теорема 1 *Для любого натурального N существует семейство исходных данных, на котором одновременно* $\overline{Z_{P_X}} > \overline{Z_P} \cdot N$ *и* $Z_P > \overline{Z_{P_X}} \cdot N$.

Доказательство. Рассмотрим следующее семейство данных: $I = 4N^2$, $J = C_{4N^2}^{2N^2}, L = 1$, $K = I$. Для всех $i \in \boldsymbol{I}$ и $j \in \boldsymbol{J}$ $c_i^\circ = 1$, $p_{ij} = 1$, $c_i = 0$, $v_i^\circ = 0$, $V_i = J/(2N)$, и, наконец, столбцами матрицы (c_{ij}) являются все возможные вектора, в которых ровно $2N^2$ нулей. Все остальные значения матрицы положим равными $2N^2$. Тогда задача P записывается в виде

$$Z_P = \min \sum_{i \in I} (z_i + \sum_{j \in J} c_{ij}\ x_{ij})$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \ = 1, \qquad j \in \boldsymbol{J};$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq \frac{J}{2N} \qquad i \in \boldsymbol{I};$$

$$0 \ \leq \ x_{ij} \ \leq z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ j \in \boldsymbol{J};$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}.$$

Очевидно, что $Z_P \geq 2N^2$. Действительно, если в оптимальное решение входит меньше $2N^2$ изделий, то найдется работа не имеющая нулей в выбранных строках. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\overline{Z_P} \leq 2$ и $\overline{Z_{P_X}} = 2N$.

Рассмотрим решение задачи $\overline{P}$ следующего вида

$$z_i = \frac{1}{2N^2}, \quad x_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2N^2}, & \text{если } c_{ij} = 0, \\ \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для любого $i \in \boldsymbol{I}$ имеем

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = \frac{1}{I} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} = \frac{J}{I} < \frac{J}{2N}.$$

Легко убедиться, что остальные ограничения также выполняются и построенное решение допустимо. Тогда

$$\overline{Z_P} \le \sum_{i\in I}(z_i + \sum_{j\in J} c_{ij}\ x_{ij}) = \sum_{i\in I} z_i = \frac{m}{2N^2} = 2.$$

Отметим, что построенное решение недопустимо в задаче $\overline{P_X}$, так как

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = \frac{J}{I} > \frac{J}{2N}\cdot\frac{1}{2N^2}.$$

Рассмотрим допустимое решение задачи $\overline{P_X}$

$$z_i = \frac{1}{2N}, \quad x_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2N^2}, & \text{если } c_{ij} = 0, \\ \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Значение целевой функции на этом решении определяется равенством

$$\sum_{i\in I}(z_i + \sum_{j\in J} c_{ij}\ x_{ij}) = \frac{I}{2N} = 2N.$$

Покажем, что построенное решение оптимально. Для этого достаточно указать решение двойственной задачи линейного програмирования с таким же значением целевой функции.

Задача DP_X, двойственная к $\overline{P_X}$, имеет вид:

$$Z_{DP_X} = \max \sum_{j\in J} \eta_j$$

$$\sum_{j\in J} \omega_{ij} + \frac{J}{2N}\zeta_i \le 1, \qquad i \in \boldsymbol{I};$$

$$\eta_j \le\ c_{ij} + \omega_{ij} + \zeta_i, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ j \in \boldsymbol{J};$$

$$\zeta_i, \omega_{ij} \ge 0, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ j \in \boldsymbol{J}.$$

Для допустимого решения $\eta_j = 2N/J$, $\zeta_i = 2N/J$, $\omega_{ij} = 0$, при всех $i \in \boldsymbol{I}$, $j \in \boldsymbol{J}$, значение целевой функции равно

$$\sum_{j\in J} \eta_j = J \cdot \frac{2N}{J} = 2N.$$

Теорема доказана.

Более широкие возможности для получения нижних оценок открываются при использовании Лагранжевых релаксаций [53]. Рассмотрим две релаксации задачи, при которых в целевую функцию заносятся ограничения (1.2) и (1.9),(1.10), соответственно. Обозначим через λ_j, $j \in \boldsymbol{J}$, множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (1.2), через $\varphi_{il} \geq 0$, $i \in \boldsymbol{I}$, $l \in \boldsymbol{L}$ — множители, соответствующие ограничениям (1.9), а через $\psi_i \geq 0$, $i \in \boldsymbol{I}$, — множители, связанные с ограничениями (1.10). В первом случае получаем задачу, которую будем обозначать через $L(\lambda)$ или просто L, если это не вызовет путаницы:

$$Z_L \ = \ \min \ \sum_{i \in I} \{ c_i^\circ \ z_i + c_i \ v_i - \sum_{j \in J} (\lambda_j - c_{ij}) \ x_{ij} \} + \sum_{j \in J} \ \lambda_j,$$

при ограничениях (1.3),(1.9),(1.10),(1.6), (1.7).

Во втором случае - задачу $LR(\varphi, \psi)$ (LR):

$$Z_{LR} \ = \ \min \ \sum_{i \in I} \{ (c_i^\circ \ - \sum_{l \in L} v_i^\circ \ \varphi_{il} - \psi_i V_i) \ z_i +$$

$$(c_i \ - \sum_{l \in L} \varphi_{il} \ + \psi_i) \ v_i + \sum_{l \in L} \sum_{j \in J_l} (c_{ij} + p_{ij} \ (\varphi_{il} \ + \sum_{l'=l+1}^{L} S_{il'} \ \varphi_{il'})) x_{ij} \}$$

при ограничениях (1.2),(1.3),(1.6),(1.7).

Известно [53], что при любом выборе множителей Лагранжа λ, $\varphi > 0$, $\psi > 0$, значения Z_L и Z_{LR} являются нижними оценками для величины Z_P . Решения двойственных задач

$$(D) \qquad Z_D \ = \ \max_{\lambda} \ Z_L$$

$$(C) \qquad Z_C \ = \ \max_{\varphi > 0, \psi > 0} \ Z_{LR}$$

позволяют получать наилучшие из таких оценок.

Теорема 2

$$\overline{Z_P} \le \overline{Z_{P_X}} = Z_D \le Z_C \le Z_P.$$

Доказательство. Первое и последнее неравенства очевидны. Убедимся в том, что $\overline{Z_{P_X}} = Z_D$. Из соотношений двойственности для линейного программирования $\overline{Z_{P_X}} = \overline{Z_D}$ и нужно проверить, что $\overline{Z_D} = Z_D$. Покажем, что при фиксированных множителях Лагранжа $\overline{Z_L} \ge Z_L$, откуда и будет следовать требуемое равенство.

Обозначим через α_i оптимальное значение целевой функции в задаче:

$$\alpha_i \;=\; \max \{\sum_{j\in J}(\lambda_j - c_{ij})\; x_{ij} - c_i\; v_i - c_i^\circ\};$$

при ограничениях (1.9),(1.10) и

$$0 < x_{ij} < 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}, i \in \boldsymbol{I}. \tag{1.11}$$

Обозначим через $RN(\alpha)$ следующую задачу о ранце:

$$Z_{RN(\alpha)} \;=\; \max \sum_{i\in I} \alpha_i z_i;$$

$$\sum_{i\in I} z_i \;\le K,$$

$$z_i \in \{0,1\} \qquad i \in \boldsymbol{I}.$$

Тогда $Z_L = \sum_{j\in J} \lambda_j - \; Z_{RN(\alpha)}$.

Пусть (z_i^*) (v_i^*) (x_{ij}^*) – оптимальное решение задачи $\overline{Z_L}$. Построим по данному решению допустимое решение (z_i') (v_i') (x_{ij}') задачи Z_L. Определим величины α_i' равенствами:

$$\alpha'_i \;=\; \sum_{j\in J_t} (\lambda_j - c_{ij})\; x_{ij} - c_i\; v_i - c^\circ_i;$$
где

$$v_i = \begin{cases} 0, & \text{если } z^*_i \;=\; 0, \\ v^*_i / z^*_i, & \text{если } z^*_i \;>\; 0; \end{cases} \qquad x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } z^*_i \;=\; 0, \\ x^*_{ij} / z^*_i, & \text{если } z^*_i \;>\; 0; \end{cases}$$

Возьмем в качестве z'_i оптимальное решение задачи $RN(\alpha')$ и положим $v'_i = z'_i v_i,\; x'_{ij} = z'_i x_{ij},\; i \in \boldsymbol{I},\; j \in \boldsymbol{J}$. Легко проверить, что построенное решение допустимо в L.

Пусть Z' — значение целевой функции на данном решении

$$Z' \;=\; \sum_{j\in J} \;\lambda_j \;+ \sum_{i\in I} \{c^\circ_i\; z'_i + c_i\; v'_i - \sum_{j\in J} (\lambda_j - c_{ij})\; x'_{ij}\} =$$
$$\sum_{j\in J} \;\lambda_j \;+ \sum_{i\in I} z'_i\; \{c^\circ_i \;+ c_i\; v_i - \sum_{j\in J} (\lambda_j - c_{ij})\; x_{ij}\} = \sum_{j\in J} \;\lambda_j \;- \sum_{i\in I} \alpha'_i z'_i.$$

Так как $\sum_{i\in I} z^*_i \;\le K$ и $0 \le z^*_i \le 1,\; i \in \boldsymbol{I}$, то $(z^*_i),\; i \in \boldsymbol{I}$ — допустимое решение задачи $\overline{RN(\alpha')}$, но $\overline{Z_{RN(\alpha')}} \;=\; Z_{RN(\alpha')}$ при целых K, откуда

$$\sum_{i\in I} \alpha'_i(\lambda) z'_i \ge \sum_{i\in I} \alpha'_i(\lambda) z^*_i$$

и, следовательно,

$$Z' \;\le\; \sum_{j\in J} \;\lambda_j \;- \sum_{i\in I} \alpha'_i z^*_i \;=\; \overline{Z_L}.$$

Покажем, что $Z_D \le Z_C$. Так как $\overline{Z_{P_X}} = Z_D$, а для задач линейного программирования $\overline{P_X}$ и $\overline{C}$ справедливо равенство $\overline{Z_{P_X}} = \overline{Z_C}$, то $Z_D = \overline{Z_{P_X}} = \overline{Z_C} \le Z_C$. Теорема доказана.

Следствие 1 *Задача D разрешима за полиномиальное время от длины записи исходных данных.*

Из доказательства теоремы следует, что за полиномиальное время можно не только вычислить величину Z_D , но и найти множители Лагранжа λ^*, для которых $Z_D = Z_L$. Пусть μ – оптимальные двойственные оценки, соответствующие в задаче $\overline{P}_X$ равенствам (1.2). Тогда

$$\overline{Z_{P_X}} = \overline{Z_L(\mu)} \le Z_D,$$

но $\overline{Z_{P_X}} = Z_D$, откуда $\lambda^* = \mu$.

Замечание. Если при формулировке задачи L вместо условий (1.9), (1.10) использовать ограничения (1.4)(1.5), то получаемая таким образом задача будет эквивалентна задаче L.

Решение двойственных задач C и D, как правило, осуществляется методами субградиентной оптимизации [43], в которых на каждой итерации решается релаксированная задача и по ее оптимальному решению корректируются множители Лагранжа. Решение задачи L, как следует из доказательства теоремы, сводится к вычислению величин $\alpha_i(\lambda), i \in \boldsymbol{I}$, что равносильно решению задачи линейного программирования.

Задача LR после очевидных преобразований сводится к классической NP–трудной задаче размещения производства, для решения которой приходится использовать вычислительные схемы типа ветвей и границ [3].

С точки зрения теории NP–полноты, задачи LR и P одинаково трудны, но практически задачу LR решать проще, и, в первую очередь, потому, что при фиксированных булевых переменных z значения непрерывных переменных в задаче LR определяются за линейное время, а в задаче P для этого приходится решать задачу линейного программирования, для которой неизвестно строго полиномиального алгоритма. Кроме того, для задачи LR уже создан [3] алгоритм ветвей и границ, хорошо работающий на средних размерностях $(J, I \leq 100)$, в то время как для исходной задачи создание такого алгоритма связано с определенными трудностями.

1.3 Алгоритм решения релаксированной задачи

Пусть, как и прежде,

$$\alpha_i(\lambda) \ = \ \max \{\sum_{j \in J} (\lambda_j - c_{ij}) \ x_{ij} - c_i \ v_i - c_i^{\circ}\};$$

при ограничениях (1.4),(1.5) и (1.11). При заданных значениях $\alpha_i(\lambda), i \in \boldsymbol{J}$, задача L, как уже отмечалось, сводится к простейшей задаче о ранце $RN(\alpha)$, которая решается с трудоемкостью $O(I \log I)$, и для решения задачи L остается указать алгоритм вычисления величин $\alpha_i, i \in \boldsymbol{I}$. Так как значения α_i определяются независимо друг от друга, то индекс i в дальнейшем будем опускать. Определим функции $F_l(v)$, $0 \ \leq \ v \ \leq V + v^{\circ}, \quad l \in \boldsymbol{L}$ равенствами:

$$F_l(v) \ = \ \max \sum_{l'=l}^{L} \ \sum_{j \in J_{l'}} \ c_j x_j$$

$$\sum_{j \in J_{l'}} p_j \ x_j \leq v - \sum_{t=l}^{l'-1} s_t \sum_{j \in J_t} p_j \ x_j, \qquad\qquad l' \geq l;$$

$$0 \ \leq \ x_j \ \leq 1, \qquad\qquad\qquad j \in \boldsymbol{J},$$

где $c_j = \lambda_j - c_{ij}$ и представим α в следующем виде:

$$\alpha \ = \ (\max_{0 \leq v \leq V + V^{\circ}} \{F_1(v) \ - \ c(v - v^{\circ})^+\} - \ c^{\circ})^+,$$

где $(*)^+ \ = \ \max(0, *)$.

Функции $F_l(v)$, $l \in \boldsymbol{L}$ являются вогнутыми кусочно-линейными функциями. Ниже будет показано, что они имеют не более $2J$ точек излома и, значит, величина α может быть найдена по известной функции $F_1(v)$ за $O(\log J)$ операций.

Лемма 1 *Для функций $F_l(v)$, $l \in L$ справедливы рекуррентные соотношения:*

$$F_L(v) \ = \ G_L(v)$$

$$F_l(v) \;=\; \max_{0\le u\le v}\{G_l(u) \;+\; F_{l+1}(v - s_l u)\} \quad l \in \boldsymbol{L}\setminus\{L\},$$

где функции $G_l(v), l \in \boldsymbol{L}$, *определяются равенствами:*

$$G_l(v) \;=\; \max\sum_{j\in J_l} c_j x_j,$$

$$\sum_{j\in J_l} p_j\; x_j \le v$$

$$0 \;\le\; x_j \;\le 1 \qquad , j \in \boldsymbol{J}_l.$$

Доказательство. Пусть $l < L$. Обозначим $F_l(v,u)$ следующую функцию

$$F_l(v,u) \;=\; \max\{\sum_{j\in J_l\; c_j x_j} \;+\; \sum_{l'=l+1}^{L}\;\sum_{j\in J_{l'}} c_j x_j\} \tag{1.12}$$

$$\sum_{j\in J_l} p_j\; x_j \;=\; u; \tag{1.13}$$

$$\sum_{j\in J_{l'}} p_j\; x_j \le v \;-\; s_l\; u \;-\sum_{t=l+1}^{l'-1} s_t \sum_{j\in J_t} p_j\; x_j, \qquad l' \;> l; \tag{1.14}$$

$$0 \;\le\; x_j \;\le 1, \qquad\qquad j \in \boldsymbol{J}. \tag{1.15}$$

Заметим, что задача (1.12)–(1.15) распадается на две независимых подзадачи. Задачу

$$G_l(u) \;=\; \max\sum_{j\in J_l} c_j x_j,$$

при ограничениях (1.13), (1.15) и задачу

$$F_{l+1}(v) \;=\; \max\;\sum_{l'=l+1}^{L}\;\sum_{j\in J_{l'}} c_j x_j$$

при ограничениях (1.14), (1.15).

При этом $F_l(v,u) = G_l(u) + F_{l+1}(v - s_l\; u)$. Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что

$$F_l(v) = \max_{0\le u\le v} F_l(v,u).$$

Приведенные рекуррентные соотношения позволяют для каждого $v \geq 0$ определить значение функции $F_l(v)$ по известным функциям $F_{l+1}(v)$ и $G(v)$. Так как параметр v является непрерывным, то вычислить таким способом все значения функции $F_l(v)$ не представляется возможным. Тем не менее, специальный вид функций $F_l(v)$, а именно их кусочно-линейность, позволяет задавать функции их значениями в точках излома и тем самым вычислять $F_l(v)$ только конечное число раз.

