РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

На правах рукописи

ПАЩЕНКО Михаил Георгиевич

ЛАГРАНЖЕВЫ РЕЛАКСАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО СОСТАВА СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ

(01.01.09 – математическая кибернетика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск 1998

Работа выполнена в Институте математики им. С.Л.СОБОЛЕВА СО РАН

Научный руководитель –	доктор физико-математических наук, профессор В.Л.Береснев
Официальные оппоненты:	доктор технических наук, В.Н. Павлов
	кандидат физико-математических наук, Р.Ю. Симанчев
Ведущая организация –	Вычислительный центр РАН

Защита состоится "28" октября 1998 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д.002.23.03 в Институте математики СО РАН (пр. Коптюга 4, 630090 Новосибирск).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО РАН.

Автореферат разослан "__"________ 1998 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук А.В.Косточка

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследования математических моделей оптимизации состава систем технических средств проводятся в Институте математики им. С.Л.СОБОЛЕВА СО РАН с конца 60-х годов. Актуальность этих исследований обусловлена важными практическими приложениями подобных моделей. С математической точки зрения исследуемые задачи относятся к числу NP–трудных[1] задач дискретной оптимизации. Для их решения с начала 70-х годов разрабатывались точные алгоритмы типа ветвей и границ, демонстрирующие приемлемую работоспособность в практических расчетах. Примерно тогда же появились первые работы, посвященные выявлению полиномиально разрешимых частных случаев.

При решении практических задач оптимизации состава систем технических средств различного назначения возникает необходимость учитывать дополнительные требования к составу системы и процессу ее развития. Одними из таких важных требований являются ограничения на возможные объемы производства изделий. Статическая задача с подобными ограничениями рассматривалась в монографии Береснева, Гимади, Дементьева,[2] где для ее решения также были использованы идеи метода ветвей и границ с модифицированным алгоритмом вычисления нижней границы. Однако применение ранее разработанных методов к решению динамических задач связано со значительными трудностями, что послужило причиной построения принципиально иных алгоритмов, основанных на идеях метода Лагранжевых релаксаций.[3]

Цель работы. Разработка и исследование приближенных алгоритмов решения динамических задач выбора оптимального состава системы при ограничениях на объемы производства. Изучение и сравнение различных нижних оценок целевой функции.

Методы исследований. В диссертации использованы современные методы и достижения теории двойственности, теории полиномиальной сводимости и некоторые результаты теории графов.

Научная новизна. Предложены новые математические модели выбора оптимального состава системы технических средств, допускаю-

[1] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982.

[2] Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука, 1978.

[3] Fisher M.L. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. //Management Science. 1981. V 27, 1–18.

щие возможность изменения состава системы в процессе выполнения работ и учитывающие ограничения на возможный объем производства изделий каждого образца. Для решения полученных задач использован метод Лагранжевых релаксаций. Разработаны точные полиномиальные алгоритмы решения релаксированных задач. На основе этих алгоритмов построены приближенные алгоритмы с апостериорной оценкой точности для решения исходных оптимизационных задач.

Практическая ценность. Разработанные приближенные алгоритмы использовались для решения задач выбора состава систем различного назначения при выполнении ряда прикладных научно-исследовательских работ.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на III Всесоюзной школе-семинаре "Дискретная оптимизация и компьютеры" (Таштагол, 1987), Всесоюзной школе-семинаре по комбинаторной оптимизации (Алушта, 1991), X Байкальской школе-семинаре "Методы оптимизации и их приложения" (Иркутск, 1995), международной конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения" (Омск, 1997), 16 Европейской конференции по исследованию операций (Брюссель, 1998), на научных семинарах Института математики СО РАН.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано пять работ.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 79 страницах машинописного текста. Состоит из введения, четырех глав и списка литературы содержащего 59 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении приводится описание класса исследуемых задач и использованного в работе метода Лагранжевых релаксаций, кратко излагаются результаты проведенных исследований. Метод Лагранжевых релаксаций состоит в следующем. Рассматривается задача целочисленного линейного программирования P в следующей формулировке:

$$
\begin{aligned}
&Z_P = \min cx,\\
&Ax \ge b, \quad Bx \ge d,\\
&x \ge 0,
\end{aligned}
$$

где x – вектор целочисленных переменных, b, c, d – вектора и A, B – матрицы соответствующей размерности.

