

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. В. Алексеева, О. А. Кутненко, А. В. Плясунов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Новосибирск, 2008

УДК 519.6

ББК В.173.1/2

Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Плясунов А. В. Численные методы оптимизации: Учеб. пособие / Новосиб. ун-т. Новосибирск, 2008. 128 с.

Учебное пособие написано на основе лекций, которые читались на факультете информационных технологий и механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета. В нем подробно рассмотрены классические методы решения задач математического программирования.

Пособие предназначено для студентов механико-математического факультета, факультета информационных технологий, а также для всех, кто желает освоить рассматриваемые методы самостоятельно.

Пособие разработано в рамках национального проекта «Образование» в НГУ.

Рецензенты

доктор физико-математических наук, профессор Э. Х. Гимади
доктор физико-математических наук, профессор А. А. Колоколов

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано на основе лекций по курсу «Методы оптимизации», читаемых на факультете информационных технологий Новосибирского государственного университета. Основной акцент сделан на изложении методов решения задач математического программирования, а также обосновании их сходимости или конечности в зависимости от рассматриваемого класса задач. Такой подход может оказаться полезным при самостоятельном изучении численных методов оптимизации. Предполагается, что читатели знакомы с курсами математического анализа и линейной алгебры.

Данное издание является продолжением и дополнением ранее опубликованных пособий [1], [2]. В нем представлены задачи классического вариационного исчисления и оптимального управления. Эти темы изложены в том варианте, в котором они читаются в течение ряда лет на механико-математическом факультете и факультете информационных технологий университета. Также в пособии представлены методы покоординатного спуска, Келли, метод ветвей и границ для решения задач нелинейного программирования, методы случайного поиска и ряд других. Некоторые из рассматриваемых методов и алгоритмов иллюстрируются примерами. Пособие состоит из шести глав и приложения.

В первой главе приводится общая постановка экстремальной задачи, определения целевой функции, допустимого решения, условного и безусловного экстремума. Вводятся такие концептуальные понятия, как скорость сходимости итерационных методов, направление убывания, метод спуска. Эта глава содержит фрагмент такого важного раздела оптимизации, как выпуклый анализ.

Вторая глава посвящена численным методам отыскания безусловного экстремума. Здесь рассмотрены методы покоординатного спуска, Ньютона, случайного поиска, а также различные модификации градиентного метода.

Третья глава посвящена методам решения задач линейного программирования. В ней приводится описание прямого симплекс-метода, его модифицированной формы, двух модификаций двойственного симплекс-метода, метода искусственного базиса. При обосновании конечности этих алгоритмов рассматриваются их лексикографические варианты. В этой главе содержится также геометрическая интерпретация задач линейного программирования и развиваемая на ее основе интерпретация прямого симплекс-метода.

В четвертой главе рассмотрены численные методы нелинейного программирования, приводится описание первого (или циклического) алгоритма Гомори для решения задач линейного целочисленного программирования. Здесь же содержится описание метода ветвей и границ и его реализация для решения нелинейных задач. Завершается глава описанием методов штрафа и доказательством их сходимости.

Пятая глава посвящена задачам классического вариационного исчисления. Здесь приводится вывод необходимых условий Эйлера по Лагранжу и Дюбуа-Раймону для простейшей задачи с закрепленными концами. Предлагаемые доказательства основаны на непосредственном применении метода вариаций.

В шестой главе рассматриваются задачи оптимального управления. Для линейной задачи оптимального быстродействия приводится доказательство необходимости и достаточности принципа максимума. Также доказываются теоремы о конечности числа переключений оптимального управления.

В приложении приводятся и подробно комментируются основные обозначения и понятия.

Нумерация формул, теорем, лемм, определений в каждой главе самостоятельная. Ссылки в пределах главы обозначаются одним числом, а вне главы – двумя числами. Например, теорема 5 из первой главы будет в других главах именоваться как теорема 1.5.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

§ 1. Экстремальные задачи. Определения

Задачи отыскания наибольших или наименьших величин часто возникают в науке, технике и экономике. Чтобы применять математические методы для их решения и анализа, необходимо уметь переходить от содержательной к математической постановке задачи. Для этого нужно определить целевую функцию f , множество допустимых решений Q для функции f и критерий оптимизации $extr \in \{\min, \max\}$. Таким образом, тройка вида $(f, Q, extr)$ задает экстремальную или оптимизационную задачу.

Формально математическая постановка выглядит следующим образом:

$$f(x) \rightarrow_{x \in Q} extr .$$

Учитывая равенство $\min_{x \in Q} f(x) = -\max_{x \in Q}(-f(x))$, в дальнейшем ограничимся

рассмотрением только задач минимизации.

Будем говорить, что задача минимизации решена, если

1. либо найдено ее оптимальное решение, то есть точка $x^* \in Q$ такая, что $f(x^*) \leq f(x)$ для всех $x \in Q$. Символически это записывается в виде равенства $f(x^*) = \min_{x \in Q} f(x)$;

2. либо найден конечный инфимум $f^* = \min_{x \in Q} f(x)$ целевой функции на множестве Q в случае, когда оптимального решения не существует;

3. либо доказано, что целевая функция неограниченна снизу на множестве допустимых решений;

4. либо установлено, что множество допустимых решений пусто.

Далее будем рассматривать экстремальные задачи, в которых допустимое множество задается в следующем виде: $Q = \{x \in S \mid \varphi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$, где S является либо подмножеством пространства R^n , либо подмножеством Z^n , либо $-B^n$. Функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, – скалярные функции со значениями в R . Выражения $x \in S$, $\varphi_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, называются ограничениями оптимизационной задачи. Ограничения вида $\varphi_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, называются функциональными, а ограничение $x \in S$ называется ограничением типа включения. Различие между функциональными и нефункциональными ограничениями условно, так как каждое включение можно записать как функциональное ограничение и, наоборот, любое функциональное ограничение легко превратить во включение. Одновременное использование этих ограничений

делает постановку задачи более структурированной и, следовательно, более наглядной. Формально экстремальная задача в этом случае записывается в следующем виде:

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in S} \quad (1)$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

В зависимости от природы множества S экстремальные задачи классифицируются как [2, 4, 6, 9]:

- дискретные или комбинаторные, если множество S конечно или счетно;
- целочисленные, если $S \subseteq Z^n$;
- булевы, если $S \subseteq B^n$;
- вещественные, если $S \subseteq R^n$;
- бесконечномерные, если S – подмножество гильбертова пространства.

Если $S = R^n$, или $S = Z^n$, или $S = B^n$ и отсутствуют ограничения $\varphi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$, то есть $m = 0$, тогда экстремальная задача называется задачей безусловной оптимизации. В противном случае говорят о задаче условной оптимизации.

Если принять во внимание свойства целевой функции f и ограничений $\varphi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$, то возникает более тонкое деление конечномерных экстремальных задач на классы:

- непрерывное (математическое) программирование (f , $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, – непрерывные, произвольные, нелинейные функции, S – связное, компактное подмножество R^n);
- дискретное (математическое) программирование (f , $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, – нелинейные функции, S – дискретное множество);
- нелинейное целочисленное программирование (f , $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, – нелинейные функции, $S \subseteq Z^n$);
- непрерывная нелинейная оптимизация без ограничений (f – непрерывная, произвольная, нелинейная функция, $m = 0$, $S = R^n$);
- целочисленная нелинейная оптимизация без ограничений (f – произвольная, нелинейная функция, $m = 0$, $S = Z^n$);
- выпуклое программирование (f , $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, – произвольные, выпуклые функции, S – выпуклое подмножество R^n);

- линейное программирование (f , $\varphi_i(x)$, $i=1, \dots, m$, – произвольные, линейные функции, $S = R^n$);
- целочисленное линейное программирование (f , $\varphi_i(x)$, $i=1, \dots, m$, – произвольные, линейные функции, $S \subseteq Z^n$).

При решении каждой оптимизационной задачи возникает три проблемы [4]. Первая из них связана с существованием оптимальных решений задачи. При анализе этой проблемы в ряде случаев может оказаться полезной следующая теорема, с помощью которой можно иногда определить, достигает ли функция своего глобального минимума и максимума.

Теорема 1 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве X , то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней границ.

Условие компактности множества X , использованное в теореме, является довольно жестким. И неприменимо для таких часто встречающихся множеств, как $S = R^n$ или $S = R^n_+$. Однако, ослабляя ограничения на множество X и накладывая дополнительные требования на функцию f , из теоремы Вейерштрасса можно получить следующие два следствия.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на непустом замкнутом множестве X и для некоторой фиксированной точки v из X множество Лебега $M(v) = \{x \in X \mid f(x) \leq f(v)\}$ ограничено, то функция достигает на множестве X своей точной нижней границы.

Следствие 2. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на непустом замкнутом множестве X и для любой последовательности точек $\{x_k\}_{k \in N}$ из X , для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$, имеет место соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = +\infty$ ($-\infty$), то функция достигает на множестве X своей точной нижней (верхней) границы.

Вторая проблема связана с поиском условий, которым должно удовлетворять оптимальное решение задачи.

Третья проблема состоит в том, как найти хотя бы одно такое решение.

Данные проблемы соответствуют разделам теории экстремальных задач, где исследуются вопросы существования оптимальных решений, необходимые и достаточные условия экстремума и численные методы нахождения решений. Последний раздел и является предметом настоящего пособия.

§ 2. Элементы выпуклого анализа

Множество $x \in R^n$ называется *выпуклым*, если $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$ при всех $x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1]$. Иными словами, множество X выпукло, если оно вместе с любыми своими двумя точками x_1 и x_2 содержит соединяющий их *отрезок* $[x_1, x_2] = \{x \in R^n \mid x = x_2 + \lambda(x_1 - x_2), 0 \leq \lambda \leq 1\}$ (см. рис. 1). Рис. 2 – пример невыпуклого множества.