Лемма 2 *Если* $F_l(v') = G_l(u') + F_{l+1}(v' - s_l u')$ *и* $t_l = 1 - s_l \neq 1$, *то для достаточно малых* $\delta > 0$

$$F_l(v' + \delta) = F_l(v') + \gamma\delta$$

$$\gamma = \begin{cases} \alpha, & \text{если } s_l\alpha \geq \beta, \\ \beta + \alpha t_l, & \text{если } s_l\alpha < \beta \text{ и } v' = u', \\ \beta/s_l, & \text{если } s_l\alpha < \beta \text{ и } v' < u', \end{cases}$$

где α, β *— правые производные функций* $F_{l+1}(\mu), G_l(u)$ *в точках* $\mu' = (v' - S_l u')$ *и* u'.

Доказательство. Представим функцию $F_l(v)$ в виде

$$F_l(v) = \max_{u,\mu \geq 0}(G_l(u) + F_{l+1}(\mu));$$

$$s_l u + \mu \leq v;$$

$$0 \leq u \leq v,$$

и выделим два случая $u' = v'$ и $u' < v'$.

а) Пусть $u' < v'$ и $F_l(v'+\delta) = G_l(u^*) + F_{l+1}(\mu^*)$. Рассмотрим область изменения переменных (μ, u) при увеличении v' на δ (рис. 1.1). Очевидно, что точка (μ^*, u^*) лежит на прямой $s_l u + \mu = v' + \delta$. В силу вогнутости функций $G_l(u)$ и $F_{l+1}(\mu)$ точка (μ^*, u^*) не выходит из отрезка AC. При достаточно малых $\delta > 0$ функции $G_l(u)$ и $F_{l+1}(\mu)$ можно считать линейными на DA и DC. Сумма двух линейных функций тоже линейна. Максимум линейной функции достигается на границе и можно считать, что (μ^*, u^*) совпадает либо с точкой A, либо с точкой C. Приращение $F_l(v)$ при переходе от точки D к точке C равно:

$$\Delta F_C = G_l(u') + F_{l+1}(\mu' + \delta) - G_l(u') - F_{l+1}(\mu') = \alpha\delta$$

Аналогично

$$\Delta F_A = G_l(u' + \delta/s_l) + F_{l+1}(\mu') - G_l(u') - F_{l+1}(\mu') = \beta\delta/s_l$$

Таким образом, если $\alpha > \beta/s_l$, то (μ^*, u^*) совпадает с точкой C и $\gamma = \alpha$. В противном случае (μ^*, u^*) совпадает A и $\gamma = \beta/s_l$. б) Пусть $u' = v'$. В этом случае точка A лежит выше прямой $u = v' + \delta$, точка (μ^*, u^*) принадлежит отрезку BC (рис. 1.2) и

$$\Delta F_B = G_l(v' + \delta) + F_{l+1}(\mu' + T_l\delta) - G_l(u') + F_{l+1}(\mu') = (\beta + T_l\alpha)\delta.$$

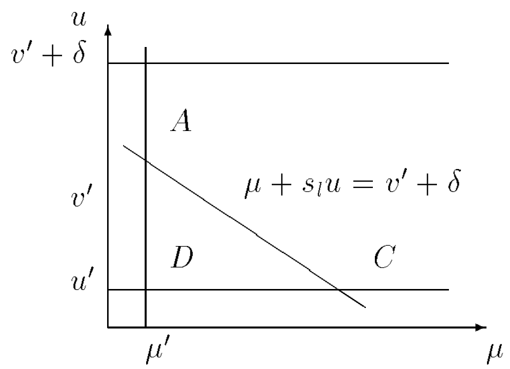

Рис.1.1

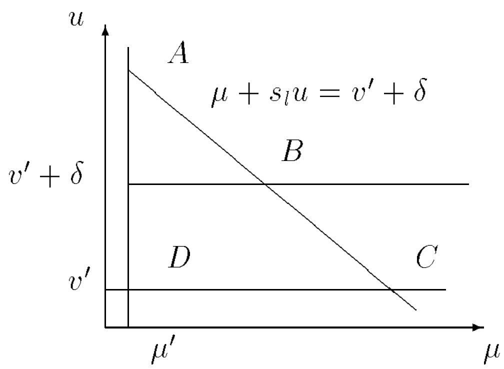

Рис.1.2

Лемма 3 *Функции $F_l(v)$ имеют не более $2J$ точек излома.*

Доказательство. Пусть функции $G_l(u)$ и $F_{l+1}(\mu)$ имеют соответственно n_l и Q_{l+1} точек излома. Будем говорить, что точка излома функции $F_l(v)$ является:

— точкой излома 1-го типа, если для правой производной функции $F_l(v)$ в этой точке верно равенство $\gamma = \alpha$;

— точкой излома 2-го типа, если $\gamma = \beta + \alpha t_l$;

— точкой излома 3-го типа, если $\gamma = \beta / s_l$.

Рассмотрим три случая.

а) Пусть v' — точка излома 1-го типа. Тогда $s_l\alpha \geq \beta$,

$$F_l(v'+\delta) = G_l(u') + F_{l+1}(\mu'+\delta)$$

и следующей точке излома v^1 соответствует точка излома функции $F_{l+1}(v)$. Точка v^1 может быть точкой 1-го или 3-го типа, но не может быть точкой 2-го типа, т.к. $v^1 = v' + \delta > u' = u^1$.

б) Пусть v' — точка излома 2-го типа. Тогда $u' = v'$, $s_l\alpha < \beta$ и

$$F_l(v'+\delta) = G_l(v'+\delta) + F_{l+1}(\mu'+t_l\delta).$$

Точка v^1 определяется по точкам излома либо функции $G_l(u)$, либо функции $F_{l+1}(v)$ и может быть точкой излома 1-го или 2-го типа, причем переходу в точку 1-го типа соответствует точка излома функции $G_l(u)$.

в) Пусть v' — точка излома 3-го типа.Тогда $u' < v'$, $s_l\alpha < \beta$ и

$$F_l(v'+\delta) = G_l(u'+\delta/s_l) + F_{l+1}(\mu')$$

Точка v_1 определяется либо точкой излома функции $G_l(u)$, либо равенством

$$v'+\delta = u'+\delta/s_l. \tag{1.16}$$

В первом случае точка v^1 может быть точкой излома 1-го или 3-го типа, во втором случае — 2-го типа. Отметим, что если раньше точки излома функции $F_l(v)$ определялись точками излома функций $F_{l+1}(v)$ и $G_l(u)$, то в последнем случае появляется дополнительная точка излома, определяемая равенством (1.16). Убедимся, что число дополнительных точек излома не превосходит n_l .

Действительно, дополнительная точка излома появляется при переходе от точки 3-го типа к точке 2-го типа. Для того, чтобы снова

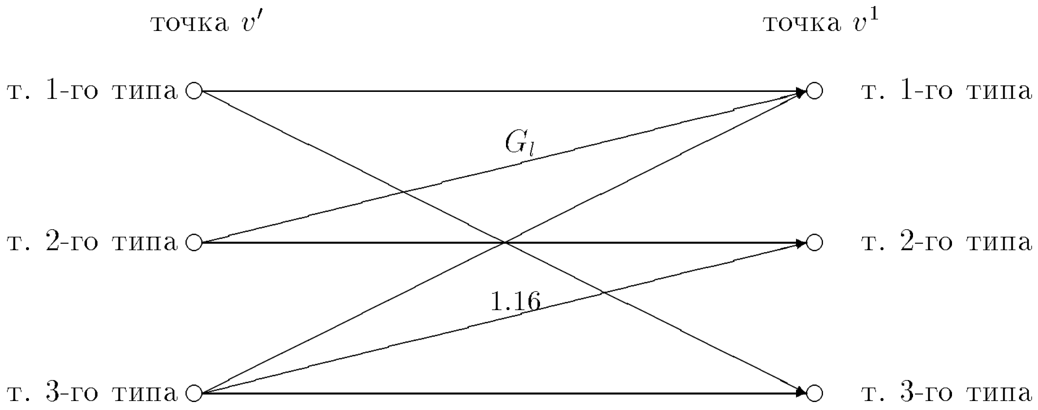

Рис. 1.3

оказаться в точке 3-го типа надо пройти через точку 1-го типа, а сделать это из точки 2-го типа можно только пройдя через точку излома функции $G_l(u)$ (рис.1.3). Таким образом, число точек излома функции $F_l(v)$ не превосходит $n_l + n_l + Q_{l+1}$, откуда

$$Q_1 \ \leq \ 2n_1 \ + \ Q_2 \ \leq \ 2n_1 \ + \ 2n_2 \ + \ Q_3 \ \leq \ .. \ \leq \ 2\sum_{l \in L} n_l.$$

Но n_l очевидно не превосходит мощности множества $\boldsymbol{J}_l$, поэтому $Q_1 \ \leq 2J$. Лемма 3 доказана.

Замечание. Если $s_l \ = \ 0$ для некоторого l, то в условиях Леммы 2 величина γ всегда равна $\alpha \ + \ \beta$ и дополнительные точки излома не появляются.

Конструктивное доказательство последнего утверждения позволяет построить алгоритм вычисления функции $F_l(v)$. Алгоритм состоит из L шагов, на каждом из которых по уже известным функциям $F_{l+1}(v)$ и $G_l(u)$ строится функция $F_l(v)$. Шаг начинается с построения функции $G_l(u)$. Напомним, что $G_l(u)$ является задачей о ранце с непрерывными переменными (u — объем ранца), точки излома функции $G_l(u)$ определяются с трудоемкостью $O(n_l)$, а построение самой функции $G_l(u), u > 0$ требует не более $O(n_l \log n_l)$ операций. По известным $F_{l+1}(v)$ и $G_l(u)$ функция $F_l(v)$ строится за линейное время $O(n_l \ + \ Q_{l+1})$ и так как для определения $F_1(v)$ необходимо вычислить все функции $F_l(v), l \in L$, то суммарная трудоемкость построения $F_1(v)$ оценивается величиной

$$\sum_{l\in L} O(n_l \log n_l \ + \ n_l \ + \ Q_{l+1}) \ \le \ O(J \log J \ + \ LJ).$$

Таким образом доказана следующая теорема

Теорема 3 *При фиксированных множителях $\lambda_j, j \in \boldsymbol{J}$, оптимальное решение задачи L может быть найдено с трудоемкостью $O(I \log I + IJ(L + \log J))$.*

1.4 Построение допустимого решения многоэтапной задачи

Пусть $(z^*)(v^*)(x^*)$ — оптимальное решение задачи $L(\lambda)$ и

$$\Delta_j(\lambda) \ = \ \sum_{i\in I} x^*_{ij} \ - \ 1, \qquad j \in \boldsymbol{J};$$

Если $\Delta_j(\lambda) \ = \ 0$, т.е. равенства (1.2) верны для (x^*), то $(z^*)(v^*)(x^*)$ — оптимальное решение исходной задачи и $Z_L(\lambda)$ совпадает с Z_P . Выполнение условий (1.2) означает, что в задаче P отсутствует разрыв двойственности. Чаще оказывается, что $Z_L(\lambda^*) \ = \ Z_D \ < \ Z_P$, но величина

$$\delta \ = \ \sum_{j\in J} \mid \Delta_j(\lambda) \mid$$

достаточно мала и решение $(z^*)(v^*)(x^*)$ удается достроить до допустимого решения исходной задачи с помощью процедур координатного спуска. При λ близких к λ^* равенства (2) нарушаются только для некоторых $j \in \boldsymbol{J}$ и трудоемкость такой процедуры практически оказывается очень низкой. Обозначим через H_D алгоритм, использующий эту процедуру в ходе субградиентной оптимизации и выбирающий из полученных решений наилучшее. Близкий по смыслу алгоритм рассматривался в [26].

Обозначим через $P(\Delta)$, задачу, которая отличается от исходной тем, что равенства (2) заменены на

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \ = 1 \ - \ \Delta_j(\lambda), \qquad j \in \boldsymbol{J};$$

Легко проверить, что оптимальное решение задачи $L(\lambda)$ является оптимальным решением и в задаче $P(\Delta)$. Алгоритм H_D просматривает оптимальные решения задач $P(\Delta)$ при разных Δ и достраивает их до допустимого решения задачи P. Если задачи P и $P(\Delta)$ "близки"друг к другу, то оптимальное решение одной из них является хорошим приближением для другой.

Алгоритм H_D рассматривает различные наборы (z^*), что, разумеется, не гарантирует получения оптимального набора задачи P. Более осторожной стратегией, чем в алгоритме H_D , является схема покомпонентного составления набора (z^*), на каждом шаге которой одна из переменных z_i^* полагается равной 1. Ниже приводится четыре правила выбора такой переменной:

1. Положить $z_i \ = \ 1$, если $\alpha_i(\lambda^*) \ = \ \max_{k\in I} \alpha_k(\lambda^*)$.

2. Определить работу r, для которой

$$\sum_{i\in I} x^*_{ir} \ = \ \max_{j\in J} \sum_{i\in I} x^*_{ij}$$

и положить $z_i \ = \ 1$, если

$$\sum_{j\in J} x^*_{ij} \ = \ \max\{\sum_{j\in J} x^*_{kj} \ \mid \ k \in \boldsymbol{I}, x^*_{kr} > 0\}.$$

3. Положить $z_i \ = \ 1$, если

$$\sum_{j\in J} x^*_{ij} \ = \ \max_{k\in I} \sum_{j\in J} x^*_{kj}$$

4. Положить $z_i \ = \ 1$, если номер i наиболее часто входил в состав оптимального набора (x) задачи $L(\lambda)$ в ходе субградиентной оптимизации.

Правило 1 наиболее широко применяется в методах ветвей и границ для задачи размещения с ограничениями на объемы производства [25]. Аналог Правила 2 используется в наиболее быстром точном алгоритме для задач о покрытии и разбиении [36]. Правило 3 хорошо зарекомендовало себя в простейшей задаче размещения производства.

Обозначим через H_q алгоритм, использующий q–ое правило выбора и делающий не более K шагов. На каждом шаге выбирается переменная z_i и полагается равной 1. Затем производится корректировка множителей Лагранжа и к каждому решению задачи $L(\lambda)$ применяется алгоритм H_d. Результатом работы алгоритма H_q является наилучшее из построенных допустимых решений.

Приведенные алгоритмы базируются на решении задачи $L(\lambda)$, хотя нетрудно построить аналогичные конструкции и для релаксации $LR(\varphi, \psi)$. Обозначим через H_C аналог алгоритма H_D, основанный на релаксации $LR(\varphi, \psi)$. Понятно, что алгоритм H_C уже не будет иметь полиномиальную трудоемкость, но т.к. $Z_C \geq Z_D$, то проигрывая во времени, он может выигрывать в точности.

1.5 Численный эксперимент

Предложенные алгоритмы тестировались на классе задач следующей размерности:

$$m = 30; \; n = 30; \; n_l = 5, l \in \boldsymbol{L}; \; k = 6.$$

Исходные данные формировались датчиком случайных чисел с равномерным распределением. Параметры задачи выбирались из следующих интервалов:

$c_i^\circ = 100\ c_i \in [1, 5];\ c_{ij} \in [1, 105];\ p_{ij} \in [1, 5];\ S_{il} = 0.1;\ v_i^\circ = 2.$

Матрицы (c_{ij}) и (p_{ij}) на 30% заполнялись числом 10^6. Расчеты про-

Таблица 1 $V = 1000; K = 30;$

N	Z_C	Z_D	H_C	H_D	H_1	H_2	H_3	H_4
1	925.5	97.7	0.0	2.2	0.0	0.0	0.0	0.0
2	957.2	96.6	0.0	3.4	0.0	0.0	0.0	0.0
3	989.6	96.9	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
4	921.3	99.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
5	952.9	95.9	0.1	3.3	4.0	0.4	1.1	0.4
6	969.1	97.2	0.0	2.4	0.7	0.7	1.2	0.7
7	927.6	95.4	0.1	1.1	3.0	1.1	1.1	1.1
8	962.9	96.1	0.1	4.3	0.7	4.9	1.4	1.8
9	974.4	95.3	0.1	2.6	0.4	1.5	1.5	1.5
10	944.3	98.3	0.2	1.7	4.0	5.9	7.3	0.2
среднее		96.9	0.1	3.1	1.3	1.5	1.4	0.6

водились при разных значениях параметров K и V ($V_i = V,\ i \in \boldsymbol{I}$). Результаты расчетов сведены в четыре таблицы. В каждой таблице содержится решение десяти тестовых задач для фиксированной пары параметров (K, V). Колонка (Z_C) содержит значение Z_C в абсолютных величинах. Колонка (Z_D) позволяет судить о величине разрыва двойственности в решаемых задачах. В ней приведены значения относительного уклонения $\varepsilon = (Z_D/Z_C) * 100\%$. В остальных колоках содержатся значения относительного уклонения для соответствующих эвристических алгоритмов: $\varepsilon = (H_*/Z_C - 1) * 100\%$.