Лагранжевой релаксацией задачи P по ограничениям $Ax \geq b$ с множителями $\lambda \geq 0$ называется задача $LR(\lambda)$:

$$
\begin{aligned}
&Z_{LR(\lambda)} = \min cx + \lambda(b - Ax),\\
&Bx \geq d,\\
&x \geq 0,
\end{aligned}
$$

Задача, двойственная к задаче P относительно ограничений $Ax \geq b$, по определению, есть задача D, вида

$$
\begin{aligned}
&Z_D = \max Z_{LR(\lambda)},\\
&\lambda \geq 0.
\end{aligned}
$$

Множество ограничений задачи P разбито на два подмножества. Для задач линейного программирования справедливо равенство $Z_P = Z_D$ при любом разбиении множества ограничений. Для дискретной задачи $Z_P \geq Z_D$ и разрыв двойственности может существенно зависеть от разбиения. Обозначим через $\overline{P}$ линейную релаксацию задачи P. В дальнейшем чертой сверху $\overline{(.)}$ всегда будем обозначать переход к линейной релаксации. Рассмотрим также задачу $P^\star$:

$$
\begin{aligned}
&Z_{P^\star} = \min cx,\\
&Ax \geq b,\\
&x \in \ Co\{x \geq 0, \quad \text{целые}, \quad Bx \geq d.\}
\end{aligned}
$$

Тогда $Z_{\overline{P}} \leq Z_{P^\star} = Z_D \leq Z_P$.[4] Оптимальные множители лагранжа обычно вычисляются методами субградиентной оптимизации.[5]

В первой главе рассматривается задача выбора оптимального состава системы при многоэтапном процессе выполнения работ.

В разделе 1.1 приводится постановка задачи. Пусть $\boldsymbol{I} = \{1, \ldots, I\}$ – список образцов технических средств, $\boldsymbol{J} = \{1, \ldots, J\}$ – множество работ области применения системы, $\boldsymbol{L} = \{1, \ldots, L\}$ – множество этапов. Считаем, что множество работ области применения разбито на L непересекающихся подмножеств $\boldsymbol{J}_l$, $l \in \boldsymbol{L}$ и для каждого $i \in \boldsymbol{I}$ определены следующие параметры

v_i° — число изделий, уже имеющихся в составе системы;

[4] Shapiro J.F. A servey of Lagrangian techniques for discrete optimization. // Annals of discrete mathematics. 1979. Vol.5. P.113–138.

[5] Fisher M.L., Nortrup W.D., Shapiro J.F. Using duality to solve discrete optimization problems: Theory and Computational experience. // Mathematical Programming Study. 1975. V 3, 56–94.

c_i° — затраты на НИОКР и подготовку производства;
c_i — затраты на производство одного изделия;
s_{il} — доля потерь на l-ом этапе;
V_i — максимально возможный объем производства изделий;
p_{ij} — число изделий, требующихся для выполнения j-й работы;
c_{ij} — стоимость выполнения j-й работы.

Переменные $(z_i), (v_i), (x_{ij})$ имеют следующий смысл:

$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й образец включен в состав системы,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

$v_i \geq 0$ — объем производства i-го изделия;

$x_{ij} \geq 0$ — доля j-й работы, выполняемая изделиями i-го образца.

Используя введенные обозначения задача выбора оптимального состава системы может быть записана в виде задачи P частично-целочисленного программирования:

$$Z_P = \min \sum_{i \in I} (c_i^\circ \; z_i + c_i \; v_i + \sum_{j \in J} c_{ij} \; x_{ij}) \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \; = 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}; \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I} z_i \; \leq K, \tag{3}$$

$$\sum_{j \in J_l} p_{ij} \; x_{ij} \leq v_i^\circ + v_i - \sum_{l'=1}^{l-1} s_{il'} \sum_{j \in J_{l'}} p_{ij} \; x_{ij}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \gg l \in \boldsymbol{L}; \tag{4}$$

$$0 \; \leq \; v_i \; \leq \; V_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}; \tag{5}$$

$$0 \; \leq \; x_{ij} \; \leq z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \gg j \in \boldsymbol{J}; \tag{6}$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \qquad i \in \boldsymbol{J}. \tag{7}$$

Целевая функция выражает суммарные затраты на создание и функционирование системы. Равенства (2) гарантируют выполнение всех работ области применения. Ограничение (3) устанавливает потолок на число типов используемых технических средств (не более K типов, K— целое число). В левой части неравенства (4) стоит выражение для объема средств i-го образца, требующегося на l-м этапе, а в правой части - выражение для имеющегося в наличии объема с учетом потерь средств на предшествующих этапах. Ограничение (5) устанавливает верхнюю границу на возможные объемы производства изделий, а неравенство (6) запрещает использование технических средств, не включенных в состав системы.