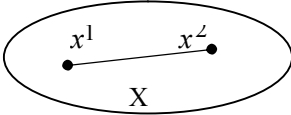


Рис. 1

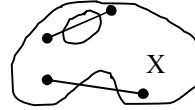


Рис. 2

На числовой прямой R выпуклыми множествами являются всевозможные *промежутки*, то есть одноточечные множества, интервалы, полуинтервалы, отрезки, полупрямые, а также сама прямая. Примерами выпуклых множеств в пространстве R^n служат само пространство, любое его линейное подпространство, одноточечное множество, шар, отрезок, а также прямая, проходящая через точку x_0 в направлении вектора h , луч, выходящий из точки x_0 в направлении вектора h , гиперплоскость с нормалью p и порождаемые ею полупространства. Пустое множество по определению выпуклое. Нетрудно понять, что все перечисленные множества, кроме шара, являются частными случаями выпуклого множества вида

$$X = \{x \in R^n \mid Ax \leq b\} = \{x \in R^n \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = 1, \dots, m\}, \quad (3)$$

где A – некоторая матрица размера $m \times n$ со строками a_1, \dots, a_m , $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in R^m, m = 1, 2, \dots$. Множества вида (3) принято называть *полиэдральными* или просто *полиэдрами*. Таким образом, полиэдр – это множество решений некоторой системы конечного числа линейных неравенств. Или, другими словами, пересечение конечного числа полупространств.

Выпуклой комбинацией точек x_1, \dots, x_m называется точка $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$, где $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m$, и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$.

Теорема 2. Выпуклое множество X содержит выпуклые комбинации всех своих точек.

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \in R^n$, называется *выпуклой* на X , если

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (4)$$

при всех $x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$. Если при всех $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ и $\lambda \in (0,1)$ неравенство (4) выполняется как строгое, то f называется *строго выпуклой* на X . Функция f называется *(строго) вогнутой*, если функция $(-f)$ *(строго) выпукла*.

Геометрически выпуклость функции f означает, что любая точка произвольной хорды графика f располагается не ниже соответствующей точки самого графика (рис. 3).

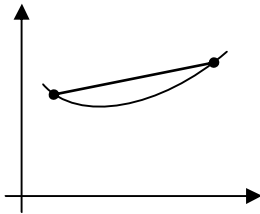


Рис. 3

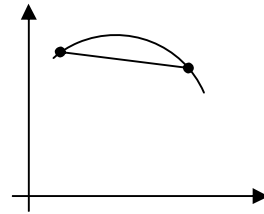


Рис. 4

Для вогнутой функции взаимное расположение хорды и графика обратно (рис. 4). Можно показать, что функции $f(x) = x^2, f(x) = e^x$ выпуклы на R ; $f(x) = \ln(x)$ вогнута на множестве положительных чисел; $f(x) = \sin x$ вогнута на $[0, \pi]$ и выпукла на $[\pi, 2\pi]$. Функция $f(x) = \|x\|$ выпукла, а $f(x) = \|x\|^2$ строго выпукла на R^n .

Функцию вида $f(x) = \langle a, x \rangle + b$, где $a \in R^n, b \in R$ будем называть *линейной*. Ясно, что для линейной функции неравенство (4) выполняется как равенство. Поэтому она одновременно выпукла и вогнута на R^n , но не строго.

Приведем еще несколько полезных свойств выпуклых функций.

Теорема 3. Выпуклая функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X , непрерывна в каждой внутренней точке этого множества.

Теорема 4. Функция $f(x)$, дифференцируемая на выпуклом множестве X , выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$ справедливо $\langle f'(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$.

Теорема 5. Функция $f(x)$, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая на выпуклом множестве X , (строго) выпукла тогда и только

тогда, когда матрица $B(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$ (положительно) неотрицательно

определена для любого $x \in X$.

Для исследования матрицы $B(x)$ на знакоопределенность используют, как правило, критерий Сильвестра (см. приложение).

Теорема 6. Для любой выпуклой функции $f(x)$, определенной на выпуклом множестве X , и любого числа λ множество $\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$ выпукло.

Теорема 7 (неравенство Йенсена). Если функция $f(x)$ выпукла на выпуклом множестве X , то $f(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i)$, где $x_i \in X$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$.

Задача (1)-(2) называется *выпуклой*, если S – выпуклое множество, f , $\varphi_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, – выпуклые функции на S .

Сформулируем несколько простых утверждений, объясняющих интерес к данному типу задач оптимизации.

Теорема 8. Если задача (1)-(2) выпукла, то любое ее локальное решение является также глобальным.

Следующее свойство выпуклых задач можно сформулировать в виде следующего общего принципа: необходимые условия оптимальности в том или ином классе задач оптимизации при соответствующих предположениях выпуклости оказываются и достаточными [2, 4, 9]. Приведем обоснование данного свойства применительно к задаче безусловной оптимизации.

Теорема 9. Пусть функция f выпукла на R^n и дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Если $f'(x^*) = 0$, то x^* – точка минимума f на R^n .

Теоремы 8, 9 говорят о том, что для выпуклой задачи отыскание стационарной точки автоматически означает отыскание решения, причем глобального.

Укажем еще одно полезное свойство выпуклых задач.

Теорема 10. Пусть задача (1)-(2) выпукла и имеет решение. Тогда множество ее решений $Q^* = \text{Arg} \min_{x \in Q} f(x)$ выпукло. Если при этом функция f строго выпукла на множестве Q , то решение задачи единственно.

Большинство теорем о сходимости методов оптимизации доказывается в предположении выпуклости функции, оценки скорости сходимости, которые будут рассматриваться в параграфе 4, часто устанавливаются при еще более жестком предположении сильной выпуклости.

Определение 1. Дифференцируемая функция f называется сильно выпуклой (с константой $l > 0$), если для любых x и y из R^n справедливо

$$f(x + y) \geq f(x) + \langle f'(x), y \rangle + l\|y\|^2/2. \quad (5)$$

Лемма 1. Если функция f является сильно выпуклой (с константой $l > 0$), то она имеет глобальный минимум на R^n .

Доказательство. Из условия (5) и неравенства Коши-Буняковского следует

$$f(x + y) \geq f(x) - \|f'(x)\|\|y\| + l\|y\|^2/2.$$

Пусть $r = 2\|f'(x)\|/l$. Если $\|y\| \geq r$, то

$$f(x + y) \geq f(x) + \|y\| (l\|y\|/2 - \|f'(x)\|) > f(x). \quad (6)$$

Рассмотрим шар $B(x, r)$ с центром в точке x и радиуса r . По теореме Вейерштрасса непрерывная функция f достигает своего минимума на шаре $B(x, r)$ в некоторой точке x^* . Из неравенства (6) следует, что x^* – минимум на всем R^n . ■

Лемма 2. Если функция является сильно выпуклой (с константой $l > 0$) и x^* – ее глобальный минимум, то для любого $x \in R^n$ выполняется неравенство

$$\|f'(x)\| \geq 2l(f(x) - f(x^*)). \quad (7)$$

Доказательство. Так как функция f сильно выпуклая, то подстановка $y = x^* - x$ в (5) дает неравенство

$$f(x) - f(x^*) + \langle f'(x), x^* - x \rangle + l\|x^* - x\|^2/2 \leq 0.$$

Так как

$$\begin{aligned} \langle f'(x)/\sqrt{2l} + \sqrt{l/2}(x^* - x), f'(x)/\sqrt{2l} + \sqrt{l/2}(x^* - x) \rangle = \\ = \|f'(x)/\sqrt{2l} + \sqrt{l/2}(x^* - x)\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \|f'(x)\|^2/2l + \langle f'(x), x^* - x \rangle + l\|x^* - x\|^2/2 \geq 0 \geq \\ \geq f(x) - f(x^*) + \langle f'(x), x^* - x \rangle + l\|x^* - x\|^2/2. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов получим требуемое неравенство. ■

Лемма 3. Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если f – сильно выпуклая функция с константой l , то выполняется неравенство

$$\|[f''(x)]^{-1}\| \leq l^{-1}.$$

Доказательство. Пользуясь формулой конечных приращений для функции f , получим

$$f(x+y) - f(x) = \langle f'(x), y \rangle + \langle f''(x + \tau_2 y), y \rangle / 2,$$

где $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1$. Воспользуемся условием сильной выпуклости

$$\langle f''(x + \tau_2 y), y \rangle / 2 = f(x+y) - f(x) - \langle f'(x), y \rangle \geq l \|y\|^2 / 2.$$

Заменяя y на ty , получим:

$$\langle f''(x + \tau_2 ty), ty, ty \rangle \geq l \|ty\|^2.$$

Следовательно,

$$t^2 \langle f''(x + \tau_2 ty), y, y \rangle \geq t^2 l \|y\|^2.$$

Поделив на t^2 и устремляя t к нулю, будем иметь

$$\langle f''(x), y, y \rangle \geq l \|y\|^2.$$

Положим $y = (f''(x))^{-1} z$, где z – произвольный элемент из R^n . Используя неравенство Коши-Буняковского, получим $l \|(f''(x))^{-1} z\| \leq \|z\|$. По определению нормы оператора это означает, что справедливо неравенство

$$\|(f''(x))^{-1}\| \leq l^{-1}. \blacksquare$$

§ 3. Начальные сведения о численных методах оптимизации

В большинстве случаев задачу (1)-(2) приходится решать численно на компьютере. При этом можно с помощью необходимых условий оптимальности свести задачу оптимизации к некоторой другой задаче, а затем попытаться использовать разработанные для ее решения численные методы. Так, например, для решения задачи минимизации на R^n дифференцируемой функции f можно воспользоваться каким-либо численным методом решения системы уравнений $f'(x) = 0$. Однако, наиболее эффективными оказываются методы, разработанные специально для решения задачи оптимизации, так как они позволяют полнее учесть ее специфику.

Любой численный метод (алгоритм) решения задачи оптимизации основан на точном или приближенном вычислении ее характеристик (значений целевой функции, ограничений, а также их производных). На основании полученной информации строится приближение к решению задачи – искомой точке минимума x^* или, если такая точка не единственна, – к множеству точек минимума. Иногда удается построить только приближение к минимальному значению целевой функции $f^* = \min_{x \in Q} f(x)$.