Решение тестовых задач без ограничений (1.3), (1.5) содержит в оптимальном наборе (z^*) от 5 до 6 ненулевых элементов, объемы производства меняются от 2 до 11 единиц, и разрыв двойственности в среднем составляет около 3% от Z_C. Наилучшие результаты по точности на указанных классах задач принадлежат алгоритму H_C. При решении задачи C оптимальные наборы (z^*) часто повторяются, число различных наборов в среднем не превосходит трех, а в половине случаев такой набор единственный. Интересно отметить, что при решении задачи D

Таблица 2 $V = 5; K = 30;$

N	Z_C	Z_D	H_C	H_D	H_1	H_2	H_3	H_4
1	989.4	96.8	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	947.1	98.9	0.3	8.6	0.3	0.3	0.3	0.3
3	954.8	96.3	0.3	7.0	0.3	0.6	0.3	0.3
4	931.8	97.6	2.1	8.4	1.1	1.1	1.1	1.1
5	973.8	96.7	1.2	5.2	4.2	1.2	1.2	1.2
6	939.4	98.2	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
7	975.5	96.8	1.5	3.7	2.7	2.7	3.7	2.6
8	962.2	96.1	1.0	4.4	2.1	6.0	4.0	2.1
9	932.5	95.5	2.5	2.6	2.6	4.6	5.6	5.6
10	969.9	96.0	0.6	6.9	0.6	0.6	4.8	4.8
среднее		96.9	1.1	4.8	1.5	1.8	2.2	2.0

наблюдается совершенно другая картина. Из множества $\boldsymbol{I}$ выделяется группа номеров (от 10 до 15 элементов) с примерно равными значениями $\alpha_i(\lambda)$, к которым эвристики H_q применяют правила выбора. Оптимальные наборы (z^*) почти не повторяются и наилучшее решение эвристики H редко совпадает с набором номеров, выбранным по q–му правилу. Другими словами, рекордное значение находится алгоритмом на промежуточном шаге с помощью процедуры H_D . Алгоритмы H_q в среднем дают небольшое уклонение от оптимума на задачах, где оба или одно из ограничений (1.3), (1.5) являются несущественными (табл. 1–3). Ни одна из эвристик H_q не является доминирующей и все они могут сильно ошибаться, когда ограничения (1.3),(1.5) одновременно являются "жесткими"(табл. 4). Такой класс задач является наиболее трудным для данных эвристик и на нем целесообразно использовать комбинацию алгоритмов H_D и H_C . Обозначим через H_{DC} алгоритм, работающий по следующей схеме:

1. Решить задачу D и определить множество

$$\boldsymbol{I}_\varepsilon = \{i \in \boldsymbol{I} \mid \alpha_i(\lambda^*) + \varepsilon \geq \max_{k \in \boldsymbol{I}} \alpha_k(\lambda^*)\}.$$

2. Решить задачу C на множестве $\boldsymbol{I}$, используя алгоритм H_C для построения допустимого решения.

Алгоритм H_{DC} на первом шаге формирует множество номеров, с которыми работают эвристики H_q , а на втором шаге вместо правил выбора использует релаксацию LR для построения набора (z^*). Такая комбинация релаксаций позволяет использовать достоинства обоих подходов и сглаживает их недостатки. При $\varepsilon = 0.01 * Z_D$ алгоритм H_{DC} имеет те же результаты по точности, что и алгоритм H_C и тратит в среднем около минуты на решение одной тестовой задачи. Среднее время работы алгоритма H_q составляет 40–50 секунд, алгоритма H_C — 2–3 минуты на IBM PC\AT-386.

Таблица 3 $V = 1000; K = 3;$

N	Z_C	Z_D	H_C	H_D	H_1	H_2	H_3	H_4
1	1013.0	95.3	0.0	0.0	6.3	0.0	0.0	0.0
2	1074.2	93.2	0.0	0.0	0.0	3.2	0.0	0.0
3	1011.0	97.1	0.0	0.0	0.0	8.9	7.2	0.0
4	988.0	95.6	0.4	0.4	0.4	0.4	4.6	0.4
5	1061.8	91.7	0.1	9.6	2.9	0.1	3.5	3.5
6	1050.9	94.0	0.1	1.8	0.2	1.8	0.2	1.8
7	972.0	95.2	0.7	3.0	3.0	6.4	3.0	0.7
8	1142.9	91.7	0.0	7.6	4.2	2.0	1.3	0.7
9	1014.3	93.5	0.0	4.4	2.3	6.9	2.3	2.3
10	1072.8	93.4	0.0	7.1	3.3	5.4	3.7	3.7
среднее		94.1	0.1	3.4	2.3	3.5	2.6	1.3

Таблица 4 $V = 7; K = 3;$

N	Z_C	Z_D	H_C	H_D	H_1	H_2	H_3	H_4
1	1075.3	94.3	0.0	0.0	0.0	0.0	6.2	0.0
2	1051.3	94.5	0.1	15.1	5.0	0.1	0.1	0.1
3	1023.9	96.1	0.1	0.1	0.3	0.3	0.1	0.1
4	994.1	96.4	0.8	0.8	0.8	0.8	16.4	0.8
5	1156.2	91.9	1.9	6.7	7.7	5.1	2.0	6.7
6	1014.5	95.3	0.4	5.1	5.1	7.2	3.3	3.3
7	971.5	96.1	0.1	3.9	3.9	3.9	3.9	3.9
8	1075.2	91.6	3.2	14.2	15.7	14.2	6.5	10.1
9	1090.8	92.7	1.2	24.8	5.9	4.2	14.3	19.0
10	1035.7	98.3	0.7	27.5	27.5	12.7	27.5	27.5
среднее		94.7	0.8	9.8	7.2	4.8	8.0	7.2

Глава 2

Двухуровневая многоэтапная задача

2.1 Постановка задачи

Особенностью предлагаемой постановки по сравнению с задачей, рассмотренной в первой главе, является то, что технические средства, образующие систему, состоят из некоторых составных частей (узлов). При этом узлы одной разновидности могут быть использованы для комплектации технических средств различных образцов. В таких условиях выбор образцов средств и выбор множества разновидностей узлов, используемых для их комплектования, становятся взаимозависимыми, что приводит к постановкам задачи выбора состава двухуровневой системы.

Пусть как и раньше множество $\boldsymbol{I} = \{1, 2, ..., I\}$ задает исходный ряд образцов технических средств, а непересекающиеся множества $\boldsymbol{J}_l, \quad l \in \boldsymbol{L}$ задают множества работ, подлежащих выполнению на каждом из этапов.

Обозначим через $\boldsymbol{K} = \{1, \ldots, K\}$ — множество различных видов узлов, используемых для комплектации средств рассматриваемых образцов. Для $i \in \boldsymbol{I}$ обозначим через $\boldsymbol{K}_i$ перечень видов узлов, входящих в состав i-го образца. Для $k \in \boldsymbol{K}$ обозначим через $\boldsymbol{I}_k$ перечень образцов технических средств, в состав которых входят узлы k-го вида.

Введем следующие обозначения:

v_i° — количество изделий i-го образца, имеющихся в составе системы;

c_i° — стоимость разработки изделий i-го образца;

d_k° — стоимость разработки узла k-го вида;

c_i — стоимость производства одного изделий i-ого образца, включая стоимость входящих в его состав узлов;

V_i — максимальный объем производства изделий i-го образца;

p_{ij} — число изделий i-го образца, требующихся для выполнения j-й работы;

c_{ij} — стоимость выполнения j-й работы;

s_{il} — доля потерь изделий при выполнении работ на l-м этапе.

Введем в рассмотрение следующие переменные:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если изделия } i\text{-го образца включены в состав системы,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{если узлы } k\text{-го вида включены в состав системы ,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$v_i \geq 0$ — объем производства изделий i-го образца;

$x_{ij} \geq 0$ — доля j-й работы, выполняемая изделиями i-го образца.

С использованием введенных обозначений двухуровневая задача выбора оптимального состава системы может быть записана следующим образом. Найти

$$Z_P = \min\{\sum_{i\in I}(c_i^\circ\ z_i + c_i\ v_i + \sum_{j\in J} c_{ij}\ x_{ij}) + \sum_{k\in K} d_k^\circ\ y_k\} \tag{2.1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I} x_{kj}\ = 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}; \tag{2.2}$$

$$\sum_{j\in J_l} p_{ij}\ x_{ij} \leq v_i^\circ z_i + v_i - \sum_{l'=1}^{l-1} s_{il'} \sum_{j\in J_{l'}} p_{ij}\ x_{ij}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad l \in \boldsymbol{L}; \tag{2.3}$$

$$0 \le v_i \le V_i z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}; \tag{2.4}$$

$$0 \le x_{ij} \le z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad j \in \boldsymbol{J}; \tag{2.5}$$

$$y_k \ge z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}_k, \quad k \in \boldsymbol{K}; \tag{2.6}$$

$$y_k, z_i \in \{0,1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad k \in \boldsymbol{K}. \tag{2.7}$$

Сформулированную задачу обозначим через P. Целевая функция (2.1) задачи имеет смысл суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию технических средств и входящих в их состав узлов. Равенства (2.2) гарантируют выполнение всех работ. Неравенства (2.3) устанавливают зависимость объемов производства изделий от объемов выполняемых ими работ. В левой части этих неравенств стоит выражение для требующегося количества изделий i-го образца на l-м этапе выполнения работ. Правая часть имеет смысл количества изделий i-го образца имеющихся в наличии к началу l-го этапа с учетом потерь на предыдущих этапах. Неравенства (2.4) устанавливают верхнюю границу на возможные объемы производства изделий, а неравенства (2.5) и (2.6) требуют внесения затрат на разработку новых узлов и образцов технических средств при включении их в состав системы.

2.2 Нижние оценки

Рассмотрим две оценочные задачи LW и LS, которые получаются путем внесения в целевую функцию части ограничений исходной задачи. Пусть двойственные переменные $\alpha_j,\ j \in \boldsymbol{J}$ соответствуют группе ограничений (2.2). Обозначим через LW следующую оптимизационную задачу. Найти

$$Z_{LW}[(\alpha_j)] = \min\{\sum_{i\in I}(c_i^\circ\ z_i + c_i\ v_i + \sum_{j\in J}(c_{ij} - \alpha_j)\ x_{ij}) + \sum_{i\in I} d_k^\circ\ y_k\}$$

при ограничениях (2.3) – (2.7). Соответствующая двойственная задача DLW

$$Z_{DLW} \;=\; \max_{\alpha}\; \{Z_{LW}[(\alpha_j)] \;+\; \sum_{j\in J} \alpha_j\}$$

позволяет находить нижнюю оценку оптимального значения целевой функции. Для построения оценочной задачи LS заменим в системе ограничений исходной задачи неравенства (2.6) на условия:

$$y_k \;\geq\; \sum_{i\in i_k} x_{ij}, \qquad k \in \boldsymbol{K}, \quad j \in \boldsymbol{J}. \tag{2.8}$$

Легко проверить, что при такой замене область допустимых значений исходной задачи не меняется. Пусть двойственные переменные $\beta_{kj} \geq 0, \quad k \in \boldsymbol{K}, \quad j \in \boldsymbol{J}$ соответствуют неравенствам (2.8). Через LS обозначим следующую задачу. Найти

$$\begin{aligned} Z_{LS}[(\alpha_j),(\beta_k j)] \;=\; & \min\{\sum_{i\in I}(c_i^{\circ}\; z_i + c_i\; v_i \;+ \sum_{j\in J}(c_{ij} - \alpha_j \\ & + \;\sum_{k\in K_i} \beta_{kj})\; x_{ij}) \;+ \sum_{k\in K}(d_k^{\circ} - \sum_{j\in J} \beta_{kj}) y_k\} \end{aligned}$$

при ограничениях (2.3) – (2.5),(2.7). Решение двойственной задачи DLS

$$Z_{DLS} \;=\; \max_{\alpha\beta}\; \{Z_{LS}[(\alpha_j),(\beta_k j)] \;+\; \sum_{j\in J} \alpha_j\}$$

также доставляет нижнюю оценку целевой функции (2.1).

Теорема 4 *Задачи DLW и DLS полиномиально разрешимы.*

Доказательство. 1. Покажем, что задача DLW сводится к задаче линейного программирования $\overline{P}$.

Используя соотношения двойственности для задач линейного программирования, представим задачу $\overline{P}$ в виде:

$$\overline{Z_P} \;=\; \max_{\alpha}\; \{\overline{Z_{LW}}(\alpha) \;+\; \sum_{j\in J} \alpha_j\},$$

где $\overline{Z_{LW}}(\alpha)$ — оптимальное значение линейной релаксации $\overline{LW}$.

Покажем, что задача $\overline{LW}$ имеет оптимальное решение с булевыми значениями переменных $(z_k)(y_i)$, откуда и будет следовать требуемое.

Для каждого $i \in \boldsymbol{I}$ рассмотрим вспомогательную подзадачу линейного программирования S_i. Найти

$$g_i(\alpha) \; = \; \max\{\sum_{j \in J}(\alpha_j - c_{ij})\; x_{ij} - c_i\; v_i - c_i^{\circ}\} \tag{2.9}$$

при ограничениях (2.3),(2.4) и

$$0 \le x_{ij} \le 1, \quad k \in \boldsymbol{I},\; j \in \boldsymbol{J}. \tag{2.10}$$

Убедимся в том, что задача $\overline{LW}$ эквивалентна следующей задаче G. Найти

$$Z_G \; = \; \min\{\sum_{k \in K} d_k^{\circ}\; y_k - \sum_{i \in i} g_i(\alpha) z_i\}$$

при ограничениях (2.6) и

$$y_k, z_i \in [0,1], \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad k \in \boldsymbol{K}. \tag{2.11}$$

Действительно, пусть $(y_k^*)(z_i^*)$ — оптимальное решение задачи G и $(x_{ij}^*)(v_i^*)$ — оптимальное решение в подзадачах S_i, $i \in \boldsymbol{I}$. Тогда равенства:

$$z_i = z_i^*, \quad y_k = y_k^*, \quad x_{ij} = x_{ij}^* z_i^*, \quad v_i = v_i^* z_i^*, \quad i \in \boldsymbol{I},\; k \in \boldsymbol{K},\; j \in \boldsymbol{J}$$

восстанавливают оптимальное решение $(y_k)(z_i)(x_{ij})(v_i)$ задачи $\overline{LW}$ и $\overline{Z_{LW}} = Z_G$.

Пусть теперь $(y_k), (z_i), (x_{ij}), (v_i)$ оптимальное решение задачи $\overline{LW}$. Определим решение подзадач S_i, $i \in \boldsymbol{I}$ равенствами:

$$v_i^* = \begin{cases} v_i/z_i, & \text{если} \;\; z_i > 0, \\ 0 & \text{если} \;\; z_i = 0; \end{cases} \qquad x_{ij}^* = \begin{cases} x_{ij}/z_i, & \text{если} \;\; z_i > 0, \\ 0 & \text{если} \;\; z_i = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что построенное решение допустимо в S_i, $i \in \boldsymbol{I}$ и

$$g_i(\alpha) z_i \; = \; \{\sum_{j \in J}(\alpha_j - c_{ij})\; x_{ij} - c_i\; v_i - c_i^{\circ} z_i\}.$$

Определяя решение задачи G равенствами $z_i^* = z_i, \quad y_k^* = y_k$, получаем сведение задачи G к задаче $\overline{LW}$.