Во разделе 1.2 изучаются различные нижние оценки для целевой функции задачи (1)–(7). Традиционно для получения нижних оценок в задачах частично-целочисленного программирования используется линейная релаксация. Приводится эквивалентная формулировка задачи P, обозначенная P_X, которая позволяет существенно улучшить оценку линейного программирования. *Доказано, что для любого натурального N существует семейство исходных данных, на котором одновременно $\overline{Z_{P_X}} > \overline{Z_P} \cdot N$ и $Z_P > \overline{Z_{P_X}} \cdot N$.*

Рассматриваются две Лагранжевых релаксации задачи P. В первой из них в целевую функцию с коэффициентами λ_j, $j \in \boldsymbol{J}$, заносятся ограничения (2). Полученная задача обозначается $L(\lambda)$, а соответствующая ей двойственная оценка – Z_D. Во втором случае релаксируются ограничения (4), (5). Релаксированная задача обозначается LR, а соответствующая ей двойственная оценка – Z_C. *Показано, что* $\overline{Z_{P_X}} = Z_D \leq Z_C \leq Z_P$.

Задача LR после очевидных преобразований сводится к классической NP–трудной задаче размещения производства, для решения которой используются вычислительные схемы типа ветвей и границ .

С точки зрения теории NP–полноты задачи LR и P одинаково трудны, но практически задачу LR решать проще и в первую очередь потому, что при фиксированных булевых переменных z значения непрерывных переменных в задаче LR определяются за линейное время, а в задаче P для этого приходится решать задачу линейного программирования. Кроме того, для задачи LR в монографии Береснева, Гимади, Дементьеваприводится алгоритм ветвей и границ, хорошо работающий на задачах средней размерности.

Задача $L(\lambda)$ распадается на I подзадач вида

$$\alpha_i \; = \; \max \{ \sum_{j \in J} (\lambda_j - c_{ij}) \; x_{ij} - c_i \; v_i - c_i^\circ \};$$

при ограничениях (4),(5) и

$$0 < x_{ij} < 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}, i \in \boldsymbol{I},$$

каждая из которых решается эффективно. Величины α_i можно рассматривать как выигрыш от включения i-го изделия в состав системы. В оптимальное решение задачи $L(\lambda)$ входит K изделий с максимальными значениями α_i. В разделе 1.3 для задачи $L(\lambda)$ приводится точный полиномиальный алгоритм решения с оценкой трудоемкости $O(I \log I + IJ(L + \log J))$.

В разделе 1.4 приводится алгоритм построения допустимого решения задачи P. Пусть $(z^*)(v^*)(x^*)$ — оптимальное решение задачи $L(\lambda)$ и $\Delta_j(\lambda) = \sum\limits_{i \in I} x^*_{ij} - 1$, $j \in \boldsymbol{J}$; Если $\Delta_j(\lambda) = 0$, т.е. равенства (2) верны для (x^*), то $(z^*)(v^*)(x^*)$ — оптимальное решение исходной задачи и $Z_L(\lambda)$ совпадает с Z_P . Выполнение условий (2) означает, что в задаче P отсутствует разрыв двойственности. Чаще оказывается, что $Z_L(\lambda^*) = Z_D < Z_P$, но величина $\delta = \sum\limits_{j \in J} \mid \Delta_j(\lambda) \mid$ достаточно мала и решение $(z^*)(v^*)(x^*)$ удается достроить до допустимого решения исходной задачи с помощью процедур координатного спуска. Алгоритм H_D применяет эту процедуру в ходе субградиентной оптимизации и выбирает наилучшее из полученных решений. Алгоритм H_D рассматривает различные наборы (z^*), что, разумеется, не гарантирует получения оптимального набора задачи P. Более осторожной стратегией, чем в алгоритме H_D , является схема покомпонентного составления набора (z^*), на каждом шаге которой одна из переменных z^*_i полагается равной 1. Ниже приводится четыре правила выбора такой переменной:

1. Положить $z_i = 1$, если $\alpha_i(\lambda^*) = \max\limits_{k \in I} \alpha_k(\lambda^*)$.
2. Определить работу r, для которой $\sum\limits_{i \in I} x^*_{ir} = \max\limits_{j \in J} \sum\limits_{i \in I} x^*_{ij}$ и положить $z_i = 1$, если $\sum\limits_{j \in J} x^*_{ij} = \max\{\sum\limits_{j \in J} x^*_{kj} \mid k \in \boldsymbol{I}, x^*_{kr} > 0\}$.
3. Положить $z_i = 1$, если $\sum\limits_{j \in J} x^*_{ij} = \max\limits_{k \in I} \sum\limits_{j \in J} x^*_{kj}$
4. Положить $z_i = 1$, если номер i наиболее часто входил в состав оптимального набора (x) задачи $L(\lambda)$ в ходе субградиентной оптимизации.

Обозначим через H_C аналог алгоритма H_D, основанный на релаксации LR. Понятно, что алгоритм H_C уже не будет иметь полиномиальную трудоемкость, но т.к. $Z_C \geq Z_D$, то проигрывая во времени, он может выигрывать в точности.

В разделе 1.5 приводятся результаты численного эксперимента. Наилучшие результаты по точности принадлежат алгоритму H_C. Алгоритм H_D может сильно ошибаться. Любой из алгоритмов покомпонентного составления набора (z^*) улучшает его точность, причем ни один из критериев выбора не является доминирующим. Разрыв двойственности в среднем составляет около 3%.

В второй главе рассматривается двухуровневая многоэтапная задача.

Особенностью предлагаемой постановки по сравнению с задачей, рассмотренной в первой главе, является то, что технические средства, образующие систему, состоят из некоторых унифицированных составных частей (узлов). Обозначим через $\boldsymbol{K} = \{1, \ldots, K\}$ — множество различных видов узлов, используемых для комплектации средств рассматриваемых образцов. Для $i \in \boldsymbol{I}$ обозначим через $\boldsymbol{K}_i$ перечень видов узлов, входящих в состав i-го образца. Положим d_k° — стоимость разработки узла k-го вида. И введем новые переменные

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{если узлы } k\text{-го вида включены в состав системы ,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используя введенные обозначения исследуемая задача может быть записана в виде задачи P частично-целочисленного программирования:

$$Z_P = \min\{\sum_{i \in I}(c_i^\circ\ z_i + c_i\ v_i + \sum_{j \in J} c_{ij}\ x_{ij}) + \sum_{k \in K} d_k^\circ\ y_k\} \tag{8}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_{kj}\ = 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}; \tag{9}$$

$$\sum_{j \in J_l} p_{ij}\ x_{ij} \le v_i^\circ z_i + v_i - \sum_{l'=1}^{l-1} s_{il'} \sum_{j \in J_{l'}} p_{ij}\ x_{ij}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad l \in \boldsymbol{L}; \tag{10}$$

$$0\ \le\ v_i\ \le\ V_i z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}; \tag{11}$$

$$0\ \le\ x_{ij}\ \le z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad j \in \boldsymbol{J}; \tag{12}$$

$$y_k\ \ge z_i, \qquad i \in \boldsymbol{I}_k, \quad k \in \boldsymbol{K}; \tag{13}$$

$$y_k, z_i \in \{0, 1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad k \in \boldsymbol{K}. \tag{14}$$

Новыми по сравнению с предыдущей постановке являются неравенства (13), которые требуют внесения затрат на разработку новых узлов при включении в состав системы содержащих их образцов технических средств. Это ограничение можно заменить неравенствами

$$y_k\ \ge\ \sum_{i \in i_k} x_{ij}, \qquad k \in \boldsymbol{K}, \quad j \in \boldsymbol{J}. \tag{15}$$

Легко проверить, что область допустимых значений при этом не изменяется.

Рассматриваются две Лагранжевые релаксации LW и LS. В первой в целевую функцию заносятся ограничения (9), а во второй — ограничения (9) и (15). Соответствующие им двойственные задачи обозначены DLW и DLS. Задача LS с точностью до коэффициентов совпадает с задачей L из первой главы и решается аналогично. Задача LW сводится к задаче о минимизации полинома от булевых переменных с неположительными коэффициентами при нелинейных членах. Агеев показал, что решение этой задачи может быть получено путем сведения ее к задаче о минимальном разрезе в двудольной сети.[6] Построен точный полиномиальный алгоритм решения задачи LW с оценкой трудоемкости $O(I^2K + JI(L + logJ))$.