Для каждой конкретной задачи вопрос о том, какие характеристики следу-

ет выбрать для вычисления, решается в зависимости от свойств минимизируемой функции, ограничений и имеющихся возможностей по хранению и обработке информации. Так, для минимизации недифференцируемой функции нельзя воспользоваться алгоритмом, предусматривающим возможность вычисления в произвольной точке градиента функции. В случае, когда доступен небольшой объем памяти, при решении задачи высокой размерности нельзя воспользоваться алгоритмом, требующим вычисления на каждом шаге и хранения в памяти матрицы вторых производных и т.п.

Алгоритмы, использующие лишь информацию о значениях минимизируемой функции, называются алгоритмами нулевого порядка; алгоритмы, использующие также информацию о значениях первых производных, – алгоритмами первого порядка; алгоритмы, использующие, кроме того, информацию о вторых производных, – алгоритмами второго порядка.

Работа алгоритма состоит из двух этапов. На первом этапе вычисляются предусмотренные алгоритмом характеристики задачи. На втором этапе по полученной информации строится приближение к решению. Для задач оптимизации выбор на втором этапе способа построения приближения, как правило, не вызывает затруднений. Например, для методов спуска, в которых на каждом шаге происходит переход в точку с меньшим, чем предыдущее, значением функции, за приближение к точке минимума обычно выбирается точка последнего вычисления. Поэтому в алгоритме достаточно указать способ выбора точек вычисления, при условии, что уже решен вопрос о том, какие именно характеристики решаемой задачи следует вычислять.

Для большинства задач точки вычисления выбираются последовательно, то есть точка x^{k+1} , $k = 0, 1, \dots$, выбирается, когда уже выбраны точки предыдущих вычислений x^0, \dots, x^k и в каждой из них произведены предусмотренные алгоритмом вычисления. Для записи методов минимизации будем пользоваться соотношением вида

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h_k, \alpha_k \in R, k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

При этом конкретный алгоритм определяется заданием точки x^0 , правилами выбора векторов h_k и чисел α_k на основе полученной в результате вычислений информации, а также условиями остановки. Таким образом, величины α_k , h_k в (8) определяются теми или иными видами функциональной зависимости от точек и результатов всех ранее проведенных вычислений, причем на практике обычно используются наиболее простые виды зависимости. Правила выбора α_k , h_k могут предусматривать и дополнительные вычисления, то есть вычисления некоторых характеристик решаемой задачи в точках, отличных от x^0, x^1, \dots, x^k .

Вектор h_k определяет направление $(k + 1)$ -го шага метода минимизации, а коэффициент α_k – длину этого шага. Следует иметь в виду, что при $\|h_k\| \neq 1$

длина отрезка, соединяющего точки x^k, x^{k+1} , не равна $|\alpha_k|$. Обычно название метода минимизации определяется способом выбора h_k , а его различные варианты связываются с разными способами выбора α_k . Наряду с термином *шаг метода* будет использоваться также термин *итерация метода*.

Трудоемкость решения задачи оптимизации зависит от числа ее переменных, вида целевой функции, а также вида и числа ограничений. Часто методы, разработанные для решения того или иного типа задач, оказываются полезными для решения более сложных задач. Так, например, алгоритмы одномерной оптимизации широко применяются при решении многомерных задач; многие алгоритмы условной оптимизации используют методы безусловной оптимизации или являются их модификацией; методы решения задачи линейного программирования используются при решении задач нелинейного программирования и т. д.

Среди методов минимизации можно условно выделить конечношаговые и бесконечношаговые методы. *Конечношаговыми*, или *конечными*, называются методы, гарантирующие отыскание решения задачи за конечное число шагов. Конечношаговые методы удается построить лишь для некоторых специальных типов задач оптимизации, например, задач линейного и квадратичного программирования. Для *бесконечношаговых* методов достижение решения гарантируется лишь в пределе.

§ 4. Сходимость методов оптимизации

Важной характеристикой бесконечношаговых методов является сходимость. Будем говорить, что метод, задаваемый соотношением (8), *сходится*, если $x^k \rightarrow x^*$ при $k \rightarrow \infty$, где x^* – решение задачи (1)-(2). Если $f(x^k) \rightarrow f(x^*)$ при $k \rightarrow \infty$, то иногда также говорят о сходимости по функции, при этом последовательность $\{x^k\}_{k \in N}$ называют *минимизирующей*. Минимизирующая последовательность может и не сходиться к точке минимума. В случае, когда точка минимума x^* не единственна, под сходимостью метода понимается сходимость последовательности $\{x^k\}_{k \in N}$ к множеству Q^* точек минимума функции f .

Эффективность сходящегося метода можно охарактеризовать с помощью понятия скорости сходимости. Пусть $x^k \rightarrow x^*$ при $k \rightarrow \infty$. Говорят, что последовательность $\{x^k\}_{k \in N}$ сходится к x^* *линейно* (с *линейной скоростью*, со *скоростью геометрической прогрессии*), если существуют такие константы $q \in (0,1)$ и k_0 , что

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q \|x^k - x^*\| \text{ при } k \geq k_0. \quad (9)$$

Говорят, что $\{x^k\}_{k \in N}$ сходится к x^* *сверхлинейно* (со *сверхлинейной ско-*

ростью), если

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q_{k+1} \|x^k - x^*\|, \quad q_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Говорят о квадратичной сходимости, если существуют такие константы $C \geq 0$ и k_0 , что

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C \|x^k - x^*\|^2 \text{ при } k \geq k_0. \quad (11)$$

Иногда, сохраняя ту же терминологию, неравенства (9)-(11) заменяют соответственно на неравенства

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_1 q^{k+1} \text{ при } k \geq k_0, \quad (12)$$

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_2 q_{k+1} q_k \dots q_1, \quad (13)$$

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_3 q^{2^{k+1}} \text{ при } k \geq k_0, \quad 0 < q < 1. \quad (14)$$

Ясно, что из (9) следует (12), а из (10) следует (13). Если предположить, что справедливо (11) и при некотором $q \in (0,1)$ $\|x^{k_0} - x^*\| \leq \frac{1}{C} q^{2^{k_0}}$, то

$$\|x^{k_0+1} - x^*\| \leq \frac{1}{C} q^{2^{k_0+1}}, \quad \|x^{k_0+2} - x^*\| \leq \frac{1}{C} q^{2^{k_0+2}}, \dots,$$

тогда из (11) следует (14) при $C_3 = 1/C$.

Для характеристики сходимости последовательности $\{f(x^k)\}_{k \in N}$ к $f(x^*)$ в ситуациях, аналогичных (6) или (9), (7) или (10), (8) или (11), используются аналогичные термины: линейная, сверхлинейная и квадратичная скорость сходимости.

Для невыпуклых задач численные методы оптимизации обычно позволяют отыскивать лишь локальные решения, а, точнее говоря, стационарные точки. Задача отыскания глобального решения в общем случае чрезвычайно сложна. Алгоритмы глобальной оптимизации требуют больших затрат вычислительных ресурсов даже для функций одной переменной. Получение же достаточно точного решения многомерных задач глобальной оптимизации с помощью существующих в настоящее время численных методов оказывается вообще невозможным. Установление факта сходимости и оценка скорости сходимости дают существенную информацию о выбранном методе минимизации. Прежде всего, требования, которые приходится накладывать в теореме о сходимости на минимизируемую функцию, показывают область применимости метода. Часто в теоремах о сходимости в явном виде формулируются требования к начальному приближению. Наконец, анализ скорости сходимости дает полезную количественную и качественную характеристику изучаемого метода оптимизации.

В то же время реальный процесс оптимизации не может быть бесконечношаговым, что существенно ограничивает применимость теорем о сходимости на практике. Кроме того, в ряде случаев предположения этих теорем

труднопроверяемы. Поэтому при выборе подходящего метода решения реальных задач приходится во многом руководствоваться здравым смыслом, опытом, интуицией, а также результатами численных экспериментов. Для задания конкретного вычислительного алгоритма бесконечношаговый метод необходимо дополнить условием остановки. Условие остановки может определяться имеющимися в наличии вычислительными ресурсами. Например, может быть задано число вычислений предусмотренных алгоритмом характеристик минимизируемой функции f . Остановка может производиться и по достижении заданной точности решения задачи, например, на основе оценок (12)-(14). Однако при решении реальной задачи трудно оценить истинную точность. Так, константы, фигурирующие в оценках (12)-(14), обычно неизвестны. Поэтому о достижении заданной точности приходится судить по косвенным признакам.

На практике часто используются следующие условия остановки:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon_1, \quad (15)$$

$$|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \leq \varepsilon_2, \quad (16)$$

$$\|f'(x^{k+1})\| \leq \varepsilon_3. \quad (17)$$

До начала вычислений выбирается одно из условий (15)-(17) и соответствующее ему малое $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Вычисления прекращаются после $(k+1)$ -го шага, если впервые оказывается выполненным выбранное условие остановки. На практике также используются критерии, состоящие в одновременном выполнении двух из условий (15)-(17) или всех трех условий. Ясно, что критерий (17) относится лишь к задачам безусловной оптимизации. Его выполнение означает, что в точке x^{k+1} с точностью ε_3 выполнено условие стационарности. В задаче условной оптимизации критерий (17) следует заметить на критерий « ε -стационарности», соответствующий данной задаче.

Вместо условий (15)-(17), основанных на понятии абсолютной погрешности, можно использовать аналогичные критерии, основанные на понятии относительной погрешности:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &\leq \delta_1(1 + \|x^{k+1}\|), \\ |f(x^{k+1}) - f(x^k)| &\leq \delta_2(1 + |f(x^{k+1})|), \\ \|f'(x^{k+1})\| &\leq \delta_3(1 + |f(x^{k+1})|). \end{aligned}$$

Отметим, что выполнение указанных критериев и других подобных им эвристических условий остановки не гарантирует достижения необходимой точности решения задачи.

В методах спуска направление движения к минимуму на каждом шаге выбирается из числа направлений убывания минимизируемой функции.