Покажем, что для задачи G легко построить оптимальное целочисленное решение. Пусть $(y_k^*)(z_i^*)$ — оптимальное решение задачи G. Очевидно, что если $g_i(\alpha) \leq 0$, то $z_i^* = 0$. Если же $g_i(\alpha) > 0$, то $z_i^* = \min_{k \in K_i} y_k^*$. Положим

$$\delta = \min\{y_k^* > 0, k \in \boldsymbol{K}\}; \;\; \boldsymbol{I}_\delta = \{i \in \boldsymbol{I} \mid z_i^* = \delta\}; \;\; \boldsymbol{K}_\delta = \{k \in \boldsymbol{K} \mid y_k^* = \delta\};$$

$$\varepsilon_1 = \sum_{k \in K_\delta} d_k^\circ; \quad \varepsilon_2 = \sum_{i \in I_\delta} g_i(\alpha).$$

Если $\delta = 1$, то решение $(y_i^*)(z_k^*)$ — целочисленное.

Предположим, что $\delta < 1$. Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то уменьшая значения переменных y_k^*, $K \in \boldsymbol{K}_\delta$, z_i^*, $i \in \boldsymbol{i}_\delta$ получаем меньшее значение целевой функции. Если же $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то увеличение значений этих переменных приводит к тому же эффекту. Значит $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, но тогда полагая $y_k = 0$, $k \in \boldsymbol{K}_\delta$ и $z_i = 0$, $i \in \boldsymbol{I}_\delta$, получаем новое оптимальное решение с большим значением параметра δ. Следовательно, последовательно положив нулю все дробные компоненты оптимального решения задачи G, получаем оптимальное целочисленное решение, что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим задачу линейного программирования $\overline{PS}$, получающуюся из задачи $\overline{P}$ заменой условий (2.6) на условия (2.8). Покажем, что задача DLS сводится к задаче $\overline{PS}$. Представим задачу $\overline{PS}$ в виде:

$$\overline{Z_{PS}} \;=\; \max_{\alpha\beta} \{\overline{Z_{LS}}(\alpha\beta) \;+\; \sum_{j \in J} \alpha_j\}, \tag{2.12}$$

где $\overline{Z_{LS}}(\alpha\beta)$ — оптимальное значение линейной релаксации $\overline{LS}$.

$$\overline{Z_{LS}}(\alpha\beta) \;=\; \min\{\sum_{k \in K} (d_k^\circ - \sum_{j \in J} \beta_{kj}) \; y_k - \sum_{i \in i} g_i(\alpha\beta) z_i\}$$

и величины $g_k(\alpha\beta)$ находятся из решения оптимизационной задачи:

$$g_i(\alpha\beta) \;=\; \max\{\sum_{j \in J} (\alpha_j - c_{ij} + \sum_{k \in K_i} \beta_{kj}) \; x_{ij} - c_i \; v_i - c_i^\circ\}$$

при ограничениях (2.3),(2.4) и (2.10).

В отличие от задачи G непрерывные переменные $(y_i),(z_k)$ уже не связаны между собой и их оптимальные значения определяются только знаком соответствующих коэффициентов, откуда $\overline{Z_{LS}}(\alpha\beta) = Z_{LS}(\alpha\beta)$. Теорема 1 доказана.

Задачи $\overline{P}$ и $\overline{PS}$ имеют большую размерность и решение их методами линейного программирования требует значительных усилий. Для вычисления нижних оценок проще использовать задачи DLW или DLS, применяя к ним методы субградиентной оптимизации [43].

На каждой итерации этого метода решаются задачи LS или LW, и по невязке в ограничениях (2.2) и (2.8) производится корректировка множителей $(\alpha_j),(\beta_{ij})$. Трудоемкость решения задачи LS определяется трудоемкостью вычисления коэффициентов целевой функции (2.12). Величины $g_i(\alpha\beta),\ i \in \boldsymbol{I}$ с точностью до коэффициэнтов совпадают с величинами $a_i,\ i \in \boldsymbol{I}$ определенными в параграфе 1.3 и, следовательно могут быть найдены с трудоемкостью $O(IJ(L + \log J))$. Вычисление коэффициентов требует не более $O(KIJ)$ и общая трудоемкость решения задачи LS имеет порядок $O(KIJ + IJ(L + \log J))$.

Теорема 5 *Задача LW решается с трудоемкостью $O(I^2K + JI(L + logJ))$.*

Доказательство. Выше было показано, что задачу LW можно представить в виде:

$$Z_{LW}(\alpha) \ = \ \min\{\sum_{k\in K} d_k^\circ\, y_k - \sum_{i\in I} g_i(\alpha) z_i\}$$

при ограничениях (2.6),(2.7) и не ограничивая общности можно считать, что $g_i(\alpha) \geq 0,\ i \in \boldsymbol{I}$. Запишем условия (2.6) в виде равенства:

$$z_i \ = \ \prod_{k \in K_i} y_k, \qquad i \in \boldsymbol{I},$$

и исключим переменные z_i из рассмотрения. Тогда задача LW может быть представлена как задача минимизации полинома от булевых переменных:

$$\Phi(y) \ = \ \sum_{k \in K} d_k^{\circ}\, y_k - \sum_{i \in i} g_i(\alpha) \prod_{k \in K_i} y_k.$$

Решение этой задачи может быть получено [1] путем сведения ее к задаче о минимальном разрезе на двудольной сети. Пусть $G = (V, E)$ — двудольная сеть с источником s, стоком t, множеством вершин $V = I \cup K \cup \{s, t\}$ и множеством дуг $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $E_1 = \{(s, k) : k \in \boldsymbol{K}\}$, $E_2 = \{(k, i) : k \in \boldsymbol{K}_i, i \in \boldsymbol{I}\}$, $E_3 = \{(i, t) : i \in \boldsymbol{I}\}$. Каждая дуга $e \in E$ имеет пропускную способность $w(e) \geq 0$, определяемую равенством

$$w(e) = \begin{cases} d_k^{\circ}, & \text{если} \ \ e = (s, k) \in E_1, \\ W, & \text{если} \ \ e \in E_2, \quad (W > \sum_{k \in K} d_k^{\circ}), \\ g_i(\alpha), & \text{если} \ \ e = (i, t) \in E_3. \end{cases}$$

Пусть φ — величина минимального разреза. Очевидно, что минимальный разрез не содержит дуг из множества E_2. Более того, для любого решения $y_i \in \{0, 1\}$ легко построить разрез сети G, удовлетворяющий условию:

$$\varphi \ = \ \Phi(y) \ + \sum_{i \in I} g_i(\alpha). \tag{2.13}$$

Для этого достаточно взять все дуги (s, k), для которых $y_k = 1$ и все дуги (i, t), для которых $\prod_{k \in K_i} y_k = 0$. Убедимся в справедливости обратного утверждения, что для любого минимального разреза сети G существует решение $y_k \in \{0, 1\}$, удовлетворяющее равенству (2.13). Пусть множество дуг $\overline{E} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_3$ является минимальным разрезом сети G.

Положим $y_k = 1$, если $e = (s,k) \in \overline{E}_1$ и проверим справедливость равенства (2.13). Для этого достаточно убедиться в том, что множество $\overline{E}_3$ совпадает с множеством дуг $E_y = \{e = (i,t) \mid \prod_{k \in K_i} y_k = 0\}$.

Покажем, что $\overline{E}_3 \supseteq E_y$. Предположим, что существует дуга $e \in E_y$ такая, что $e \notin \overline{E}_3$, т.е. для некоторого номера i справедливо $\prod_{k \in K_i} y_k = 0$ и $(i,t) \notin \overline{E}_3$. Выберем в множестве K_i номер k, для которого $y_k = 0$. Тогда дуга $(s,k) \notin \overline{E}_1$ и последовательность дуг $(s,k)(k,i)(i,t)$ составляют путь из s в t, что невозможно.

Покажем, что $\overline{E}_3 \subseteq E_y$. Предположим, что существует дуга $e = (i,t) \in \overline{E}_3$ такая, что $e \notin E_y$, т.е. $y_k = 1,\ k \in K_i$. По построению, любой путь из s в i проходит только через вершины множества K_i, но так как все ребра $(s,k),\ k \in K_i$ принадлежат $\overline{E}_1$, то удаление ребра (i,t) оставляет множество $\overline{E} \setminus \{(k,t)\}$ разрезом, что противоречит минимальности $\overline{E}$.

Таким образом, решение задачи LW сводится к нахождению минимального разреза на двудольной сети G, что требует $O(I^2K)$, операций [41]. В параграфе 1.3 показано, что вычисление коэффициентов $g_i(\alpha), i \in \boldsymbol{I}$ осуществляется с трудоемкостью $O(JI(L + logJ))$ и общая трудоемкость решения задачи LW оценивается величиной $O(I^2K + JI(L + logJ))$. Теорема 2 доказана.

2.3 Соотношение оценок DLW и DLS

Нижние оценки DLW и DLS несравнимы между собой. В частности, при $v_i^\circ \geq \sum_{j \in J} p_{ij},\ i \in \boldsymbol{I}$ исходная задача принимает вид двухуровневой задачи стандартизации (см. [3], с.262)

$$\min\{\sum_{i \in I}(c_i^\circ\ z_i + \sum_{j \in J} c_{ij}\ x_{ij}) + \sum_{k \in K} d_k^\circ\ y_k\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in \boldsymbol{J};$$

$$0 \le x_{ij} \le z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad j \in \boldsymbol{J};$$

$$y_k \ge z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}_k, \quad k \in \boldsymbol{K};$$

$$y_k, z_i \in \{0,1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad k \in \boldsymbol{K}.$$

Покажем, что в этом случае $Z_{DLS} \ge Z_{DLW}$. Пусть $(y_k)(z_i)(x_{ij})(v_i)$ допустимое решение задачи $\overline{PS}$. Из (2.8) и (2.5) имеем

$$y_k \ge \max_{j\in J} \sum_{i\in I_k} x_{ij} \ge \max_{i\in I_k} \max_{j\in J} x_{ij} = \max_{i\in I_k} z_i \ge z_i, \quad i \in \boldsymbol{I}_k, \quad k \in \boldsymbol{K},$$

т.е. любое допустимое решение задачи $\overline{PS}$ является допустимым решением в задаче $\overline{P}$, откуда $Z_{DLS} \ge Z_{DLW}$.

Приведем пример исходных данных, на которых справедливо обратное неравенство, точнее $Z_{DLW} \ge NZ_{DLS}$ для любого целого $N > 0$. Положим

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{K} = \{1, 2, \ldots, N\}; \ \boldsymbol{K}_i = \{i\}, \ i \in \boldsymbol{I}; \ \boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} = \{1\};$$

$$c_i^\circ = c_i = c_{ij} = i_k = 0, \ p_{ij} = d_k^\circ = 1, \ v_i^\circ = 1/N, \ k \in \boldsymbol{K}, j \in \boldsymbol{J}, i \in \boldsymbol{I}.$$

Тогда задача DLW может быть записана в виде:

$$\max_{\alpha}\{\alpha + \min_{x,y}\{\sum_{k\in K} y_k - \sum_{i\in I} \alpha\ x_i\}\}$$

при ограничениях:

$$x_i \le v_i^\circ, \qquad 0 \le x_i \le y_i, \qquad y_i \in \{0,1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}.$$

Данная задача распадается по i на независимые подзадачи вида:

$$g(\alpha) = \min_{x,y}\{y - \alpha x\}$$

при ограничениях:

$$Nx \ \le \ 1; \qquad 0 \ \le \ x \ \le y; \qquad y \in \{0,1\},$$

и $Z_{DLW} \ = \ \max_\alpha\{\alpha + Ng(\alpha)\}$. Заметим, что $g(\alpha) \ = \ \min(0, 1 - \alpha/N)$, откуда

$$Z_{DLW} = \max_\alpha\{\alpha + \min(0, N - \alpha)\} = N.$$

Вычислим на указанных исходных данных значение Z_{DLS}. Задача DLS принимает вид:

$$Z_{DLW} = \max_{\alpha\beta}\{\alpha + \min_{x,y}\{\sum_{i\in I}(1-\beta_i)y_i + \sum_{i\in I}(\beta_i - \alpha)x_i\}\}$$

при ограничениях:

$$0 \ \le \ Nx_i \ \le \ 1, \quad y_i \in \{0,1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}.$$

Оптимальные значения переменных β_i равны единице и

$$Z_{DLW} = \max_\alpha\{\alpha + \min(0; 1 - \alpha)\} = 1.$$

2.4 Результаты тестовых расчетов

В предыдущем параграфе рассматривался пример исходных данных, на котором оптимальные значения всех переменных x_{ij}, $i \in \boldsymbol{I}$, $j \in \boldsymbol{J}$, были достаточно близки к нулю. Такие примеры являются экзотикой. Как правило, при фиксированных целочисленных переменных всегда существует единственный номер $i \in \boldsymbol{I}$, для которого затраты на выполнение j–й работы минимальны. Дробные значения переменных x_{ij}, $i \in \boldsymbol{I}$, $j \in \boldsymbol{J}$, могут появляться при жестких ограничениях (2.4) или малых значениях v_i°, $i \in \boldsymbol{I}$. Ниже приводятся результаты тестовых расчетов, показывающие зависимость параметра $\delta \ = \ Z_{DLS}/Z_{DLW}$ от жесткости ограничений (2.3), (2.4).

Решаемые задачи имели размерность $K = 20$; $J = 20$; $I = 30$; $L = 4$. Значения величин выбирались следующим образом: $c_i^\circ = 50$; $c_i = 1$; $c_{ij} = s_{il} = 0$; $d_k^\circ = 100$; $v_i^\circ = 0.25\lambda$, $V_i = \lambda$, где λ некоторый действительный параметр. Величины p_{ij} выбирались с помощью датчика псевдослучайных чисел с равномерным распределением. Множества K_i, $i \in \boldsymbol{I}$ с вероятностью 0.2 включали в свой состав каждый элемент множества $\boldsymbol{K}$. Матрица (p_{ij}) на 30% заполнялась числом 10^6. Результаты расчетов изображены на рисунке 2.1. Нумерация кривых

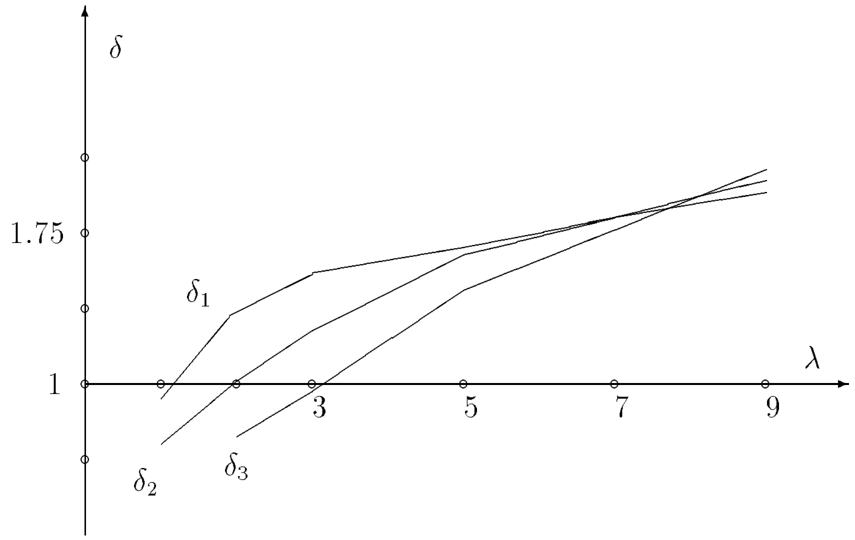

Рис. 2.1:

соответствует следующим значениям величин p_{ij}:

$$\delta_1 \text{ при } p_{kj} \in [1, 10]; \qquad \delta_2 \text{ при } p_{kj} \in [2, 4]; \qquad \delta_3 \text{ при } p_{kj} = 3.$$

Каждая точка излома на графике соответствует среднему геометрическому значению величины δ для 10 тестовых задач. Отметим, что при $\lambda < 1$ система ограничений исходной задачи оказывается несовместной. При $\lambda > 9$ ограничения (2.3), (2.4) становятся несущественными и исходная задача трансформируется в двухуровневую задачу стандартизации [3]. В целом можно утверждать, что оценка DLW имеет некоторые преимущества при жестких ограничениях (2.3), (2.4) и хуже оценки DLS в остальных случаях.