Показано, что нижние оценки DLW и DLS несравнимы между собой. Приводятся результаты численного эксперимента, подтверждающие, что что оценка DLW имеет некоторые преимущества при жестких ограничениях (10), (11) и хуже оценки DLS в остальных случаях.

В третьей главе рассматривается динамическая задача. Эта модель учитывает возможность изменения качественного и количественного состава системы под влиянием изменения условий ее функционирования.

В разделе 3.1 приводится постановка задачи. Пусть $\boldsymbol{I} = \{1, \dots, I\}$ – список образцов технических средств, $\boldsymbol{J} = \{1, \dots, J\}$ – множество работ области применения системы, множество $\boldsymbol{T} = \{1, \dots, T\}$ задает плановый промежуток. Считаем, что множество работ области применения разбито на T непересекающихся подмножеств $\boldsymbol{J}_t$, $t \in \boldsymbol{T}$. Для $j \in \boldsymbol{J}$ через $t(j)$ обозначен номер, $t \in \boldsymbol{T}$ такой, что $j \in \boldsymbol{J}_t$.

Для каждого $i \in \boldsymbol{I}$ определены

c_{it}° — затраты на разработку средств i-го образца, если разработка завершается в t-м году;

g_{it} — стоимость производства одного средства i-го образца в t-м году;

c_{ij} — затраты на выполнение средствами i-го образца j-ой работы;

p_{ij} — количество средств i-го образца одновременно необходимых для выполнения j-ой работы;

ρ_i — длительность эксплуатации одного изделия;

[6] Агеев А.А. О минимизации некоторых полиномов от булевых переменных. // Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы). Новосибирск, 1981. Вып. 21, 3–5.

v_{it}° — количество средств i-го образца из начального состава системы, пригодное для эксплуатации в t-м году;
V_{it} — ограничения сверху на возможный объем производства средств i-го образца в t-м году.

Определены следующие переменные:
$z_{it} \in \{0,1\}$, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$. Переменная z_{it} принимает значение 1, если в t-м году закончена разработка средства i-го образца, и $z_{it} = 0$ в противном случае.
$v_{it} \geq 0$, $i \in \boldsymbol{I}$, $t \in \boldsymbol{T}$. Величина v_{it} равняется количеству средств i-го образца, производимых для пополнения состава системы в t-м году;
$x_{ij} \geq 0$, $i \in \boldsymbol{I}$, $j \in \boldsymbol{J}$. Величина x_{ij} равняется доле j-й работы, выполняемой средствами i-го образца.

С использованием введенных обозначений динамическая задача выбора оптимального состава системы записывается следующим образом:

$$Z_P = \min \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \{c_{it}^{\circ}\ z_{it} + g_{it}\ v_{it} + \sum_{j \in J_t} c_{ij}\ x_{ij}\}; \tag{16}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \ = 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}; \tag{17}$$

$$\sum_{j \in J_t} p_{ij}\ x_{ij} \ \leq \ v_{it}^{\circ} + \sum_{\tau = t-\rho_i+1}^{t} v_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}; \tag{18}$$

$$0 \ \leq \ v_{it} \ \leq \ V_{it} \ \max_{\tau \leq t} z_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}; \tag{19}$$

$$0 \ \leq \ x_{ij} \ \leq \max_{\tau \leq t(j)} z_{i\tau}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad j \in \boldsymbol{J}; \tag{20}$$

$$z_{it} \in \{0,1\}, \qquad i \in \boldsymbol{I}, \quad t \in \boldsymbol{T}. \tag{21}$$

В разделе 3.2 рассматривается Лагранжева релаксация задачи P по ограничениям (17). *Показано, что релаксированная задача $LR(\lambda)$ полиномиально разрешима.* При фиксированных значениях λ_j, $j \in \boldsymbol{J}$ задача $LR(\lambda)$ распадается на I независимые подзадачи S_i вида:

$$Z_i = \sum_{t \in T} \{c_{it}^{\circ}\ z_{it} + g_{it}\ v_{it} + \sum_{j \in J_t} (c_{ij} - \lambda_j)\ x_{ij}\}$$