Говорят, что вектор h задает *направление убывания* функции f в точке x , если $f(x + \alpha h) < f(x)$ при всех достаточно малых $\alpha > 0$. Сам вектор h также называют иногда направлением убывания. Множество всех направлений убывания функции f в точке x будем обозначать через $U(x, f)$. Таким образом, если любой достаточно малый сдвиг из x в направлении вектора h приводит к уменьшению значения функции f , то $h \in U(x, f)$. Заменяя неравенство, фигурирующее в определении направления убывания, на противоположное, получим определение *направления возрастания*.

В дальнейшем нам понадобятся следующие достаточный и необходимый признаки направления убывания функции.

Лемма 4. Пусть функция f дифференцируема в точке $x \in R^n$. Если вектор h удовлетворяет условию

$$\langle f'(x), h \rangle < 0, \quad (18)$$

то $h \in U(x, f)$. Если $h \in U(x, f)$, тогда

$$\langle f'(x), h \rangle \leq 0. \quad (19)$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (18). Тогда

$$f(x + \alpha h) - f(x) = \langle f'(x), \alpha h \rangle + o(\alpha) = \alpha (\langle f'(x), h \rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha}) < 0$$

при всех достаточно малых $\alpha > 0$, то есть $h \in U(x, f)$.

Пусть $h \in U(x, f)$ и $\langle f'(x), h \rangle > 0$. Тогда с помощью только что проведенного рассуждения убеждаемся, что h – направление возрастания. Полученное противоречие показывает, что в рассматриваемом случае справедливо неравенство (19). ■

Геометрически условие (19) означает, что вектор h составляет тупой угол с градиентом $f'(x)$.

Метод, определяемый итерационной формулой (8), называется *методом спуска*, если вектор h_k задает направление убывания функции f в точке x^k :

$$h_k \in U(x^k, f), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а $\alpha_k \geq 0$ и такое, что

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Простейшим примером метода спуска является градиентный метод, в котором $h_k = -f'(x^k)$. Если $f'(x) \neq 0$, то $-f'(x) \in U(x, f)$ в силу леммы 4.

Приведем несколько вариантов выбора длины шага в методах спуска, которые не исчерпывают множества всех применяемых на практике способов.

Коэффициенты α_k в методе (8) можно определять из условия

$$f(x^k + \alpha_k h_k) = \min_{\alpha} f(x^k + \alpha h_k),$$

где для методов спуска, то есть при $h_k \in U(x^k, f)$, минимум берется по $\alpha \geq 0$. Такой способ выбора α_k является в некотором смысле наилучшим, ибо он обеспечивает достижение наименьшего значения функции вдоль заданного направления. Однако он требует решения на каждом шаге одномерной задачи минимизации. Эти задачи решаются, как правило, приближенно с помощью численных методов, что приводит к значительному объему вычислений. В простейших случаях величины α_k удается найти в явном виде.

Пример 1.

Рассмотрим задачу минимизации функции $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$, где A – симметрическая положительно определенная матрица. Тогда

$$f(x^k + \alpha h_k) = \frac{1}{2} \langle A(x^k + \alpha h_k), x^k + \alpha h_k \rangle + \langle b, x^k + \alpha h_k \rangle =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} \langle Ah_k, h_k \rangle + \langle Ax^k + b, h_k \rangle \alpha + \left\langle \frac{1}{2} Ax^k + b, x^k \right\rangle.$$

Легко проверить, что минимум этой функции по α достигается при $\alpha_k = -\langle Ax^k + b, h_k \rangle / \langle Ah_k, h_k \rangle$.

Если h_k – направление убывания, то из леммы 4 и равенства $f'(x^k) = Ax^k + b$ имеем $\alpha_k = -\frac{\langle Ax^k + b, h_k \rangle}{\langle Ah_k, h_k \rangle} = -\frac{\langle f'(x^k), h_k \rangle}{\langle Ah_k, h_k \rangle} \geq 0$. Следовательно, $f(x^k + \alpha_k h_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha h_k) = \min_{\alpha \in R} f(x^k + \alpha h_k)$.

Иногда величины α_k выбирают до начала вычислений. Так, в ряде методов достаточно чтобы выполнялись условия

$$\alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty,$$

например, можно взять $\alpha_k = C/(k+1)$, где $C = \text{const} > 0$. На интуитивном уровне эти условия можно пояснить следующим образом. Условие сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2$ накладывают, чтобы добиться достаточно быстрой сходимости последовательности $\{\alpha_k\}_{k \in N}$ к нулю с целью обеспечения сходимости метода в окрестности точки экстремума x^* . Условие же расходимости ряда $\{\alpha_k\}_{k \in N}$ призвано обеспечить достижение точки экстремума x^* даже при неудачном выборе начального приближения x^0 , то есть при большом расстоянии от x^0 до x^* .

В некоторых методах коэффициенты α_k можно выбирать постоянными: $\alpha_k \equiv \alpha > 0$.

Приведем еще один адаптивный способ выбора коэффициентов α_k , называемый *дроблением шага*. Если h_k – направление убывания, то дробление шага можно осуществлять следующим образом.

Выбираются некоторые константы $\beta > 0$, $0 < \lambda < 1$ (часто $\lambda = 1/2$). Для коэффициента $\alpha = \beta$ проверяется выполнение условия

$$f(x^k + \alpha h_k) < f(x^k). \quad (20)$$

Если оно выполнено, то полагают $\alpha_k = \alpha$. Если нет, то производится дробление шага, то есть принимается $\alpha = \lambda\beta$, и вновь проверяется выполнение условия (20). Процесс дробления продолжается до тех пор, пока условие (20) не окажется выполненным. Этот процесс не может быть бесконечным, поскольку h_k – направление убывания. Первое α , при котором условие выполнено, и принимается за α_k .

ГЛАВА 2

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В этой главе рассматривается задача безусловной минимизации, приводится описание методов нулевого, первого и второго порядков. В качестве представителя методов нулевого порядка описывается метод покоординатного спуска [2, 6]. Хотя скорость сходимости этого метода, как правило, невысокая, благодаря простоте и небольшим требованиям к гладкости целевой функции его можно использовать для решения задач. Другой подход для минимизации негладких функций, основанный лишь на вычислении значений функции, дает метод случайного поиска [2], который также излагается в этой главе.

Также рассматриваются такие классические методы минимизации, как градиентный метод и метод Ньютона [2, 3, 6, 7, 9]. Эти методы важны в идейном отношении. Оба они явным образом основаны на идее замены оптимизируемой функции в окрестности текущего приближения первыми членами ее разложения в ряд Тейлора. В градиентном методе берут линейную часть разложения, в методе Ньютона – квадратичную часть.

§ 1. Метод покоординатного спуска

Метод покоординатного спуска применяется для решения экстремальных задач, в которых целевая функция либо не обладает нужной гладкостью, либо является гладкой, но вычисление производных слишком трудоемко. В таких случаях желательно иметь методы решения, которые используют лишь значения функции. Далее приводится описание метода покоординатного спуска для следующей задачи:

$$f(x) \rightarrow \inf_{x \in R^n} . \quad (1)$$

Пусть $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ – i -ый единичный координатный вектор, x^0 – начальное приближение, $\alpha_0 > 0$ – начальная длина шага. Пусть $x^k \in R^n$ – текущее приближение, $\alpha_k > 0$ – текущая длина шага, $\lambda \in (0, 1)$ – фиксированное число.

Метод покоординатного спуска – итеративный процесс. На каждой итерации метода в качестве направления спуска используется один из единичных координатных векторов. Так как таких векторов ровно n , то множество всех итераций естественно разбивается на группы из n итераций. Занумеруем итерации так, чтобы t -ая группа начиналась с итерации с номером $(t-1)n+1$, а последняя итерация этой группы заканчивалась номером tn .

Опишем итерацию с номером k , где

$$(t-1)n+1 \leq k \leq tn .$$

Сначала проверяется можно ли улучшить текущее приближение, сдвигаясь в направлении координатного вектора $e_{k-(t-1)n}$ с длиной шага α_{k-1} . Если удастся улучшить значение целевой функции

$$f(x^{k-1} + \alpha_{k-1}e_{k-(t-1)n}) < f(x^{k-1}), \quad (2)$$

то пересчитывается текущее приближение по формулам

$$x^k = x^{k-1} + \alpha_{k-1}e_{k-(t-1)n}, \quad \alpha_k = \alpha_{k-1}. \quad (3)$$

В противном случае проверяется вектор $-e_{k-(t-1)n}$. Если выполняется неравенство

$$f(x^{k-1} - \alpha_{k-1}e_{k-(t-1)n}) < f(x^{k-1}), \quad (4)$$

тогда

$$x^k = x^{k-1} - \alpha_{k-1}e_{k-(t-1)n}, \quad \alpha_k = \alpha_{k-1}. \quad (5)$$

Если выполняется (2) или (4), то будем говорить, что итерация k удачная.

В случае неудачной итерации k положим $x^k = x^{k-1}$,

$$\alpha_k = \begin{cases} \lambda\alpha_{k-1}, & \text{если } k = tn \text{ и все итерации группы неудачные,} \\ \alpha_{k-1}, & \text{если } k \neq tn \text{ или были удачные итерации внутри группы.} \end{cases} \quad (6)$$

Пусть в t -ой группе не оказалось ни одной удачной итерации и шаг дробится. В этом случае выполняются неравенства

$$f(x^{k-1} + \alpha_{k-1}e_i) \geq f(x^{k-1}), \quad f(x^{k-1} - \alpha_{k-1}e_i) \geq f(x^{k-1}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Если в данной группе из n итераций реализовалась хотя бы одна удачная итерация, то тогда на последней итерации группы длина шага не дробится и сохраняется еще на протяжении n итераций следующего цикла, так как дробление возможно только на последней итерации цикла.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ выпукла на R^n и $f \in C^1(R^n)$, а начальное приближение таково, что множество $M(x^0) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq f(x^0)\}$ ограничено. Тогда последовательность $\{x^k\}_{k \in N}$ имеет хотя бы одну предельную точку, и любая предельная точка этой последовательности есть оптимальное решение задачи.