Глава 3

Динамические задачи

3.1 Постановка задачи

Для формулировки задачи введем следующие обозначения. Обозначим через $\boldsymbol{T} = \{1, \ldots, T\}$ множество единичных отрезков, образующих плановый промежуток времени, на котором рассматривается процесс развития системы технических средств. Для определенности считаем, что единичный отрезок имеет длительность 1 год, а t-ый отрезок будем называть t-ым годом. На протяжении планового промежутка может изменяться как качественный, так и количественный состав системы Пусть $\boldsymbol{J} = \{1, \ldots, J\}$ — множество работ, выполнение которых должно быть обеспечено рассматриваемой системой технических средств. При этом будем предполагать, что множество $\boldsymbol{J}$ разбито на непересекающиеся подмножества $\boldsymbol{J}_t$, $t \in \boldsymbol{T}$, и считать, что $\boldsymbol{J}_t$ — множество работ, которые должны быть выполнены в t-ом году. Для $j \in \boldsymbol{J}$ через $t(j)$ обозначим такой номер, $t \in \boldsymbol{T}$ что $j \in \boldsymbol{J}_t$. Обозначим через $\boldsymbol{I} = \{1, \ldots, I\}$ набор рассматриваемых разновидностей (образцов) технических средств.

Введем также следующие обозначения:

c°_{it} — затраты на разработку средств i-го образца, если разработка завершается в t-м году;

g_{it} — стоимость производства одного средства i-го образца в t-м году;

c_{ij} — затраты на выполнение средствами i-го образца j-ой работы;
p_{ij} — количество средств i-го образца одновременно необходимых для выполнения j-ой работы;
ρ_i — длительность эксплуатации одного изделия;
v°_{it} — количество средств i-го образца из начального состава системы, т.е. состава на начало рассматриваемого промежутка планирования, пригодное для эксплуатации в t-м году;
V_{it} — ограничения сверху на возможный объем производства средств i-го образца в t-м году.

Введем следующие переменные:
$z_{it} \in \{0,1\}$, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$. Переменная z_{it} принимает значение 1, если в t-м году закончена разработка средства i-го образца, и $z_{it} = 0$ в противном случае.
$v_{it} \geq 0$, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$. Величина v_{it} равняется количеству средств i-го образца, производимых для пополнения состава системы в t-м году;
$x_{ij} \geq 0$, $i \in \boldsymbol{I}$, $j \in \boldsymbol{J}$. Величина x_{ij} равняется доле j-й работы, выполняемой средствами i-го образца.

С использованием введенных обозначений **динамическая задача выбора оптимального состава системы** записывается следующим образом:

Найти

$$Z_P = \min \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \{ c^\circ_{it}\; z_{it} + g_{it}\; v_{it} + \sum_{j \in J_t} c_{ij}\; x_{ij} \}; \tag{3.1}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}; \tag{3.2}$$

$$\sum_{j \in J_t} p_{ij}\; x_{ij} \leq v^\circ_{it} + \sum_{\tau = t - \rho_i + 1}^{t} v_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}; \tag{3.3}$$

$$0 \leq v_{it} \leq V_{it} \max_{\tau \leq t} z_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}; \tag{3.4}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \max_{\tau \leq t(j)} z_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad j \in \boldsymbol{J}; \tag{3.5}$$

$$z_{it} \in \{0,1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}. \tag{3.6}$$

Данную задачу обозначим через P. Целевая функция задачи имеет смысл суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию технических средств в течение планового периода. Равенства (3.2) гарантируют выполнение всех работ. Неравенства (3.3) ограничивают возможности выполнения работ имеющимися в наличии изделиями. Ограничения (3.4) устанавливают верхнюю границу на возможные объемы производства, а неравенства (3.5) требуют внесения затрат на разработку новых образцов при включении их в состав системы.

3.2 Нижние оценки

Заменим исходную задачу следующей эквивалентной задачей P_y.

Найти

$$Z_{P_y} \;=\; \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \{c^{\circ}_{it}\; z_{it} + g_{it}\; v_{it} + \sum_{j \in J_t} c_{ij}\; x_{ij}\} \tag{3.7}$$

при следующих ограничениях

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \;= 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}; \tag{3.8}$$

$$\sum_{j \in J_t} p_{ij}\; x_{ij} \;\le\; v^{\circ}_{it}\; y_{it} + \sum_{\tau = t - \rho_i + 1}^{t} v_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}; \tag{3.9}$$

$$y_{it} \;\le\; \sum_{\tau \le t} z_{i\tau} \;\le\; 1, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}; \tag{3.10}$$

$$0 \;\le\; v_{it} \;\le\; V_{it}\; y_{it}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}; \tag{3.11}$$

$$0 \;\le\; x_{ij} \;\le\; y_{it(j)}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad j \in \boldsymbol{J}; \tag{3.12}$$

$$y_{it},\; z_{it} \in \{0,1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим оценочную задачу $LR(\lambda)$.

Найти

$$Z_{LR}(\lambda) \;=\; \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \{c^{\circ}_{it}\; z_{it} + g_{it}\; v_{it} + \sum_{j \in J_t} (c_{ij} - \lambda_j)\; x_{ij}\} + \sum_{j \in J} \lambda_j;$$

при ограничениях (3.9)–(3.13), где $\lambda_j,\ j \in \boldsymbol{J}$ — множители Лагранжа, соответствующие равенствам (3.8). Решение двойственной задачи D

$$Z_D \;=\; \max_{\lambda}\; Z_{LR}(\lambda)$$

доставляет нижнюю оценку оптимального значения целевой функции (3.1):

$$Z_P \;\geq\; Z_D \;\geq\; Z_{LR}(\lambda).$$

Теорема 6 *Оценочная задача $LR(\lambda)$ полиномиально разрешима.*

Доказательство. При фиксированных значениях $\lambda_j,\ j \in \boldsymbol{J}$ задача $LR(\lambda)$ распадается по i на независимые подзадачи S_i вида:
Найти

$$Z_i = \sum_{t \in T}\{c^{\circ}_{it}\ z_{it} + g_{it}\ v_{it} + \sum_{j \in J_t}(c_{ij} - \lambda_j)\ x_{ij}\}$$

при соответствующих условиях (3.9) – (3.13).

Для решения задачи S_i, $i \in \boldsymbol{I}$, рассмотрим серию задач линейного программирования $S_{i\theta}$, $\theta \in \boldsymbol{T}$, где задача $S_{i\theta}$ имеет вид:
Найти

$$Z_{i\theta} = \min \sum_{t=\theta}^{T}\{g_{it}\ v_{it} + \sum_{j \in J_t}(c_{ij} - \lambda_j)\ x_{ij}\} \tag{3.14}$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in J_t} p_{ij}\ x_{ij} \;\leq\; v^{\circ}_{it} + \sum_{\tau=t-\rho+1}^{t} v_{i\tau}, \qquad t = \theta, \ldots, T; \tag{3.15}$$

$$0 \;\leq\; v_{it} \;\leq\; V_{it}, \qquad t = \theta, \ldots, T; \tag{3.16}$$

$$0 \;\leq\; x_{ij} \;\leq 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}_t,\ t = \theta, \ldots, T. \tag{3.17}$$

Понятно, что задача $S_{i\theta}$ эквивалентна задаче S_i при дополнительном условии $z_{i\theta} = 1$. В оптимальном решении задачи S_i существует не более одного $\theta \in \boldsymbol{T}$, для которого $z_{i\theta} = 1$. Таким образом

$$Z_i = \min(0, \min_{\theta \in T}(Z_{i\theta} + c^{\circ}_{i\theta}))$$

откуда и следует утверждение теоремы 6.

Теорема 7 *Если* $\rho_i \geq T,\ i \in \boldsymbol{I}$, *то задача* $LR(\lambda)$ *разрешима с трудоемкостью* $O(IJ(T^2 + \log J))$.

Доказательство. Из теоремы 6, следует что построение алгоритма решения задачи $LR(\lambda)$ сводится к построению алгоритма решения задачи $S_{i\theta}$. Не ограничивая общности можно считать коэффициенты $c_{ij} - \lambda_j$ задачи $S_{i\theta}$ отрицательными величинами, поскольку в противном случае значения соответствующих переменных в оптимальном решении равны 0.

При фиксированных значениях переменных $v_{it},\ i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T}$ задача $S_{i\theta}$ распадается на $T - (\theta - 1)$ задач о рюкзаке с вещественными переменными. Оптимальное решение такой задачи может быть выписано в явном виде. Действительно, рассмотрим задачу, соответствующую номеру $t_\circ \geq \theta$, и пусть J_{t_0} упорядочено по неубыванию величин

$$c'_j = \frac{c_{ij} - \lambda_j}{p_{ij}},$$

Обозначим через $j(t_\circ)$, минимальный номер $j \in \boldsymbol{J}_{t_0}$ для которого

$$\sum_{j' \in J_{t_\circ},\ j' \leq j} p_{ij'} > v^\circ_{it} + \sum_{\tau=\theta}^{t_0} v_{i\tau}.$$

Если такого номера не существует, то положим $j(t_\circ) = J + 1$.

Оптимальное решение (x_{ij}) рассматриваемой задачи о рюкзаке определяется по формуле

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j > j(t_\circ), \\ 1, & \text{если} \quad j < j(t_\circ), \\ (v^\circ_{it} + \sum\limits_{\tau=\theta}^{t_\circ} v_{i\tau} - \sum\limits_{j' \in J_{t_0}\ j' < j} p_{ij'})/p_{ij} & \text{если} \quad j = j(t_\circ). \end{cases}$$

Заметим, что если $\rho \geq T$, то при увеличении значения переменной $v_{it_\circ}$ на достаточно малую величину ε изменение целевой функции задачи $S_{i\theta}$ равно

$$(g_{it_0} + \sum_{t=t_0}^{T} c'_{j(t)}) * \varepsilon.$$

Оптимальные значения переменных v_{it} определяются с помощью процедуры координатного спуска, начиная с нулевых значений. На каждом шаге этой процедуры ищется такой номер $t_\circ \geq \theta$, для которого относительное уменьшение целевой функции при возрастании переменной $v_{it_\circ}$ достигает наибольшего значения. Затем определяется приращение переменной $v_{it_\circ}$ и изменяются соответствующим образом значения переменных x_{ij}. Если на некотором шаге ни по одной из координат нельзя добиться уменьшения целевой функции, то полученное решение является оптимальным [16].

Упорядочивание множеств $\boldsymbol{J}_t$ осуществляется с трудоемкостью $O(J \lg J)$. Вычисление приращений и выбор наилучшего номера $t_\circ \in \boldsymbol{T}$ требует $O(T)$ операций. С такой же трудоемкостью находится и длина шага. Число шагов определяется количеством ограничений (3.16), (3.17) и не превосходит величины $(T + J)$, а так как $T < J$, то трудоемкость решения $S_{i\theta}$ при упорядоченных множествах $\boldsymbol{J}_t$ равна $O(JT)$. Чтобы найти $\min\limits_{\theta \in T}(Z_{i\theta} + c^\circ_{i\theta})$ задача $S_{i\theta}$ решается для каждого $\theta \in \boldsymbol{T}$. Общая трудоемкость алгоритма

$$I(T * O(JT) + O(J \lg J)) = O(IJ(T^2 + \lg J)).$$

Теорема 8 *Если $\rho_i = 1,\ i \in \boldsymbol{I}$, то двойственная задача D полиномиально разрешима.*

Доказательство. Убедимся в том, что $\overline{Z_i} = Z_i$. Пусть (z^*_t) (y^*_t) (v^*_t) (x^*_j) – оптимальное решение задачи $\overline{S_i}$. Для каждого $k \in \boldsymbol{T}$ построим решение задачи S_i по следующему правилу:

$$z_t(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = k\,; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \qquad t \in \boldsymbol{T};$$

$$y_t(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq k\,; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \qquad t \in \boldsymbol{T};$$

$$v_t(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < k\,; \\ v_t^*/y_t^* & \text{в противном случае;} \end{cases} \qquad t \in \boldsymbol{T};$$

$$x_j(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < k\,; \\ x_j^*/y_{t(j)}^* & \text{в противном случае;} \end{cases} \qquad j \in \boldsymbol{J}$$

. Если $z_k^* = 0$, то полагаем $z_t(k) = y_t(k) = v_t(k) = 0,\ t \in \boldsymbol{T}; \quad x_j(k) = 0,\ j \in \boldsymbol{J}$.

Легко проверить, что для каждого $k \in \boldsymbol{T}$ построенное решение является допустимым в задаче S_i и кроме того

$$\begin{aligned} \overline{Z_i} \ &\geq \ \sum_{t\in T} \{ \sum_{j \in J_t} (c_j - \lambda_j) \sum_{k \in T} z_k^* x_j(k) \\ &+ \ g_t \sum_{k\in T} z_k^* v_t(k) + c_t^\circ \sum_{k\in T} z_k^* z_t(k) \} \\ &= \ \sum_{k\in T} z_k^* \sum_{t \in T} \{ \sum_{j\in J_t} (c_j - \lambda_j) x_j(k) + g_t v_t(k) + c_t^\circ z_t(k) \} \\ &= \ \sum_{k\in T} z_k^* Z_i(k) \ \geq \ \max_k \ Z_i(k). \end{aligned}$$

Таким образом, $\overline{Z_i} \ \geq \ Z_i$ и так как $\overline{Z_i} \ \leq \ Z_i$, то $\overline{Z_i} \ = \ Z_i$ и $Z_{LR}(\lambda) = \overline{Z_{LR}(\lambda)}$, т.е. $Z_D = \overline{Z_D} = \overline{Z_{P_Y}}$. Следовательно, для решения задачи D достаточно найти оптимальное решение задачи линейного программирования $\overline{P_y}$ и по нему восстановить частично–целочисленное решение двойственной задачи. Теорема 8 доказана.

Отметим, что если условия теоремы 8 не выполнены, и $\rho_i > 1$ для некоторого $i \in \boldsymbol{I}$, то абсолютный разрыв двойственности $\Delta = Z_i - \overline{Z_i}$ может достигать значительных размеров.

Теорема 9 *Для любого $N > 0$ существуют исходные данные задачи S_i, на которых $\Delta > N$.*

Доказательство. Положим

$$\boldsymbol{T} = \{1, 2\};\ \boldsymbol{J} = \{1, 2\};\ \boldsymbol{J}_1 = \{1\};\ \boldsymbol{J}_2 = \{2\};$$

$$p_j = 1,\ c_j = 0,\ j \in \boldsymbol{J}; \qquad V_t = 2N,\ v_t^\circ = 0,\ t \in \boldsymbol{T};$$

$$\lambda = (0,\ N+2);\ c^\circ = (2N,\ 0);\ g = (0,\ 2N);\ \rho = 2.$$

Легко проверить, что в задаче S_i нулевое решение является оптимальным, $Z_i = 0$, а на допустимом решении

$$z = (\frac{1}{2N},\ 1 - \frac{1}{2N});\quad y = (\frac{1}{2N},\ 1);\quad v = (1,\ 0);\quad x = (0,\ 1)$$

значение целевой функции задачи $\overline{S_i}$ равно $-N-1$. Теорема 9 доказана.

3.3 Общая схема алгоритма

Алгоритм решения исходной задачи основан на полиномиальной разрешимости оценочной задачи $LR(\lambda)$. Работа алгоритма начинается с вычисления нижней оценки Z_D. Пусть (z_{it}^k) (y_{it}^k) (v_{it}^k) (x_{ij}^k) — оптимальное решение задачи $LR(\lambda^k)$ при фиксированных значениях параметров $\lambda_j = \lambda_j^k,\ j \in \boldsymbol{J}$. Если равенства (3.2) выполняются, то получено точное решение исходной задачи. В противном случае вектор

$$S_j^k\ =\ 1 - \sum_{i \in I} x_{ij}^k, \qquad j \in \boldsymbol{J},$$

являясь субградиентом функции $Z_{LR}(\lambda)$ в точке $\lambda_j^k,\ j \in \boldsymbol{J}$, задает направление изменения множителей Лагранжа. Полагаем

$$\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + \beta^k\ S_j^k, \quad j \in \boldsymbol{J}$$

и возвращаемся к решению задачи $LR(\lambda)$ с новыми значениями параметров λ [43].

Алгоритм построения верхней оценки Z_0 формирует множество номеров

$\boldsymbol{I}_0 = \{i \in \boldsymbol{I} \mid \sum_k \sum_{t \in T} z_{it}^k > 0\}$ и для каждого $i_0 \in \boldsymbol{I}_0$ выполняет следующие действия.

Шаг 0. Положить $\boldsymbol{I}_1 = \{i_0\}$.

Шаг 1. Решить двойственную задачу D с дополнительными ограничениями

$\sum_{t\in T} z_{it} = 1, \quad i \in \boldsymbol{I}_1$. На каждой итерации решения данной задачи оптимальное решение задачи $LR(\lambda)$ достроить до допустимого решения исходной задачи. Наилучшее решение запомнить в качестве рекорда Z_0.