при соответствующих условиях (18) – (21). В оптимальном решении задачи S_i не более одной переменной z_{it} равно 1, поэтому значение Z_i может быть найдено следующим образом

$$Z_i = \min(0, \min_{\theta \in T}(Z_{i\theta} + c_{i\theta}^{\circ})),$$

где $Z_{i\theta}$ решение задачи линейного программирования

$$Z_{i\theta} = \min \sum_{t=\theta}^{T} \{ g_{it}\ v_{it} + \sum_{j \in J_t} (c_{ij} - \lambda_j)\ x_{ij} \}$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in J_t} p_{ij}\ x_{ij}\ \leq\ v^{\circ}_{it} + \sum_{\tau=t-\rho+1}^{t} v_{i\tau}, \qquad t = \theta, \ldots, T;$$

$$0\ \leq\ v_{it}\ \leq\ V_{it}, \qquad t = \theta, \ldots, T;$$

$$0\ \leq\ x_{ij}\ \leq 1, \qquad j \in \boldsymbol{J}_t, \gg t = \theta, \ldots, T.$$

Величину Z_i можно рассматривать как выигрыш от включения i-го образца в состав системы. *Построены строго-полиномиальные алгоритмы решения задачи $LR(\lambda)$ при $\rho_i = 1$, $i \in \boldsymbol{I}$, и $\rho_i \geq T$, $i \in \boldsymbol{I}$. Установлено, что при $\rho_i = 1$, $i \in I$, двойственная нижняя оценка совпадает с оценкой линейной релаксации.*

Во разделе 3.3 приводится приближенный алгоритм решения задачи P аналогичный рассмотренному в первой главе для многоэтапной задачи.

В разделах 3.4 и 3.5 рассматриваются обобщения исходной задачи на случай нелинейной зависимости стоимости изделий от объемов производства и дополнительных ограничений на номенклатуру технических средств. Приводятся модифицированные алгоритмы решения релаксированных задач.

В разделе 3.6 приводятся результаты тестовых расчетов.

В четвертой главе изучается еще одно обобщение динамической задачи на случай когда технические средства, образующие систему, состоят из некоторых унифицированных составных частей. Как и во второй главе это учитывается добавлением к целевой функции слагаемого $\sum_{k \in K} d^{\circ}_{kt}\ y_{kt}$ и появлением дополнительных ограничений

$$\max_{\tau \leq t(j)} y_{k\tau}\ \geq \sum_{i \in I_k} x_{ij}, \qquad k \in \boldsymbol{K}, \gg j \in \boldsymbol{J} \tag{22}$$

или

$$\max_{\tau \leq t} y_{k\tau}\ \geq z_{it}, \qquad k \in \boldsymbol{K}_i, \gg i \in \boldsymbol{I}, \gg t \in \boldsymbol{T}. \tag{23}$$

Рассматриваются три Лагранжевых релаксации LW, LS, LBS. Первая производится по ограничениям (17), вторая и третья — по ограничениям (17) и (22). Третья отличается от второй тем, что к множеству ограничений добавлены избыточные ограничения (23). Задача LS с точностью до коэффициентов совпадает с задачей $LR(\lambda)$ и решается аналогично. *Показано, что задачи LW и LBS сводятся к задаче о минимальном разрезе в сети.*

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Пащенко М.Г. Алгоритм вычисления нижней границы для динамической задачи оптимального выбора состава систем технических средств с ограничениями на объемы производства. //Модели дискретной оптимизации (Управляемые системы). Новосибирск, 1989. Вып. 29, 57–71.

2. Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г. Лагранжевы релаксации в задаче выбора оптимального состава системы технических средств. // Оптимизация дискретных структур (Управляемые системы). Новосибирск, 1993. Вып. 31., 26–39.

3. Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г. Динамические задачи выбора оптимального состава системы технических средств. //Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т 2, N 1, 36–49.

4. Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г. Нижние оценки в задаче выбора состава двухуровневой системы технических средств. //Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т 2, N 4, 32–41.

5. Пащенко М.Г. Нижние оценки для целевой функции в динамической задаче выбора оптимального состава двухуровневой системы технических средств. //Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. Новосибирск, 1997. Т 4, N 1, 40–53.

Пащенко Михаил Георгиевич

Лагранжевы релаксации в динамических задачах выбора оптимального состава системы технических средств

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 14.08.98. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,8. Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 115 экз. Заказ N 63.

Лицензия ЛР N 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство ИМ СО РАН
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Лицензия ПЛД N 57-43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.