Доказательство. В задаче (1) по теореме Вейерштрасса (глава 1) существует оптимальное решение $x^* \in R^n$. Из условий (2)–(6) следует $f(x^k) \leq f(x^{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$, откуда получаем, что $\{x^k\}_{k \in N} \in M(x^0)$ и существует $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq f^* = f(x^*)$. Покажем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$. Допустим противное. Пусть $\alpha_k = \alpha > 0$ для всех $k \geq k_0$, то есть процесс дробления конечен.

Зададим сетку с шагом α :

$$M_\alpha = \{u \in M(x^0) \mid u = x^{k_0} + \alpha \sum_{i=1}^n r_i e_i, r_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = 1, \dots, n\}.$$

Понятно, что, начиная с номера k_0 , любой цикл из n итераций содержит хотя бы одну удачную итерацию. На каждой удачной итерации переходим от текущей точки сетки x^k к соседней точке x^{k+1} . Так как при этом $f(x^k) > f(x^{k+1})$, то посетим каждую точку сетки не более одного раза, следовательно, сетка M_α содержит бесконечное множество разных точек, что противоречит ограниченности множества $M(x^0)$. Откуда следует, что процесс дробления длины шага α_k бесконечен и $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$.

Пусть $k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$ – номера итераций, на которых дробится длина шага, и выполняются неравенства (7). Так как $\{x^{k_m}\}_{k_m \in N} \in M(x^0)$, и множество $M(x^0)$ ограничено, тогда можно считать, что существует $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{k_m} = \hat{x}$. Из формулы конечных приращений и (7) получаем для всех

k $\langle f'(x^{k_m} + \theta_{k_m} \alpha_{k_m} e_i), \alpha_{k_m} e_i \rangle = f(x^{k_m} + \alpha_{k_m} e_i) - f(x^{k_m}) \geq 0$, следовательно, для $m \in N$, $i = 1, \dots, n$ справедливо $f'_{x_i}(x^{k_m} + \theta_{k_m} \alpha_{k_m} e_i) \geq 0$, где $0 \leq \theta_{k_m} \leq 1$.

Аналогично получим, что для всех m

$$\langle f'(x^{k_m} - \bar{\theta}_{k_m} \alpha_{k_m} e_i), -\alpha_{k_m} e_i \rangle = f(x^{k_m} - \alpha_{k_m} e_i) - f(x^{k_m}) \geq 0$$

и, следовательно, для $m \in N$ и $i = 1, \dots, n$ $f'_{x_i}(x^{k_m} - \bar{\theta}_{k_m} \alpha_{k_m} e_i) \leq 0$, где $0 \leq \bar{\theta}_{k_m} \leq 1$.

По условию, частные производные $f'_{x_i}(x)$ – непрерывные функции на R^n .

Поэтому из условий $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{k_m} = 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{k_m} = \hat{x}$ имеем $f'_{x_i}(\hat{x}) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Откуда $f'(\hat{x}) = 0$ и, следовательно, \hat{x} является оптимальным решением задачи, так как f – выпуклая функция. ■

Данный метод не требует знания градиента, но сходимость можно гарантировать лишь для гладких функций. Если целевая функция не является гладкой, то метод покоординатного спуска может не сходиться к множеству решений задачи.

§ 2. Методы случайного поиска

Основная особенность этого метода состоит в том, что в процессе вычисления приближений x^k используются случайные вектора в качестве направления движения. Например,

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k \xi, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где $\alpha_k > 0$ – длина шага, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – реализация n -мерной случайной величины ξ с заданным распределением. Например, ξ_i – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-1, 1]$. Таким образом, любая реализация метода случайного поиска использует генератор случайных чисел, который по любому запросу выдает реализацию случайного вектора ξ с заданной функцией распределения.

Рассмотрим задачу $f(x) \rightarrow \min_{x \in Q}$, где $Q \subseteq R^n$. Пусть известно k -ое приближение $x^k \in Q$, $k = 0, 1, \dots$. Далее приводится описание нескольких вариантов метода случайного поиска.

Алгоритм с возвратом при неудачном шаге

Идея этого алгоритма заключается в следующем. На каждом шаге берется некоторая реализация случайной величины ξ и вычисляется вектор $v^k = x^k + \alpha \xi$, где $\alpha = \text{const} > 0$ – длина шага. Если $v^k \in Q$ и $f(v^k) < f(x^k)$, то предлагаемый шаг считаем удачным. В этом случае $x^{k+1} = v^k$. Если $v^k \notin Q$, но $f(v^k) \geq f(x^k)$, или $v^k \notin Q$, то шаг является неудачным, тогда полагаем $x^{k+1} = x^k$. Если на текущей итерации оказывается, что $x^k = x^{k+1} = \dots = x^{k+N}$ для достаточно большого N , то алгоритм останавливается и x^k является искомым приближением.

Алгоритм наилучшей пробы

Пусть ξ_1, \dots, ξ_s – реализации случайного вектора ξ . Величины α и $s > 1$ являются параметрами алгоритма. Пусть i_0 – индекс, определяемый условием

$$f(x^k + \alpha \xi_{i_0}) = \min_{x^k + \alpha \xi_i \in Q, 1 \leq i \leq s} f(x^k + \alpha \xi_i), \quad k = 0, 1, \dots$$

Далее полагаем $x^{k+1} = x^k + \alpha \xi_{i_0}$.

Алгоритм статистического градиента

Пусть ξ_1, \dots, ξ_s – реализации случайного вектора ξ . Вычислить разности

$\Delta f_{ki} = f(x^k + \gamma \xi_i) - f(x^k)$ для всех $x^k + \gamma \xi_i \in Q$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, s$. Пусть

$$p_k = \frac{1}{\gamma} \sum_{x^k + \gamma \xi_i \in Q, 1 \leq i \leq s} \xi_i \Delta f_{ki}.$$

Если $x^k + \alpha p_k \in Q$, то $x^{k+1} = x^k + \alpha p_k$. В противном случае выбрать новый набор ξ'_1, \dots, ξ'_s реализаций случайного вектора ξ и повторить все действия.

Величины $s > 1$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ – параметры алгоритма, γ – длина шага сетки. Вектор p_k называется статистическим градиентом. Если $Q = R^n$, $s = n$ и векторы ξ_i равны единичным векторам e_i , $i = 1, \dots, s$, то данный алгоритм оказывается разностным аналогом градиентного метода.

Так как функция распределения случайного вектора ξ не зависит от номера итерации, то предложенные выше варианты метода случайного поиска называют *методами случайного поиска без обучения*. Эти алгоритмы не обладают способностью учитывать результаты предыдущих итераций и, соответственно, обнаруживать более перспективные направления убывания минимизируемой функции. Как результат, они медленно сходятся.

Идея заключается в том, что для повышения эффективности случайного поиска надо научиться использовать на каждой итерации информацию, полученную при поиске минимума на предыдущих итерациях. При этом хотелось бы научиться перестраивать вероятностные свойства поиска так, чтобы направления ξ , обеспечивающие более быстрое убывание целевой функции, выбирались бы с большей вероятностью.

Методы случайного поиска, которые обладают способностью приспосабливаться к конкретным особенностям минимизируемой функции, назовем *методами случайного поиска с обучением*. Так как в этом случае функция распределения вектора ξ пересчитывается в зависимости от номера итерации и предыдущих результатов, то итерационный процесс (8) записывается теперь в виде

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k \xi_k, k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

На нулевой итерации функция распределения вектора ξ выбирается с учетом априорной информации о целевой функции. Если такая информация недоступна, то нулевую итерацию начинают со случайного вектора $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$, где ξ_1^0, \dots, ξ_n^0 – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-1, 1]$.

Алгоритм покоординатного обучения

Пусть $\xi(w) = (\xi_1(w), \dots, \xi_n(w))$ – семейство случайных векторов, зависящих от параметров $w = (w_1, \dots, w_n)$. Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ случайная величина $\xi_i = 1$ с вероятностью p_i и $\xi_i = -1$ с вероятностью $(1 - p_i)$, где

$$p_i = \begin{cases} 0, & \text{если } w_i < -1, \\ \frac{1}{2}(1 + w_i), & \text{если } |w_i| \leq 1, \\ 1, & \text{если } w_i > 1. \end{cases}$$

Пусть x^0 задано, x^1 вычисляется по формуле (9) при $k = 0$, где берется какая-либо реализация случайного вектора $\xi_0 = \xi(0)$ для значений параметров $w_0 = (0, \dots, 0)$. Приближение x^2 также вычисляется по формуле (9) при $k = 1$ с помощью случайного вектора $\xi_1 = \xi(0)$.

Пусть известны приближения x^0, x^1, \dots, x^k и значения параметров $w^{k-1} = (w_1^{k-1}, \dots, w_n^{k-1})$, где $k \geq 1$. Положим

$$w_i^k = \beta w_i^{k-1} - \delta \operatorname{sign}[(f(x^{k-1}) - f(x^{k-2})) (x_i^{k-1} - x_i^{k-2})], \quad (10)$$

где $i = 1, \dots, n$, $k = 2, 3, \dots$.

С помощью параметра $\beta \geq 0$ управляют памятью алгоритма. Параметр $\delta \geq 0$ управляет скоростью обучения, при этом предполагается, что величины β и δ не могут быть равными нулю одновременно. Приближение x^{k+1} определяется по формуле (9) для реализации случайного вектора $\xi_k = \xi(w^k)$ для набора значений параметров $w^k = (w_1^k, \dots, w_n^k)$.

Из формул для вычисления вероятностей p_i и параметров w_i^k следует, что, если $f(x^{k-1}) < f(x^{k-2})$, то вероятность выбора направления $(x^{k-1} - x^{k-2})$ на следующем шаге увеличивается. В противном случае эта вероятность падает. Итак, с помощью формул (10) происходит обучение алгоритма.

Величина $\beta > 0$ в (10) регулирует влияние предыдущих значений параметров на обучение; при $\beta = 0$ влияние предыдущих состояний w^{k-1} не учитывается. Величина $\delta > 0$ в (10) регулирует скорость обучения; при $\delta = 0$ обучения не происходит.