Шаг 2. Найти номер $i_1 \in \boldsymbol{I} \setminus \boldsymbol{I}_1$, для которого $\gamma_{i_1} = \sum_k \sum_{t\in T} z^k_{i_1 t}$ — частота вхождения в оптимальное решение была максимальной. Если $\gamma_{i_1} = 0$, то перейти к следующему элементу множества $\boldsymbol{I}_0$. В противном случае положить $\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_1 \cup \{i_1\}$ и вернуться на шаг 1.

Трудоемкость приведенного алгоритма не превосходит величины $O(m^2 Q)$, где Q – трудоемкость решения двойственной задачи. О качестве получаемого решения можно судить, например, по оценке относительного уклонения $\varepsilon = (Z_0/Z_D - 1)$, которая наряду с погрешностью самого алгоритма $\delta = (Z_0/Z - 1)$ включает еще и погрешность, связанную с разрывом двойственности.

3.4 Динамические задачи с ограничениями на номенклатуру изделий

Предположим, что на развитие системы в течение планового периода наложены дополнительные ограничения, связанные с номенклатурой технических средств. Пусть величины b_{it}, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$ задают расход некоторого обобщенного ресурса, связанного с введением в состав системы новых образцов, а величина B — суммарный ресурс, выделяемый на развитие системы в течение всего планового периода. Дополнительная группа ограничений, связанная с номенклатурой технических средств, может быть записана следующим образом:

$$\sum_{t\in T}\sum_{i\in I} b_{it}\, z_{it} \le B. \tag{3.18}$$

В случае $b_{it} = 1$, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$, неравенство (3.18), можно интерпретировать как ограничение на суммарное число образцов, применяемых для выполнения работ в течение всего планового периода. Исходную задачу с дополнительным ограничением (3.18) обозначим через P_B.

Рассмотрим другой вариант ограничений на номенклатуру, когда суммарный ресурс выделяется не сразу на весь интервал планирования, а разбивается по годам. Обозначим через $\boldsymbol{K}_t$, $t \in \boldsymbol{T}$, величину ресурса, выделяемого в t-м году. Тогда ограничения на номенклатуру образцов могут быть записаны следующим образом:

$$\sum_{i \in I} b_{it}\ z_{it} \le \boldsymbol{K}_t, \qquad t \in \boldsymbol{T}. \tag{3.19}$$

Исходную задачу с дополнительными ограничениями (3.19) обозначим через P_K.

Построение алгоритмов решения задач P_B и P_K осуществляется по той же схеме, что и для исходной задачи. Решение двойственной задачи с дополнительным ограничением (3.18) сводится в конечном счете к решению следующей задачи. Найти

$$\max \sum_{\theta \in T} \sum_{i \in I} Z_{i\theta}\ z_{i\theta}$$

при следующих ограничениях

$$\sum_{\theta \in T} z_{i\theta} \ \le\ 1, \qquad i \in \boldsymbol{I};$$

$$\sum_{\theta \in T} \sum_{i \in I} b_{i\theta}\ z_{i\theta} \ \le\ B;$$

$$z_{i\theta} \in \{0, 1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad \theta \in \boldsymbol{T}.$$

Эта задача известна как задача о многовариантном рюкзаке [47]. Линейная релаксация данной задачи решается с трудоемкостью $O(lm)$, и среди ее оптимальных решений всегда существует такое, в котором не более двух переменных принимают дробные значения [28]. В случае $b_{it} = 1$, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$, данная задача вырождается, и ее оптимальное решение находится за один просмотр.

Для задачи P_K вычисление нижней оценки требует решения следующей задачи. Найти

$$\max \sum_{\theta \in T} \sum_{i \in I} Z_{i\theta}\ z_{i\theta}$$

при следующих ограничениях

$$\sum_{\theta \in T} z_{i\theta} \ \leq \ 1, \qquad i \in \boldsymbol{I};$$

$$\sum_{i \in I} b_{i\theta}\ z_{i\theta} \ \leq \ K_\theta \qquad \theta \in \boldsymbol{T};$$

$$z_{i\theta} \in \{0, 1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad \theta \in \boldsymbol{T},$$

которая известна как обобщенная задача о назначениях. В случае $b_{it} = 1,\ i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T}$, эта задача принимает вид транспортной задачи и легко решается точно. В общем же случае она является NP – трудной задачей дискретной оптимизации, и для ее решения разработаны точные и приближенные алгоритмы [47].

3.5 Динамические задачи с фактором серийности

Рассмотрим обобщение исходной задачи, когда стоимость производства изделий $g_{it},\ i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T}$ не является постоянной величиной, а зависит от суммарного объема выпуска изделий:

$$g_{it} \ = \ g_{it}\ (\sum_{\tau \in T} v_{i\tau}\ ), \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}.$$

Будем предполагать, что для каждого $i \in \boldsymbol{I}$ заданы интервалы серийности w_i:

$$0 \ < \ w_{i1} \ < \ w_{i2} \ < \ \ldots \ < \ w_{iq_i} \ = \ \sum_{\tau \in T} V_{i\tau},$$

внутри каждого из которых стоимость производства остается постоянной величиной, а при переходе из одного интервала в другой может меняться произвольно (см. рис.3.1). Такое обобщение исходной задачи обозначим через P_w.

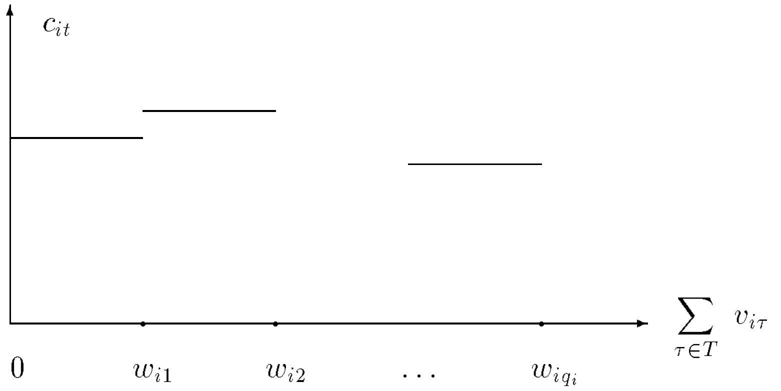

Рис. 3.1

Алгоритм решения задачи P_w также основан на полиномиальной разрешимости релаксированной задачи $LR(\lambda)$, при построении которой задача $S_{i\theta}$ принимает следующий вид. Найти

$$Z_{i\theta} \;=\; \max \sum_{t \geq \theta} \{ \sum_{j \in J_t} (\lambda_j - c_j)\; x_j - g_t\; (\sum_{\tau \in T}\; v_{i\tau})\; v_t \}$$

при следующих ограничениях

$$\sum_{j \in J_t} p_j\; x_j \;\leq\; v_t^\circ + \sum_{\tau = t-\rho+1}^{t} v_\tau, \qquad t \geq \theta;$$

$$0 \;\leq\; v_t \;\leq\; V_t, \qquad t \geq \theta;$$

$$0 \;\leq\; x_j \;\leq\; 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}_t, \quad t \geq \theta.$$

Алгоритм решения данной задачи последовательно рассматривает все интервалы серийности $[w_{k-1}, w_k)$, $1 \leq k \leq q_i$, и на каждом из них решает вспомогательную задачу $S_{i\theta}(w_{k-1}, w_k)$. Найти

$$Z_k \;=\; \max \sum_{t \geq \theta} \{ \sum_{j \in J_t} (\lambda_j - c_j)\; x_j - g_t(w_{k-1}, w_k)\; v_t \}$$

при следующих ограничениях

$$\sum_{j \in J_t} p_j\; x_j \;\leq\; v_t^\circ + \sum_{\tau = t-\rho+1}^{t} v_\tau, \qquad t \geq \theta;$$

$$w_{k-1} \;\leq\; \sum_{t \geq \theta} v_t \;<\; w_k;$$

$$0 \;\leq\; v_t \;\leq\; V_t, \qquad t \geq \theta;$$

$$0 \le x_j \le 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}_t, \quad t \ge \theta,$$

где $g_t(w_{k-1}, w_k)$ – постоянная величина, равная стоимости производства i–го образца в t–м году при объемах партии в интервале от w_{k-1} до w_k. Очевидно, что $Z_{i\theta} = \max\limits_k Z_k$.

При $\rho_i \ge l$ или $\rho_i = 1$ задача $S_{i\theta}(w_{k-1}, w_k)$ упрощается и ее оптимальное решение находится с трудоемкостью $O(nq_i(l + n\log n))$. В общем же случае она является задачей линейного программирования и решается стандартными методами.

Замечание. Пусть стоимость производства изделий на каждом интервале серийности задается линейной функцией

$g_t(v) = g_t^\circ(w_{k-1}, w_k) + g_t(w_{k-1}, w_k)\ v_t, \quad t \in T.$

В этом случае задача $S_{i\theta}(w_{k-1}, w_k)$ не меняет своего вида, но величина $Z_{i\theta}$ находится с помощью равенства

$Z_{i\theta} = \max_k(Z_k + \sum_{t\ge\theta} g_t^\circ(w_{k-1}, w_k)).$

3.6 Результаты тестовых расчетов

Разработанные алгоритмы реализованы на языке ПАСКАЛЬ и тестировались на IBM PC–486(SX). Все решаемые задачи имели одинаковую размерность: $m = 50$; $n = 50$; $T = 5$; $n_t = 10$, $t \in \boldsymbol{T}$. Массивы исходных данных формировались с помощью датчика псевдослучайных чисел с равномерным распределением. Значения величин выбирались следующим образом: $c_{it}^\circ = 300c^\circ$; $g_{it} \in [1, 10]$; $c_{ij} \in [1, 1000]$; $p_{ij} \in [1, 10]$; $b_{it} = 1$; $v_{it}^\circ = 0$. Матрицы (c_{ij}) и (p_{ij}) на 30% заполнялись числом 10^6. Результаты расчетов изображены на рис. 3.2. Нумерация кривых соответствует следующим значениям варьируемых параметров:

$N1:\ \rho_i = 1,\ V_{it} = 100,\ B = 3; \qquad N2:\ \rho_i = 1,\ V_{it} = 100,\ B = 50;$

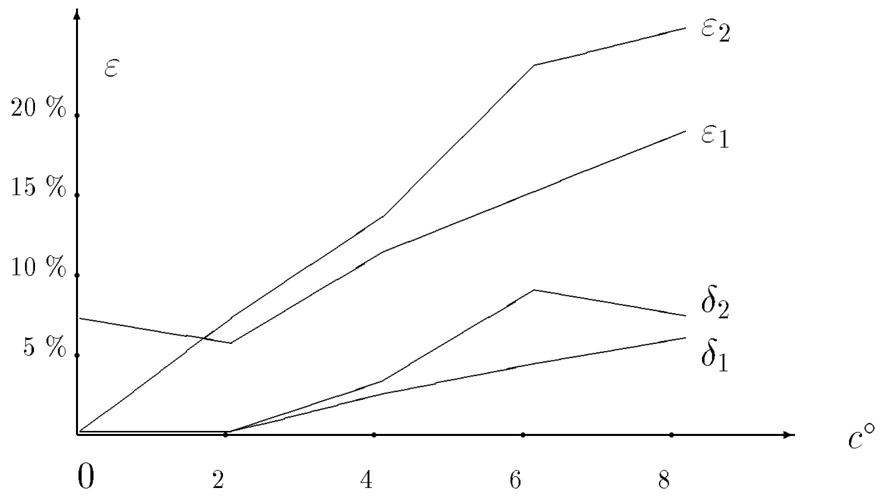

Рис. 3.2

Каждая точка излома является средним значением относительной погрешности для 30 тестовых задач. Отметим, что при $c^\circ = 0$ исходная задача остается обобщением NP–трудной задачи о K–медиане [21]. В этом случае при $B = 3$ разрыв двойственности составляет заметную величину (от 7% до 15%), а предлагаемый алгоритм почти не ошибается ($\delta_1 = 0,16\%$). При больших значениях параметра c° исходная задача вырождается и фактически становится задачей о минимальном покрытии. Начальные затраты доминируют в целевой функции, и если алгоритму удается найти минимальную номенклатуру для выполнения всех работ, то получается точное решение задачи. В противном случае отклонение от оптимума достигает 10%.

Время решения одной задачи при $\rho_i = 1$ в среднем составляет 2 – 3 минуты, при $\rho_i = 5$ – от 10 до 15 минут. При промежуточных значениях ρ_i время решения, по–видимому, будет больше. В связи с этим возникает потребность в специализированных алгоритмах для задачи $S_{i\theta}$ при произвольных ρ_i, $i \in I$. Кроме того, на практике часто возникает ситуация, когда часть технических средств ежегодно выходит из строя еще до окончания срока эксплуатации. В этом случае ограничения (3) принимают вид:

$$\sum_{j\in J_t} p_{ij}\ x_{ij} \ \le\ v^\circ_{it} + \sum_{\tau=t-\rho_i+1}^{t} d_{i\tau}\ v_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T},$$

где величины $d_{i\tau}$ задают долю изъятия технических средств в течение срока эксплуатации. Другим важным обобщением являются динамические задачи с суммарными ограничениями на ежегодные объемы производства изделий или (и) на суммарный состав системы в каждом году. Для таких моделей требуется как минимум существенная переработка алгоритмов или разработка принципиально других подходов.

Глава 4

Многоэтапная динамическая задача

4.1 Постановка задачи

Для формулировки задачи введем следующие обозначения. Обозначим через $\boldsymbol{T} = \{1, \ldots, T\}$ множество единичных отрезков, образующих плановый промежуток времени, на котором рассматривается процесс развития системы технических средств. Для определенности считаем, что единичный отрезок имеет длительность 1 год, а t-ый отрезок будем называть t-ым годом. Пусть $\boldsymbol{J} = \{1, \ldots, J\}$ — множество работ, выполнение которых должно быть обеспечено рассматриваемой системой технических средств. При этом будем предполагать, что множество $\boldsymbol{J}$ разбито на непересекающиеся подмножества $\boldsymbol{J}_t$, $t \in \boldsymbol{T}$, и считать, что $\boldsymbol{J}_t$ — множество работ, которые должны быть выполнены в t-ом году. Для $j \in \boldsymbol{J}$ через $t(j)$ обозначим такой номер, $t \in \boldsymbol{T}$ что $j \in \boldsymbol{J}_t$. Обозначим через $\boldsymbol{I} = \{1, \ldots, I\}$ набор рассматриваемых разновидностей (образцов) технических средств, а через $\boldsymbol{K} = \{1, \ldots, K\}$ — множество различных видов узлов, используемых для комплектации средств рассматриваемых образцов. Для $i \in \boldsymbol{I}$ обозначим через $\boldsymbol{K}_i$ перечень видов узлов, входящих в состав i-го образца. Для $k \in \boldsymbol{K}$ обозначим через $\boldsymbol{I}_k$ перечень образцов технических средств, в состав которых входят узлы

k-го вида.

Введем также следующие обозначения:

c°_{it} — затраты на разработку средств i-го образца, если разработка завершается в t-м году;

g_{it} — стоимость производства одного средства i-го образца в t-м году, с учетом стоимости производства (закупки) входящих в его состав узлов;

d°_{kt} — затраты на разработку узла k-го вида, если разработка завершается в t-м году;

c_{ij} — затраты на выполнение средствами i-го образца j-ой работы;

p_{ij} — количество средств i-го образца одновременно необходимых для выполнения j-ой работы;

u_i — количество средств i-го образца в начальном составе системы, т.е. в составе на начало рассматриваемого промежутка планирования;

V_{it} — ограничения сверху на возможный объем производства средств i-го образца в t-м году.

Введем следующие переменные:

$z_{it} \in \{0,1\}$, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$. Переменная z_{it} принимает значение 1, если в t-м году закончена разработка средства i-го образца, и $z_{it} = 0$ в противном случае.

$y_{kt} \in \{0,1\}$, $k \in \boldsymbol{K}$, $t \in \boldsymbol{T}$. Переменная y_{kt} принимает значение 1, если в t-м году закончена разработка узла k-го вида, и $y_{kt} = 0$ в противном случае.

$v_{it} \geq 0$, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$. Величина v_{it} равняется количеству средств i-го образца, производимых для пополнения состава системы в t-м году;

$x_{ij} \geq 0$, $i \in \boldsymbol{I}$, $j \in \boldsymbol{J}$. Величина x_{ij} равняется доле j-й работы, выполняемой средствами i-го образца.