§ 3. Градиентные методы

Вектор $-f'(x^k)$ является направлением наискорейшего убывания функции $f(x)$ и называется *антиградиентом*. Выбирая в качестве направления

спуска p_k антиградиент функции $f(x)$ в точке x^k , приходим к итерационному процессу вида

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k), \alpha_k \geq 0.$$

Все итерационные процессы, в которых направление движения на каждом шаге совпадает с антиградиентом (градиентом) функции, называются градиентными методами и отличаются друг от друга способами выбора длины шага α_k . Существует много различных способов выбора длины шага α_k , но наиболее распространены три из них. Первый называется *методом с постоянным шагом*: $\alpha_k = \alpha$. Второй – *методом с дроблением шага*. Он связан с проверкой на каждом шаге неравенства

$$f(x^k - \alpha_k f'(x^k)) - f(x^k) \leq \varepsilon \alpha_k \|f'(x^k)\|^2,$$

где ε – некоторая константа из интервала $(0,1)$.

В третьем методе при переходе из точки x^k в точку x^{k+1} минимизируется по α функция $f(x^k - \alpha f'(x^k))$:

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \geq 0} f(x^k - \alpha f'(x^k)).$$

Это *метод наискорейшего спуска*.

Следующая теорема содержит достаточные условия сходимости метода с постоянным шагом.

Теорема 2 (первая теорема сходимости). Пусть функция f дифференцируема в R^n , ограничена снизу величиной $f^* > -\infty$, выполняется условие Липшица для градиента $f'(x)$

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L \|x - y\|$$

и длина шага α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 2/L$. Тогда

$$f'(x^k) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ и } f(x^{k+1}) \leq f(x^k),$$

при любом выборе начального приближения x^0 .

Доказательство. Воспользуемся формулой конечных приращений

$$f(x + y) = f(x) + \int_0^1 \langle f'(x + \tau y), y \rangle d\tau,$$

которую перепишем в следующем виде:

$$f(x + y) = f(x) + \langle f'(x), y \rangle + \int_0^1 \langle f'(x + \tau y) - f'(x), y \rangle d\tau.$$

Сделаем подстановки $x = x^k$, $y = -\alpha f'(x^k)$. Тогда из неравенства Коши-

Буняковского $\langle a, b \rangle \leq \|a\| \|b\|$ и условия Липшица получим

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle f'(x^k), -\alpha f'(x^k) \rangle + \\
 &+ \int_0^1 \left| \langle f'(x^k - \tau \alpha f'(x^k)) - f'(x^k), -\alpha f'(x^k) \rangle \right| d\tau \leq \\
 &\leq f(x^k) - \alpha \|f'(x^k)\|^2 + \int_0^1 \|f'(x^k - \tau \alpha f'(x^k)) - f'(x^k)\| \|\alpha f'(x^k)\| d\tau \leq \\
 &\leq f(x^k) - \alpha \|f'(x^k)\|^2 + \int_0^1 L \|\tau \alpha f'(x^k)\| \|\alpha f'(x^k)\| d\tau = \\
 &= f(x^k) - \alpha \|f'(x^k)\|^2 + L \alpha^2 \|f'(x^k)\|^2 \int_0^1 \tau d\tau = \\
 &= f(x^k) - \alpha(1 - L\alpha/2) \|f'(x^k)\|^2 = f(x^k) - \gamma \|f'(x^k)\|^2,
 \end{aligned}$$

где $\gamma = \alpha(1 - L\alpha/2)$. Из условий теоремы следует, что $\gamma > 0$ и, следовательно,

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k).$$

Кроме того, для любой итерации k выполняется неравенство

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^0) - \gamma \sum_{i=0}^k \|f'(x^i)\|^2.$$

Поэтому, учитывая ограниченность функции f на множестве R^n , получаем для любого $s \in N$ оценку сверху для частичных сумм:

$$\sum_{k=0}^s \|f'(x^k)\|^2 \leq \frac{f(x^0) - f(x^{s+1})}{\gamma} \leq \frac{f(x^0) - f^*}{\gamma}.$$

Откуда и следует сходимость к нулю градиента $f'(x^k)$ при $k \rightarrow \infty$. ■

В условиях теоремы 2 градиентный метод обеспечивает сходимость последовательности $\{f(x^k)\}_{k \in N}$ либо к точной нижней грани $\inf_{x \in R^n} f(x)$, если функция $f(x)$ не имеет минимума, либо к значению $f(x^*)$, где $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ и $f'(x^*) = 0$, если такой предел существует. Существуют примеры, когда в точке x^* реализуется седло, а не минимум. Тем не менее, на практике методы градиентного спуска обычно обходят седловые точки и находят локальные минимумы целевой функции. Для оценки скорости сходимости метода предположений теоремы 2 недостаточно. Сделаем это в случае, когда $f(x)$ – сильно выпуклая функция.

Теорема 3 (вторая теорема сходимости). Пусть функция f дифференцируема в R^n , является сильно выпуклой, выполняется условие Липшица для градиента функции и длина шага α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 2/L$. Тогда

$$x^k \rightarrow x^* \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ и } \|x^k - x^*\| \leq Cq^k, \quad 0 \leq q < 1.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством, полученным при доказательстве теоремы 2:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha(1 - L\alpha/2) \|f'(x^k)\|^2.$$

По лемме 1.1 существует глобальный минимум x^* функции f . Используя (1.7), получим

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - l\alpha(2 - L\alpha)(f(x^k) - f(x^*)).$$

Вычитая из обеих частей неравенства величину $f(x^*)$, получим

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) \leq (1 - l\alpha(2 - L\alpha))(f(x^k) - f(x^*)). \quad (14)$$

Обозначим через q_1 коэффициент при выражении $(f(x^k) - f(x^*))$. Индукцией легко показать, что

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) \leq q_1^{k+1}(f(x^0) - f(x^*)).$$

Проверим, что $q_1 \geq 0$. Функция f является сильно выпуклой. Значит, она не может быть константой и имеется возможность выбрать начальную точку x^0 так, чтобы $f(x^0) > f(x^*)$. Из неравенства (14) при $k=0$ имеем

$$0 \leq f(x^1) - f(x^*) \leq q_1(f(x^0) - f(x^*)),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Так как $q_1 < 1$, то $f(x^k) \rightarrow f(x^*)$ при $k \rightarrow \infty$. Учитывая, что $f'(x^*) = 0$, из (11) при подстановках $y = x^k - x^*$ и $x = x^*$ получим

$$(f(x^k) - f(x^*)) \geq l \|x^k - x^*\|^2 / 2.$$

Следовательно,

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq 2q_1^k (f(x^0) - f(x^*)) / l.$$

Последнее неравенство дает линейную оценку скорости сходимости метода

$$\|x^k - x^*\| \leq Cq^k,$$

где $C = \sqrt{2(f(x^0) - f(x^*)) / l}$, $q = \sqrt{q_1}$. Отсюда также следует сходимость последовательности $\{x^k\}_{k \in N}$ к единственной точке минимума x^* . ■

§ 4. Метод Ньютона

Перейдем к изложению метода второго порядка, использующего вторые частные производные минимизируемой функции $f(x)$. Рассматриваемый

далее метод является прямым обобщением метода Ньютона для отыскания решения системы уравнений $\varphi(x) = 0$, где $\varphi : R^n \rightarrow R^n$. Возьмем линейную аппроксимацию функции $\varphi(x)$ в окрестности точки x^k и перепишем векторное уравнение в следующем виде:

$$\varphi(x) = \varphi(x^k) + \varphi'(x^k)(x - x^k) + o(\|x - x^k\|) = 0.$$

Отбрасывая последний член в этом разложении, получим линейную систему уравнений относительно нового приближения x^{k+1} . Таким образом, метод Ньютона для отыскания решения системы уравнений описывается следующей формулой:

$$x^{k+1} = x^k - (\varphi'(x^k))^{-1} \varphi(x^k).$$

Пусть функция $\varphi(x)$ является градиентом некоторой функции $f(x)$. Формула метода Ньютона для решения уравнения $f'(x) = 0$ выглядит так:

$$x^{k+1} = x^k - (f''(x^k))^{-1} f'(x^k).$$

В этом случае метод Ньютона можно интерпретировать как поиск точки минимума квадратичной аппроксимации функции $f(x)$ в окрестности точки x^k .

Пусть последовательность $\{x^k\}_{k \in N}$ получена с помощью метода Ньютона и точка x^* – глобальный минимум функции f . Следующая теорема дает условия квадратичной скорости сходимости метода.

Теорема 4. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция f сильно выпукла с константой $l > 0$, вторая производная удовлетворяет условию Липшица

$$\|f''(x) - f''(y)\| \leq L\|x - y\| \text{ для любых } x, y \in R^n,$$

и $q = L\|f'(x^0)\| / 2l^2 < 1$. Тогда $x^k \rightarrow x^*$ при $k \rightarrow \infty$, и метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости

$$\|x^k - x^*\| \leq (2l/L)q^{2^k}.$$

Доказательство. Воспользуемся следующей формулой конечных приращений:

$$g(x + y) = g(x) + \langle g'(x), y \rangle + \int_0^1 (g'(x + \tau y) - g'(x)) d\tau.$$

Подставим вместо g производную функции f и, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\|f'(x + y) - f'(x) - \langle f''(x), y \rangle\| \leq L\|y\|^2 / 2.$$

Тогда для $x = x^k$ и $y = -[f''(x^k)]^{-1} f'(x^k)$ имеем

$$\|f'(x^{k+1})\| \leq (L/2) \left\| [f''(x^k)]^{-1} \right\|^2 \|f'(x^k)\|^2.$$

Применяя лемму 1.3, получим

$$\|f'(x^{k+1})\| \leq (L/2l^2) \|f'(x^k)\|^2.$$

Итерируя это неравенство по k , приходим к неравенству

$$\|f'(x^{k+1})\| \leq (2l^2/L) \underbrace{(L\|f'(x^0)\|/2l^2)^{2^{k+1}}}_q.$$

Остается показать, что

$$\|f'(x^{k+1})\| \geq l\|x^{k+1} - x^*\|.$$

Из сильной выпуклости имеем

$$\langle f'(x) - f'(y), x - y \rangle \geq l\|x - y\|^2.$$

Тогда при подстановке $y = x^*$, $x = x^{k+1}$, учитывая равенство $f'(x^*) = 0$, получим

$$l\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \langle f'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle \leq \|f'(x^{k+1})\| \|x^* - x^{k+1}\|,$$

откуда следует требуемое неравенство. ■

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этой главе рассматривается задача минимизации линейной целевой функции на множестве допустимых решений, которое также определяется линейными ограничениями. Подобные задачи составляют предмет линейного программирования (ЛП). Любую задачу линейного программирования с помощью простых приемов можно привести к виду:

$$(c, x) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$Ax = b, \quad (2)$$

$$x \geq 0. \quad (3)$$

Задача (1)-(3) называется задачей линейного программирования в канонической форме. Далее рассматриваются только такие задачи.