С использованием введенных обозначений **динамическая задача выбора оптимального состава двухуровневой системы** записывается следующим образом:

Найти

$$\min \sum_{t \in T} \{ \sum_{i \in I} [c^{\circ}_{it}\ z_{it} + g_{it}\ v_{it} + \sum_{j \in J_t} c_{ij}\ x_{ij}] + \sum_{k \in K} d^{\circ}_{kt}\ y_{kt} \}; \qquad (4.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}; \qquad (4.2)$$

$$\sum_{j \in J_t} p_{ij}\ x_{ij} \ \leq \ u_i + \sum_{\tau=1}^{t} v_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T}; \qquad (4.3)$$

$$0 \ \leq \ v_{it} \ \leq \ V_{it} \ \max_{\tau \leq t} z_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T}; \qquad (4.4)$$

$$0 \ \leq \ x_{ij} \ \leq \max_{\tau \leq t(j)} z_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ j \in \boldsymbol{J}; \qquad (4.5)$$

$$\max_{\tau \leq t} y_{k\tau} \ \geq z_{it}, \qquad k \in \boldsymbol{K}_i,\ i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T}; \qquad (4.6)$$

$$z_{it}, y_{kt} \in \{0, 1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ k \in \boldsymbol{K},\ t \in \boldsymbol{T}. \qquad (4.7)$$

Целевая функция (4.1) данной задачи имеет смысл суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию технических средств в течение планового периода. Равенства (4.2) гарантируют выполнение всех работ. Неравенства (4.3) ограничивают возможности выполнения работ имеющимися в наличии средствами. Ограничения (4.4) устанавливают верхнюю границу на возможные объемы пополнения состава систем. Неравенства (4.5) и (4.6) запрещают использование средств, если не завершена разработка данного средства или одного из входящих в его состав узлов.

Для получения нижних оценок рассмотрим три эквивалентные формулировки задачи (4.1)–(4.7).

Добавим к ограничениям рассматриваемой задачи следующие неравенства:

$$\sum_{t \in T} y_{kt} \ \leq 1, \qquad k \in \boldsymbol{K}, \qquad (4.8)$$

$$\sum_{t\in T} z_{it} \ \le 1, \qquad i\in \boldsymbol{I}, \tag{4.9}$$

отражающие тот факт, что разработка средства одного и того же образца и узла одного и того же вида не может производится на рассматриваемом промежутке планирования более одного раза. Полученную задачу (4.1)–(4.9) обозначим через W. Поскольку оптимальное решение задачи (4.1)–(4.7), очевидно, удовлетворяет неравенствам (4.8), (4.9), то полученная задача W эквивалентна исходной. Рассмотрим также неравенства

$$\max_{\tau\le t(j)} y_{k\tau} \ \ge \sum_{i\in I_k} x_{ij}, \qquad k\in \boldsymbol{K},\ j\in \boldsymbol{J}. \tag{4.10}$$

и заметим, что при замене ограничений (4.6) задачи W на ограничения (4.10) получаем задачу эквивалентную задаче W. Эту задачу обозначим через S. Наконец, рассмотрим задачу, которую будем обозначать через BS и которая получается из задачи W добавлением ограничений (4.10).

4.2 Нижние оценки

Предлагаемые Лагранжевы релаксации для задач W, S, BS связаны с "переносом" в целевую функцию указанных задач ограничений (4.2), (4.10). Поэтому обозначим через λ_j, $j\in \boldsymbol{J}$, множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (4.2), а через $\beta_{kj}\ge 0$, $k\in \boldsymbol{K}$, $j\in \boldsymbol{J}$ — множители, связанные с ограничениями (4.10).

Рассмотрим Лагранжеву релаксацию LW задачи W по ограничениям (4.2).Эта задача имеет вид:
Найти

$$Z_{LW}[(\lambda_j)] = \min\sum_{t\in T}\{\sum_{i\in I}[c^\circ_{it}\, z_{it}+g_{it}\, v_{it}+\sum_{j\in J_t}(c_{ij}-\lambda_j)\, x_{ij}]+\sum_{k\in K} d^\circ_{kt}\, y_{kt}\}+\sum_{j\in J}\lambda_j;$$

при условиях (4.3)—(4.9).

Обозначим через LS Лагранжеву релаксацию задачи S по ограничениям (4.2), (4.10), которая записывается следующим образом:
Найти

$$Z_{LS}[(\lambda_j),(\beta_{kj})] = \min \sum_{t \in T} \{ [\sum_{i \in I} [c^{\circ}_{it}\ z_{it} + g_{it}\ v_{it} +$$
$$\textstyle\sum_{j \in J_t} (c_{ij} - \lambda_j + \sum_{k \in K_i} \beta_{kj})\ x_{ij}] + \displaystyle\sum_{k \in K} (d^{\circ}_{kt} - \sum_{j \in J_t} \beta_{kj})\ y_{kt} \} + \sum_{j \in J} \lambda_j;$$

при ограничениях (4.3)–(4.5), (4.7)–(4.9).

Задача LBS, получаемая в результате Лагранжевой релаксации задачи BS по ограничениям (4.2), (4.10), имеет такую же целевую функцию, рассматриваемую при условиях (4.3)—(4.9).

Двойственные задачи для задач LW, LS, LBS записываются следующим образом:

$$Z_{DLW} = \max_{\lambda_j} Z_{LW}[(\lambda_j)];$$
$$Z_{DLS} = \max_{\lambda_j, \beta_{kj}} Z_{LS}[(\lambda_j),(\beta_{kj})];$$
$$Z_{DLBS} = \max_{\lambda_j, \beta_{kj}} Z_{LBS}[(\lambda_j),(\beta_{kj})],$$

и дают нижние оценки для целевой функции исходной задачи, которые будут не хуже чем соответствующие оценки линейного программирования [53].

Во второй главе было показано, что величины Z_{DLW}, Z_{DLS} несравнимы между собой даже в случае $T = 1$. Заметим также, что $Z_{DLBS} \geq Z_{DLS}$, так как множество допустимых решений LBS содержится в множестве допустимых решений LS. Наконец, заметим, что $Z_{DLBS} \geq Z_{DLW}$, поскольку $Z_{LBS}[(\lambda_j),(0)] = Z_{LW}[(\lambda_j)]$.

Таким образом, получаем, что оценки Z_{DLW} и Z_{DLS} несравнимы, а оценка Z_{DLBS} не хуже двух других. В этом смысле оценка Z_{DLBS} предпочтительнее остальных. Однако при использовании нижних оценок помимо величины имеет значение и трудоемкость их вычисления, которая зависит от количества множителей Лагранжа и трудоемкости решения соответствующих релаксированных задач. По этому показателю оценка Z_{DLBS} может проигрывать двум другим. В силу этого ниже строятся алгоритмы решения для всех трех рассмотренных задач.

4.3 Алгоритмы решения релаксированных задач

Покажем, что для каждой из приведенных выше задач LW, LS, LBS может быть построен эффективный алгоритм.

Рассмотрим задачу LS и заметим, что она распадается на задачу S_0, имеющую вид:
Найти

$$Z_0 = \min \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} (d_{kt} - \sum_{j \in J_t} \beta_{kj}) y_{kt}$$

при ограничениях (4.7), (4.8),
и серию задач S_i, $i \in \boldsymbol{I}$, где S_i записывается следующим образом:
Найти

$$Z_i = \sum_{t \in T} \{ c^{\circ}_{it} \; z_{it} + g_{it} \; v_{it} + \sum_{j \in J_t} (c_{ij} - \lambda_j + \sum_{k \in K_i} \beta_{kj}) \; x_{ij} \}$$

при соответствующих условиях (4.3) – (4.5), (4.7), (4.9).

Задача S_0 решается тривиально и сводится к отысканию для всякого $k \in \boldsymbol{K}$ наименьшей из величин $(d_{kt} - \sum_{j \in J_t} \beta_{kj})$, $t \in \boldsymbol{T}$.

Задачи S_i, $i \in \boldsymbol{I}$ с точностью до коэффициэнтов совпадают с задачами S_i из параграфа 3.2 при $\rho = T$ и решается аналогично с трудоемкостью $O(JT^2 + J \lg J)$. Общая трудоемкость алгоритма

$$O(K) + I * O(JT^2 + J \lg J)) = O(IJ(T^2 + \lg J) + K).$$

Для задачи LW покажем справедливость следующей теоремы, устанавливающей возможность построения эффективного алгоритма ее решения.

Теорема 10 *Задача LW сводится к задаче о минимизации полинома от булевых переменных с неположительными коэффициентами при нелинейных членах.*

Доказательство. Для построения соответствующего полинома рассмотрим ряд промежуточных задач, к которым сводится задача LW.

Первая из этих задач строится с использованием серии вспомогательных задач $W_{i\theta}$, $i \in \boldsymbol{I}$, $\theta \in \boldsymbol{T}$, аналогичных рассмотренным в параграфе 3.2 задачам $S_{i\theta}$. Задача $W_{i\theta}$ имеет вид:
Найти

$$Z_{i\theta} = \min \sum_{t \in T, t \geq \theta} \{g_{it}\ v_{it} + \sum_{j \in J_t} (c_{ij} - \lambda_j)\ x_{ij}\} \tag{4.11}$$

при условиях (3.15) – (3.17).
Положим $\quad r_{i\theta} = -\min(0; Z_{i\theta} + c^{\circ}_{i\theta}), \quad i \in \boldsymbol{I},\ \theta \in \boldsymbol{T}.$
Тогда задача LW эквивалентна следующей задаче:
Найти

$$\min \sum_{t \in T} (\sum_{k \in K} d^{\circ}_{kt} y_{kt} - \sum_{i \in I} r_{it} z_{it}) + \sum_{j \in J} \lambda_j \tag{4.12}$$

при ограничениях (4.6)–(4.9).

Заметим, что с учетом вида ограничений (4.6) можно считать, что при любом $k \in \boldsymbol{K}$ величины d°_{kt}, $t \in \boldsymbol{T}$, и при любом $i \in \boldsymbol{I}$ величины r_{it}, $t \in \boldsymbol{T}$, образуют невозрастающие по t последовательности.

Перепишем последнюю задачу, введя новые переменные

$$\xi_{kt} = \sum_{\tau=1}^{t} y_{k\tau}, \quad k \in \boldsymbol{K},\ t \in \boldsymbol{T}; \tag{4.13}$$

$$\eta_{it} = \sum_{\tau=1}^{t} y_{i\tau}, \quad i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T}, \tag{4.14}$$

а также следующие обозначения

$$h_{kt} = \begin{cases} d^{\circ}_{kT}, & \text{если} \ \ t = T, \\ d^{\circ}_{kt} - d^{\circ}_{kt+1}, & \text{если} \ \ t \neq T \end{cases}, \qquad f_{it} = \begin{cases} r_{iT}, & \text{если} \ \ t = T, \\ r_{it} - r_{it+1}, & \text{если} \ \ t \neq T. \end{cases}$$

Из условий (4.8) и (4.9) следует, что переменные ξ_{kt}, η_{it}, булевы. Используя введенные обозначения, задачу LR_W можно записать следующим образом

Найти

$$\min \sum_{t\in T} (\sum_{k\in K} h_{kt}\xi_{kt} - \sum_{i\in I} f_{it}\eta_{it}) + \sum_{j\in J} \lambda_j \tag{4.15}$$

при условиях

$$\xi_{kt} \ \geq \eta_{it}, \qquad k \in \boldsymbol{K}_i,\ i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T}; \tag{4.16}$$

$$\xi_{kt} \ \geq \xi_{kt-1}, \qquad k \in \boldsymbol{K},\ t \in \boldsymbol{T},\ t \neq 1; \tag{4.17}$$

$$\eta_{it} \ \geq \eta_{it-1}, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T},\ t \neq 1; \tag{4.18}$$

$$\eta_{it},\ \xi_{kt} \in \{0,1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ k \in \boldsymbol{K},\ t \in \boldsymbol{T}. \tag{4.19}$$

Если для решений (z_{it}), (y_{kt}) и (ξ_{kt}), (η_{it}) выполняются равенства (4.13), (4.14), то, как нетрудно увидеть, из допустимости одного решения следует допустимость другого и, кроме того, значения соответствующих целевых функций совпадают. Следовательно, задача (4.15)–(4.19) и задача (4.12), (4.6)–(4.9) эквивалентны.

Условия (4.16) и (4.18) можно заменить равенствами

$$\eta_{it} \ = \prod_{k\in K_i} \xi_{kt}, \qquad i \in \boldsymbol{I},\ t \in \boldsymbol{T}. \tag{4.20}$$

Действительно, поскольку $f_{it} \geq 0$, то в оптимальном решении задачи (4.15)–(4.19) $\eta_{it} = 1$ в том случае, если для любого $k \in \boldsymbol{K}_i$ $\xi_{kt} = 1$. При этом, если переменные ξ_{kt} удовлетворяют неравенствам (4.17), то для определенных таким образом переменных η_{it} выполняются ограничения (4.18). Неравенства (4.17) также можно заменить эквивалентными равенствами

$$\xi_{kt}(1 - \xi_{kt+1}) = 0 \qquad k \in \boldsymbol{K},\ t \in \boldsymbol{T},\ t \neq T. \tag{4.21}$$

Теперь задача (4.15), (4.19)–(4.21) может быть переформулирована как задача минимизации полинома от булевых переменных вида

$$p(\xi_{kt}) = \sum_{t\in T}\Big(\sum_{k\in K} h_{kt}\xi_{kt} - \sum_{i\in I} f_{it}\prod_{k\in K_i}\xi_{kt}\Big) + \Phi\sum_{k\in K}\sum_{t=1}^{T-1}\xi_{kt}(1-\xi_{kt+1}) + \sum_{j\in J}\lambda_j,$$

где Φ– достаточно большое число, такое, что для оптимального решения задачи минимизации данного полинома выполнены условия (4.21). Заметим, что построенный полином не имеет положительных коэффициентов при нелинейных членах. Это замечание завершает доказательство теоремы.

Известно [1], что задача минимизации полинома от булевых переменных с неположительными коэффициентами полиномиально сводится к задаче о минимальном разрезе в двудольной сети $S(V,U,E)$ с числом вершин в множествах V и U равным соответственно числу переменных и числу нелинейных членов полинома. Поэтому, фактически, доказанная теорема устанавливает сводимость задачи LW к задаче о минимальном разрезе в двудольной сети. Такой разрез может быть построен алгоритмом с трудоемкостью $O(|V|^2 * |U|)$ [41]. Трудоемкость сведения определяется трудоемкостью решения задач $W_{i\theta}$ и равна $O(IJ(T^2+\lg J))$. Следовательно для решения задачи LW получаем алгоритм трудоемкости $O(K^2*(K+I)*T^3+IJ(T^2+\lg J))$.

Ниже строится еще одна сеть, к задаче о минимальном разрезе в которой сводится задача LW. Эта сеть не является двудольной, но содержит меньшее количество вершин и, следовательно, предпочтительнее при использовании простейших алгоритмов отыскания минимального разреза, имеющих кубическую оценку трудоемкости.