В первом параграфе содержится описание наиболее известного метода решения линейных задач – прямого симплекс-метода. В предлагаемом варианте метода вычисления организованы на основе симплекс-таблиц и элементарных преобразований.

Во втором параграфе приводится более эффективный вариант симплекс-метода, известный под названием модифицированного симплекс-метода или алгоритма с обратной матрицей.

Третий параграф посвящен лексикографическому варианту симплекс-метода. Важность этой модификации метода связана с явлением закливания, которое может возникать при решении вырожденных задач ЛП. В этом случае базисному допустимому решению (б.д.р.) может соответствовать несколько базисов и при определенных условиях они начинают повторяться. Следовательно, симплекс-метод не может выйти из текущей вершины, бесконечное число раз повторяя одну и ту же итерацию. В предлагаемом варианте алгоритма эта проблема решена с помощью лексикографического правила выбора ведущей строки.

В вариантах симплекс-метода, рассматриваемых в предыдущих параграфах, предполагается, что известна начальная симплекс-таблица. В четвертом параграфе описывается метод искусственного базиса или двухфазовый симплекс-метод, который не требует информации о начальном б.д.р. На первом этапе работы алгоритм находит начальное б.д.р. решаемой задачи, либо устанавливает несовместность ее ограничений. На втором этапе он либо находит оптимальное решение, либо устанавливает неразрешимость исходной задачи из-за неограниченности целевой функции.

Пятый параграф посвящен описанию двойственного симплекс-метода. Можно считать, что этот метод есть прямой симплекс-метод, примененный к двойственной задаче, записанной в канонической форме, и реализованный на симплекс-таблицах прямой задачи.

В шестом параграфе рассматривается лексикографический двойственный симплекс-метод. Особенность этой модификации метода состоит в том, что помимо лексикографического правила выбора ведущего столбца, которое гарантирует отсутствие заикливания, алгоритм основывается на другом типе симплекс-таблиц. Последнее обстоятельство делает удобным применение этого алгоритма в циклическом алгоритме Гомори.

В седьмом параграфе представлена геометрическая интерпретация задач ЛП, которая позволяет по-новому взглянуть на эти задачи и методы их решения.

Восьмой параграф является иллюстрацией того, как интерпретация задач линейного программирования используется для описания методов решения задач ЛП. Содержание параграфа составляет геометрическая интерпретация прямого симплекс-метода.

§ 1. Прямой симплекс-метод

Данный параграф посвящен описанию и теоретическому обоснованию *симплекс-метода* [2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11]. В отечественной литературе метод известен также под названием метода *последовательного улучшения плана* [12]. Основы метода были сформулированы Данцигом в 1947. Его общепринятое название возникло из геометрической интерпретации задач, для решения которых он был впервые применен, и не отражает суть метода.

Симплекс-метод является алгоритмом локального поиска, который применяется для решения задач ЛП. Действительно, рассмотрим вершины многогранного множества допустимых решений. В качестве окрестности любой из вершин возьмем множество соседних вершин, то есть вершин, каждая из которых соединяется ребром с данной вершиной. Проверая текущую вершину, симплекс-метод за полиномиальное время определяет, является ли она локальным оптимумом или нет. Если получен локальный оптимум, то алгоритм завершает свою работу. Так как задача линейная, то найденный локальный оптимум является глобальным. Если текущая вершина не является оптимумом, то симплекс-метод отыскивает ребро, при движении по которому значение целевой функции убывает. Возможно два случая: ребро конечно или бесконечно. Симплекс-метод за полиномиальное время определяет, какой из случаев реализовался. Если ребро бесконечно, то алгоритм завершает свою работу, так как в этом случае задача неразрешима в силу неограниченности снизу целевой функции. Если ребро конечно, то симплекс-метод вычисляет соседнюю вершину, и следующая итерация начинается с этой вершины.

1.1 Базис и базисное решение

Предположим, что матрица A имеет ранг m ($m \leq n$). Тогда в A имеется m линейно независимых столбцов. Система линейных уравнений (2) совместна

и избыточна. Обозначим через $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T$, $j \in J$, столбцы матрицы ограничений.

Определение 1. Любой набор $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$ из m линейно независимых столбцов называется *базисом*, как и матрица $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$, составленная из этих столбцов.

Перестановкой столбцов матрицу A можно привести к виду $A = [B, N]$, где N – подматрица, составленная из остальных столбцов матрицы A . Поступив аналогичным образом с вектором x , получим представление $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, где $x_B = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})^T$.

Определение 2. Переменные x_j , являющиеся компонентами вектора x_B (соответственно, x_N), называются *базисными* (соответственно, *небазисными*).

Обозначим через S множество номеров базисных переменных, а через S' – множество номеров небазисных переменных.

Определение 3. Решение системы (2)

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

называется *базисным решением*, соответствующим базису B .

Лемма 1. Вектор x – базисное решение системы (2) тогда и только тогда, когда множество столбцов $\{A_j \mid x_j \neq 0, j \in J\}$ матрицы A линейно независимо.

Определение 4. Базисное решение называется *невырожденным*, если у него ровно m ненулевых компонент. В противном случае базисное решение называется *вырожденным*.

Определение 5. Задача (1)-(3) называется *невырожденной*, если все ее базисные решения невырождены. В ином случае задача будет *вырожденной*.

Число базисных решений конечно и не превосходит числа C_n^m . Каждому базису соответствует одно базисное решение, но базисному решению может соответствовать несколько базисов.

Определение 6. *Базисным допустимым решением* (б.д.р.) называется любой элемент множества $Q = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, являющийся базисным решением системы $Ax = b$.

Ясно, что решение, соответствующее базису B , является б.д.р. тогда и только тогда, когда $B^{-1}b \geq 0$.

Приведем ряд утверждений, касающихся разрешимости задач ЛП, существования допустимых и оптимальных базисных решений.

Теорема 1. Вектор x является базисным допустимым решением тогда и только тогда, когда x есть крайняя точка множества Q .

Теорема 2 (критерий разрешимости). Задача (1)-(3) разрешима тогда и только тогда, когда $Q \neq \emptyset$ и целевая функция $w(x)$ ограничена снизу на множестве X .

Лемма 2. Если $Q \neq \emptyset$, то существует базисное допустимое решение.

Лемма 3. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное допустимое решение.

В следующем примере показано, что в задаче ЛП все б.д.р. могут быть вырожденными.

Пример 1. Найти все базисы системы равенств и соответствующие им базисные решения:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Рассмотрим множество столбцов $\{A_1, A_2\}$, они линейно независимы; отметим, что здесь $m = 2$. Значит, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ – базис. Набор столбцов $\{A_1, A_3\}$ базисом не является, так как очевидно, что эти столбцы линейно зависимы. Аналогично устанавливаем, что $\{A_1, A_4\}$, $\{A_2, A_3\}$, $\{A_3, A_4\}$ – базисы, а $\{A_2, A_4\}$ – не базис. Так как в данном примере $C_4^2 = 6$, то рассмотрены все случаи.

Таким образом, $\{A_1, A_2\}$, $\{A_1, A_4\}$, $\{A_2, A_3\}$, $\{A_3, A_4\}$ – все базисы данной системы равенств.

Найдем теперь все базисные решения. Согласно введенным выше обозна-

чениям система (2) при выбранном базисе B может быть записана в таком виде:

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Откуда, в силу существования обратной матрицы B^{-1} , получаем, что $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$. Положив $x_N = 0$, получим базисное решение $x_B = B^{-1}b$, $x_N = 0$.

Очевидно, что базисное решение $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ можно найти, положив в (2) $x_N = 0$, а затем разрешив получившуюся систему уравнений относительно x_B любым удобным способом. Если $B = (A_1, A_2)$, то $x_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Значит, $x = (1, 0, 0, 0)^T$ – базисное решение.

Последовательно находим, что вектор $x = (1, 0, 0, 0)^T$ соответствует базису $\{A_1, A_4\}$, а вектор $x = (0, 0, 1, 0)^T$ – базисам $\{A_2, A_3\}$ и $\{A_3, A_4\}$.

Таким образом, система имеет четыре базиса, но только два базисных решения, каждому из которых можно поставить в соответствие по два базиса. Отметим, что для всех базисных решений выполнено условие $x \geq 0$, то есть это базисные допустимые решения.

1.2. Элементарные преобразования. Симплекс-таблицы

Пусть \bar{x} – базисно-допустимое решение, $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$ – соответствующая базисная матрица. Умножим ограничение (2) на матрицу B^{-1} и получим

$$Ex_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \quad (4)$$

$$Ex_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, \quad (5)$$

используя это равенство, исключим базисные переменные из целевой функции. Для этого подставим в (1) представление базисных переменных через небазисные переменные (5), приведем подобные и, введя новую переменную w , запишем целевую функцию в виде уравнения

$$w = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N, \quad (6)$$

где $x = (x_B, x_N)$, $x_B = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$ – базисные переменные, а $x_N = (x_j)_{j \in S'}$ – небазисные переменные.