Рассмотрим сеть $S(V,E)$ (см. Рис.4.1) с источником S, стоком S', множеством вершин $V=V_1\cup V_2$ и множеством дуг $E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$, где

$V_1=\{(k,t)\ /\ k\in \boldsymbol{K},\ t\in \boldsymbol{T}\}$,

$V_2=\{(i,t)\ /\ i\in \boldsymbol{I},\ t\in \boldsymbol{T}\}$,

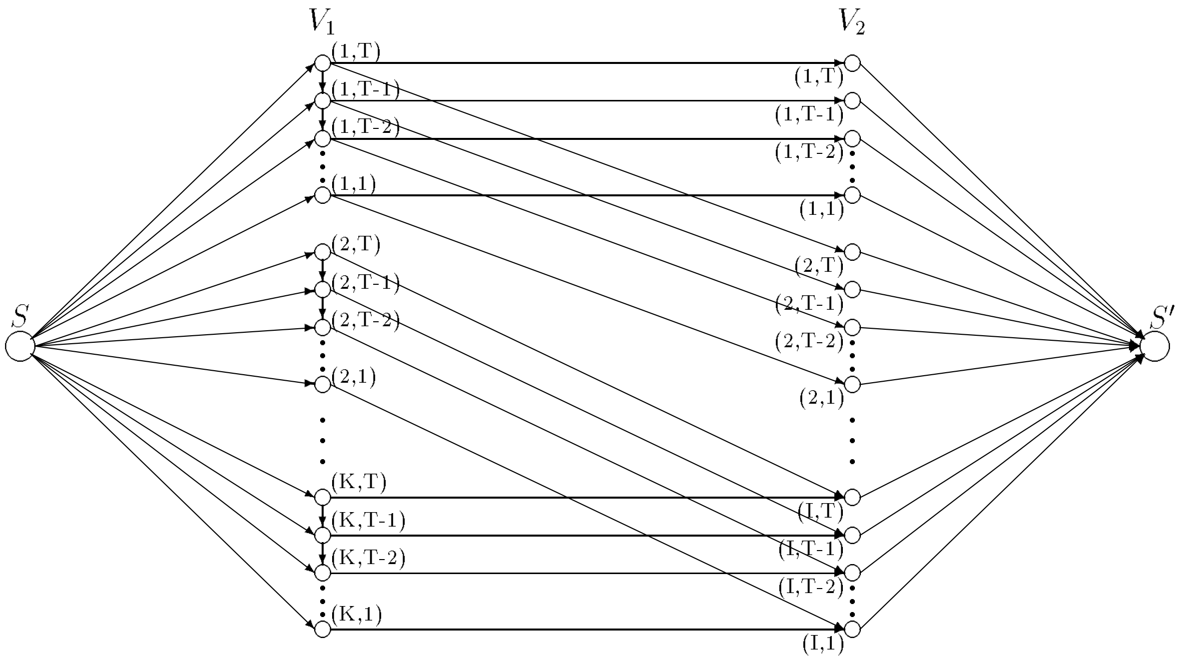

Рис. 4.1:

$$E_1 = \{(S, (k,t)) \;/\; k \in \boldsymbol{K},\; t \in \boldsymbol{T}\},$$
$$E_2 = \{((i,t), S') \;/\; i \in \boldsymbol{I},\; t \in \boldsymbol{T}\},$$
$$E_3 = \{((k,t), (i,t)) \;/\; i \in \boldsymbol{I},\; k \in \boldsymbol{K}_i,\; t \in \boldsymbol{T}\},$$
$$E_4 = \{e = ((k,t), (k,t-1)) \;/\; k \in \boldsymbol{K},\; t \in \boldsymbol{T},\; t \neq 1\}.$$

На множестве дуг E определим функцию пропускных способностей w, полагая

$$w(S, (k,t)) = h_{kt}, \;\; k \in \boldsymbol{K},\; t \in \boldsymbol{T},$$
$$w((i,t), S') = f_{it}, \;\; i \in \boldsymbol{I},\; t \in \boldsymbol{T},$$

и считая, что на элементах множества $E_3 \bigcup E_4$ пропускная способность не ограничена.

Теорема 11 *Задача LR_W полиномиально сводится к задаче о минимальном разрезе в сети $S(V,E)$.*

Доказательство. Пусть (W_1, W_2) — разрез наименьшей пропускной способности. То есть множества W_1, W_2 такие, что $W_1 \bigcap W_2 = \emptyset$, $W_1 \bigcup W_2 = V$, $S \in W_1$, $S' \in W_2$ и сумма пропускных способностей ребер с началом в W_1 и концом в W_2 минимальна.

Для любых $i \in \boldsymbol{I}$, $k \in \boldsymbol{K}_i$, $t \in \boldsymbol{T}$ минимальный разрез сети $S(V,E)$

обладает следующим свойством. Если $(k,t) \in W_1$, то для любого $\tau \leq t \quad (k,\tau) \in W_1$ и $(i,\tau) \in W_1$. В противном случае существует дуга из W_1 в W_2 неограниченной пропускной способности. Аналогично, если $(i,t) \in W_2$, то для любого $\tau \geq t \quad (k,\tau) \in W_2$ и $(i,\tau) \in W_2$.

Построим по разрезу (W_1, W_2) решение (z_{it}), (y_{kt}) задачи LW. Для этого введем следующие обозначения. Для любого $i \in \boldsymbol{I}$ через $t(i)$ обозначим наименьший номер $t \in \boldsymbol{T}$ для которого $(i,t) \in W_2$ и будем считать $t(i) = T+1$, если такого номера не существует. Для любого $k \in \boldsymbol{K}$ через $\tau(k)$ обозначим наименьший номер $t \in \boldsymbol{T}$ для которого $(k,t) \in W_2$ и будем считать $\tau(k) = T+1$, если такого номера не существует.

Положим

$$y_{kt} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t = \tau_k, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \qquad z_{it} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t = t_i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что построенное решение является допустимым. Действительно, неравенства (4.8), (4.9), очевидно, выполняются. Условие (4.6) справедливо, поскольку, если $(i,t) \in W_2$, то для любого $k \in \boldsymbol{K}_i$ $(k,t) \in W_2$ и, следовательно, $\tau(k) \leq t(i)$.

Пусть (z_{it}), (y_{kt}) допустимое решение задачи LW. Поставим ему в соответствие следующий разрез сети $S(V,E)$. Для любых $k \in \boldsymbol{K}, t \in \boldsymbol{T}$ положим $(k,t) \in W_2$, если $\sum_{\tau=1}^{t} y_{k\tau} = 1$ и $(k,t) \in W_1$, в противном случае. Для любых $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$ положим $(i,t) \in W_2$, если $\sum_{\tau=1}^{t} z_{k\tau} = 1$ и $(i,t) \in W_1$, в противном случае. Построенный таким образом разрез (W_1, W_2), очевидно, обладает отмеченным свойством минимального разреза.

Покажем, что для соответствующих друг другу разрезе (W_1, W_2) и решении $(z_{it}), (y_{kt})$ величина пропускной способности разреза $Z(W_1, W_2)$ и значение целевой функции задачи LW отличаются на независимую константу. Действительно, можно написать

$$
\begin{aligned}
Z(W_1, W_2) &= \sum_{(k,t)\in W_2} h_{kt} + \sum_{(i,t)\in W_1} f_{it} = \sum_{k\in K} \sum_{t=\tau(k)}^{T} h_{kt} + \sum_{i\in I} \sum_{t=1}^{t(i)-1} f_{it} \\
&= \sum_{k\in K} d_{k\tau(k)} + \sum_{i\in I} (r_{i1} - r_{it(i)}) \\
&= \sum_{k\in K} \sum_{t\in T} d_{kt} y_{kt} + \sum_{i\in I} (r_{i1} - \sum_{t\in T} r_{it} z_{it}) \\
&= \sum_{i\in I} r_{i1} + \sum_{t\in T} \{ \sum_{k\in K} d^{\circ}_{kt} y_{kt} - \sum_{i\in I} r_{it} z_{it} \}.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что если (W_1, W_2) — минимальный разрез, то (z_{it}), (y_{kt}) — оптимальное решение. Это завершает доказательство теоремы.

В [27] для предпотокового алгоритма построения минимального разреза из [40] доказана следующая оценка временной сложности: $O(|V|^2 * \sqrt{|E|})$. Применительно к сети S эта оценка имеет вид $O((K + I)^2 * T^2 * \sqrt{K * I * T})$. Следовательно, для задачи LW получаем алгоритм с оценкой трудоемкости $O((K + I)^2 * T^2 * \sqrt{K * I * T} + IJ(T^2 + \lg J))$.

Заметим теперь, что задача LBS отличается от задачи LW только коэффициентами в целевой функции. Поэтому для решения этой задачи могут быть использованы те же алгоритмы, что и для задачи LW.

Список литературы

[1] Агеев А.А. О минимизации некоторых полиномов от булевых переменных. // Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы). Новосибирск, 1981. Вып. 21, 3–5.

[2] Береснев В.Л. О задаче выбора оптимальных рядов изделий и комплектующих узлов. I. // Оптимальные процессы (Управляемые системы). Новосибирск, 1977. Вып. 16. 35–46.

[3] Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука, 1978.

[4] Береснев В.Л., Ибрагимов Г.И., Кочетов Ю.А. Алгоритмы решения задачи оптимального выбора динамического ряда изделий. //Задачи поиска оптимальных решений (Управляемые системы).Новосибирск, 1984. Вып. 24, 3–19.

[5] Глебов Н.И., Дементьев В.Т., Сычев А.Н. О динамике развития однородных технических средств. //Управляемые системы. Новосибирск, 1971. Вып. 8, 51–67.

[6] Гончаров Е.Н. Математическая модель и метод решения двухуровневой задачи стандартизации. // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1994. 77–90.

[7] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982.

[8] Ибрагимов Г.И. О задаче выбора оптимального динамического ряда с ограниченным временем жизни изделий. //Задачи поиска оптимальных решений (Управляемые системы).Новосибирск, 1984. Вып. 24, 30–34.

[9] Колоколов А.А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании. // Сибирский журнал исследования операций. Новосибирск, 1994. N.2, 18-39.

[10] Колоколов А.А., Леванова Т.В. Алгоритмы декомпозиции и перебора L-классов для решения некоторых задач размещения. // Вестник Омского университета. Омск, 1996. Т.1, 21-23.

[11] Кочетов Ю.А. Задачи оптимального выбора состава систем технических средств при многоэтапном процессе выполнения работ. Новосибирск, 1987. (Препринт/ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. N. 12)

[12] Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г. Лагранжевы релаксации в задаче выбора оптимального состава системы технических средств. // Оптимизация дискретных структур (Управляемые системы). Новосибирск, 1993. Вып. 31. С. 26–39.

[13] Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г. Динамические задачи выбора оптимального состава системы технических средств. //Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т 2, N 1, 36–49.

[14] Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г. Нижние оценки в задаче выбора состава двухуровневой системы технических средств. //Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т 2, N 4, 32–41.

[15] Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно–транспортного планирования. Москва: Наука, 1986.

[16] Пащенко М.Г. Алгоритм вычисления нижней границы для динамической задачи оптимального выбора состава систем технических средств с ограничениями на объемы производства. //Модели дискретной оптимизации (Управляемые системы). Новосибирск, 1989. Вып. 29, 57–71.

[17] Пащенко М.Г. Нижние оценки для целевой функции в динамической задаче выбора оптимального состава двухуровневой систем технических средств. //Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. Новосибирск, 1997. Т. 4, N 1, 40–53.

[18] Поляк Б.Т. Минимизация негладких функционалов. ЖВМ и МФ. 1969. т. 9, 509–521.

[19] Трубин В.А., Шарифов Ф.А. Простейшая многоэтапная задача размещения на древовидной сети. // Кибернетика и системный анализ. 1992. N. 6. С. 128–135.

[20] Хачатуров В.Р., Астахов Н.Д. Динамические задачи размещения (модели и методы решения). // Экономика и математические методы. 1976. Т.12, вып.1. С. 93–109.

[21] Ahn S., Cooper C., Cornuejols G., Frieze A. Probabilistic analysis of a relaxation for the K–median problem. // Math. Oper. Res. 1988. V. 13, N. 1. P. 1–31.

[22] Ballou R. Dynamic warehouse location analysis. //Journal of Marketing Research. 1968. V 5, 271–276.

[23] Barros A.I., Labbe M. A general model for uncapacitated facility and depot location problem. //Location Science. 1994. V 2, 173–191.

[24] Chardaire P., Sutter A., Costa M. Solving the dynamic facility location problem. //Networks. 1996. V 28, 117–124.

[25] Christofides N., Beasley R. Extensions to a Lagrangean relaxation approach for the capacitated warehouse location problem. // European Journal of Operational Research. 1984. Vol.12. P.19–28.

[26] Cornuejols G., Sridharan R., Thizy J.M. A comparison of heuristics and relaxation for the capacitated plant location problem. // European Journal of Operational Research. 1991. Vol.50. P.280–297.

[27] Cyeryan J., Maheshwari S.N. Analysis of preflow push algorithms for maximum network flow. // SIAM Journal on Computing. 1989. V 18, 1057–1086.

[28] Dyer M.E. A $O(n)$ algorithm for the multiple – choice knapsack linear program. // Math. Programming. 1984. V. 29, N. 1. P. 57–63.

[29] Erlenkotter D. A dual-based procedure for uncapacitated facility location. //Operetions Research. 1978. V 26, 992–1009.

[30] Erlenkotter D. A comparative study of approaches to dynamic location problems. // European J. Oper. Res. 1981. V. 6, N. 2. P. 133–143.

[31] Everett H. Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. //Operetions Research. 1963. V 11, 399–417.

[32] Fisher M.L. Optimal solution of scheduling problems using lagrange multipliers. //Operetions Research. 1973. V 21, 1114–1127.

[33] Fisher M.L. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. //Management Science. 1981. V 27, 1–18.

[34] Fisher M.L., Shapiro J.F. Constructive duality in integer programming. //SIAM J. Appl. Math. 1974. V 27, 31–52.

[35] Fisher M.L., Nortrup W.D., Shapiro J.F. Using duality to solve discrete optimization problems: Theory and Computational experience. // Mathematical Programming Study. 1975. V 3, 56–94.

[36] Fisher M.L., Kedia P. Optimal solution of set covering partitiong problems using dual heuristics. // Management Science. 1990. Vol.36, N.6. P.674–688.

[37] Galvao R.D., Santibanez-Gonzalez E. A lagrangean heuristic for the p_k-median dynamic location problem. //European Journal of Operation Research. 1992. V 58, 250–262.

[38] Gao L.L., Robinson Jr E.P. A dual-based optimization procedure for the two-echelon uncapacitated facility location problem. //Naval Research Logistics. 1992. V 39, 191–212.

[39] Geoffrion A.M. Lagrangian relaxation for integer programming. // Mathematical Programming Study. 1974. V 2, 82–114.

[40] Goldberg A.V., Tarjan R.E. A new approach to the maximum flow problem. //Journal of ACM. 1988. V 35, 921–940.

[41] Dan Gusfield, Charles Martel and David Fernandez-Baca Fast algorithms for bipartite network flow. // SIAM Journal on Computing. 1987. V 16, 237–251.

[42] Held M., Karp R.M. The traveling salesman problem and minimum spaning trees. // Mathematical Programming. 1971. Vol.1. P.6–25.

[43] Held M., Wolfe P., Crowder H.D. Validation of subgradient optimization. // Mathematical Programming. 1974. Vol.6. P.62 -88.

[44] Jacobsen S.K. Heuristic solutions to dynamic plant location problems // Advances in Operations Research. Proceedings of EURO II. The Second European Congress on Operations Research.– Amsterdam – New York – Oxford. 1977. P. 207–213.

[45] Jacobsen K. Multiperiod capacited location Models. Discrete Location Theory, Series in Discrete Mathematics and Optimization (Francis R.L. and Mirchandani P.B., Eds.). Wiley-Interscience, New York, 1990, 173–208.

[46] Krarup J., Pruzan P. Simple plant location problem, survey and synthesis. // European Journal of Operational Research. 1983. Vol.12. P.36–81.

[47] Martello S., Toth P. Linear assignment problems. // Ann. Discrete Math. Amsterdam: North-Holland 1987. V. 31. P. 259–282.

[48] Ro H., Tcha D. A branch and bound algorithm for the two–level uncapacitated facility location problem with some side constrains // European Journal of Operation Research. 1984. V 18, N 3, 343–358.

[49] Roodman G.M., Schwarz L.B. Extensions of the multi-period facility phase-out model: new procedures and applications to a phase-in/phase-out problem. //AIIE Transactions. 1977. V 9, 103–107.

[50] Saldanha-da-Gama F., Captivo M.E. New approaches for the discrete dynamic location problem. //Working paper 10/96, University of Lisbon.

[51] Scott A.J. Dynamic location-allocation systems: some basic planning strategies. //Environment and Planning. 1971. V 3, 73–82.

[52] Shapiro J.F. Generalized lagrange multipliers in integer programming. //Operetions Research. 1971. V 19, 68–76.

[53] Shapiro J.F. A servey of Lagrangian techniques for discrete optimization. // Annals of discrete mathematics. 1979. Vol.5. P.113–138.

[54] Sridharan R. The capacitated plant location problem. // European Journal of Operation Research. 1995. V 87, 203–213.

[55] Tcha D., Lee B. A branch and bound algorithm for the multi–level uncapacitated facility location problem // European Journal of Operation Research. 1984. V 18, N 1, 35–43.

[56] Van Roy T.J., Erlenkotter D. A dual-based procedure for dynamic facility location. //Management Science. 1982. V 28, 1091-1105.

[57] Wesolowssky G.O. Dynamic facility location. //Management Science. 1973. V 19, 1241-1248.

[58] Wesolowssky G.O., Truscott W.G. The multiperiod facility location-allocation problem with relocation of facilities. //Management Science. 1975. V 22, 57–65.