Из приведенных рассуждений следует, что если x – допустимое решение канонической задачи, то $(c, x) = w$ тогда и только тогда, когда вектор (w, x)

является решением системы уравнений и неравенств (3), (4), (6). Запишем систему уравнений (5), (6) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & c_N - B^{-1}N \\ 0 & E & B^{-1}N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_B B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{pmatrix}.$$

Введем новые обозначения:

$z_{00} = -c_B B^{-1}b = -w(\bar{x})$ – значение целевой функции на текущем б.д.р., взятое с обратным знаком;

$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1}A_j, j = 1, \dots, n$, – оценки замещения;

$z_{i0}, i = 1, \dots, m$, – значения базисных компонент текущего б.д.р., то есть $(z_{10}, \dots, z_{m0})^T = B^{-1}b$;

$z_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, – коэффициенты замещения, которые удовлетворяют условиям $(z_{1j}, \dots, z_{mj})^T = B^{-1}A_j, j = 1, \dots, n$.

Перепишем систему уравнений (5), (6) в эквивалентном виде:

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \quad (7)$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8)$$

где $S' = J \setminus \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$. Коэффициенты этой системы определяют симплекс-таблицу.

		x_1	...	x_j	...	x_n
$-w$	z_{00}	z_{01}	...	z_{0j}	...	z_{0n}
$x_{\sigma(1)}$	z_{10}	z_{11}	...	z_{1j}	...	z_{1n}
.
$x_{\sigma(i)}$	z_{i0}	z_{i1}	...	z_{ij}	...	z_{in}
.
$x_{\sigma(m)}$	z_{m0}	z_{m1}	...	z_{mj}	...	z_{mn}

Символы переменных слева от таблицы и над ней используются для повышения ее информативности.

Из вида системы уравнений (8) следует, что столбец, отвечающий переменной с номером $\sigma(i), i \in \{1, \dots, m\}$, является единичным вектором, имеющим 1 в i -ой строке и 0 в остальных строках. Аналогично из (7) следует, что оценки замещения базисных переменных равны нулю. Таким образом, если $\sigma(i) = i, i = 1, \dots, m$, то симплекс-таблица имеет вид

		x_1	\dots	x_i	\dots	x_m	x_{m+1}	\dots	x_n
$-w$	z_{00}	0	\dots	0	\dots	0	z_{0m+1}	\dots	z_{0n}
x_1	z_{10}	1	\dots	0	\dots	0	z_{1m+1}	\dots	z_{1n}
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_i	z_{i0}	0	\dots	1	\dots	0	z_{im+1}	\dots	z_{in}
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	z_{m0}	0	\dots	0	\dots	1	z_{mm+1}	\dots	z_{mn}

Базисное решение, соответствующее базису B , имеет вид $x_B = (z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0})^T$, $\bar{x}_N = 0$, а целевая функция w на данном решении принимает значение $w(\bar{x}) = -z_{00}$. Величины z_{i0} неотрицательные.

Определение 7. Симплекс-таблица называется *прямо допустимой*, если $z_{i0} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. Базис B , которому соответствует эта таблица, также называется *прямо допустимым*.

Определение 8. Симплекс-таблица называется *двойственно допустимой*, если $z_{0j} \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. Базис B , которому соответствует эта таблица, также называется *двойственно допустимым*.

Назовем симплекс-таблицу *оптимальной*, если она одновременно прямо и двойственно допустима.

В зависимости от знаков величин z_{ij} , z_{j0} , $j \in S' = J \setminus \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$, $i = 1, \dots, m$, выполняется одно из условий:

У1. $z_{0j} \geq 0$, $j \in S'$,

У2. существует $s \in S'$ такой, что $z_{0s} < 0$ и $z_{is} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$,

У3. существует $s \in S'$ такой, что $z_{0s} < 0$ и существует r такой, что $z_{rs} > 0$, $1 \leq r \leq m$.

Знаки оценок замещения z_{0j} , $j = 1, \dots, n$, определяют, является ли текущее б.д.р. оптимальным решением.

Лемма 4 (признак оптимальности). Если симплекс-таблица прямо и двойственно допустима, то текущее базисное допустимое решение \bar{x} является оптимальным решением задачи (1)-(3).

Доказательство. Пусть x – произвольное допустимое решение. Так как $z_{0j} \geq 0$ и $x_j \geq 0$, $j \in S'$, то из (7) следует $w(x) = -z_{00} + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j \geq -z_{00} = w(\bar{x})$. ■

Пример 2. Исследовать на оптимальность решение $x = (0, 0, 1, 1)^T$ задачи

$$\begin{aligned} w(x) &= x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \min \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Решение. Множество столбцов $\{A_j | x_j > 0\} = \{A_3, A_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ матрицы

A линейно независимо. Так как матрица B единичная, то для построения симплекс-таблицы, соответствующей этому базису, достаточно исключить базисные переменные x_3 и x_4 из целевой функции. Получим

$$w(x) = x_1 + x_2 - 2(1 - 2x_1 + x_2) - 3(1 + x_1 - 2x_2) = -5 + 2x_1 + 5x_2.$$

Следовательно, равенства принимают вид

$$\begin{aligned} -w + 2x_1 + 5x_2 &= 5, \\ x_3 + 2x_1 - x_2 &= 1, \\ x_4 - x_1 + 2x_2 &= 1. \end{aligned}$$

И симплекс-таблица может быть представлена так

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	5	2	5	0
x_3	1	2	-1	1
x_4	1	-1	2	1

Так как таблица является прямо ($z_{10} = 1, z_{20} = 1$) и двойственно ($z_{01} = 2, z_{02} = 5, z_{03} = 0, z_{04} = 0$) допустимой, то базисное допустимое решение \bar{x} – оптимальное решение. Заметим, что здесь $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 4$.

Для анализа условий У1 и У2 введем параметризованное семейство векторов $x(t), t \geq 0$, такое, что $x_{\sigma(i)}(t) = \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, i = 1, \dots, m, x_s(t) = t, x_j(t) = 0, j \in S' \setminus s$. Здесь $s \in S'$.

Определение 9. Множество решений системы уравнений и неравенств

$$Ax = b, \quad x_j = 0, \quad j \in G', \quad x_j \geq 0, \quad j \in G, \quad G' \cup G = \{1, \dots, n\}, \quad G' \cap G = \emptyset,$$

называется *гранью* множества допустимых решений (2)-(3) размерности $(n - m - |G'|)$, здесь $(m + |G'|)$ – ранг системы.

Так как \bar{x} – базисно допустимое решение, то, полагая $G' = S'$, получим, что \bar{x} – грань размерности 0. Если $|S'| = n - m - 1$, то получим грань размерности 1, то есть ограниченное или неограниченное ребро.

Из определения б.д.р. следует, что \bar{x} единственное решение системы $Ex_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \geq 0, x_N = 0$.

Пусть $s \in S'$ – произвольная небазисная переменная. Тогда следующая система уравнений и неравенств:

$$\begin{aligned} Ex_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b, \\ x_j &= 0, \quad j \in S' \setminus s, \\ x_B &\geq 0, \quad x_s \geq 0, \end{aligned}$$

определяет ребро множества Q . Перепишем эту систему в эквивалентном виде:

$$Ex_B + B^{-1}A_s x_s = B^{-1}b = \bar{x}_B, \quad x_B \geq 0, \quad x_s \geq 0.$$

Если переменную x_s рассматривать как параметр, то данная система эквивалентна следующей:

$$Ex_B = \bar{x}_B - (B^{-1}A_s)t, \quad x_B \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, из этого представления системы уравнений следует, что коэффициенты замещения симплекс-таблицы, отвечающие небазисной переменной с номером s , образуют направляющий вектор ребра множества Q , выходящего из вершины \bar{x} .

Чтобы выяснить является ли это ребро конечным или бесконечным, рассмотрим следующее параметризованное семейство векторов $x(t), t \geq 0$:

$$\left. \begin{aligned} x_{\sigma(i)}(t) &= \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\ x_s(t) &= t, \\ x_j(t) &= 0, \quad j \in S' \setminus s. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Будем говорить, что вектор $x(t)$ получен элементарным преобразованием б.д.р. \bar{x} , если выполнено (9) и $t \geq 0$.

В зависимости от знака коэффициентов замещения z_{is} возможны следующие варианты.

1. $z_{is} \leq 0, i = 1, \dots, m$. Тогда из соотношений (9) следует, что для любого $t \geq 0$ вектор $x(t) \geq 0$ и, следовательно, ребро, выходящее из вершины \bar{x} с направляющим вектором $B^{-1}A_s = (z_{1s}, \dots, z_{ms})^T$, является неограниченным.

2. Существуют положительные элементы среди коэффициентов замещения s -го столбца симплекс-таблицы. Очевидно, что в данном случае векторы $x(t)$, полученные элементарным преобразованием \bar{x} , имеют неотрицательные компоненты лишь тогда, когда выполняются условия: $0 \leq t \leq \bar{t}$, где

$\bar{t} = \min_{z_{is} > 0} \frac{\bar{x}_{\sigma(i)}}{z_{is}}$. Это означает, что в рассматриваемом случае соответствующее ребро конечно и имеет длину \bar{t} .

Таким образом, параметризованное семейство векторов (9) при изменении t от 0 до бесконечности (в случае 1) и от 0 до \bar{t} (в случае 2), описывает движение из вершины \bar{x} по ребру.

Вернемся к анализу условий У2 и У3. Условие У2 рассматривается в лемме 5, У3 – в лемме 6.

Лемма 5 (о неразрешимости). Если оценка замещения $z_{0s} < 0$, $s \in S'$, и коэффициенты замещения $z_{is} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, то в задаче (1)-(3) не существует оптимального решения.

Доказательство. Из условия леммы следует, что ребро, выходящее из вершины \bar{x} и образованное векторами $x(t)$, $t \geq 0$, бесконечно. Тогда из (7) имеем $w(x(t)) = -z_{00} + z_{0s}t \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$, то есть целевая функция неограниченна снизу. Из критерия разрешимости следует, что в задаче нет оптимальных решений. ■

Лемма 6 (о существовании лучшей вершины). Если оценка замещения $z_{0s} < 0$ и существуют базисные переменные с коэффициентами замещения $z_{is} > 0$, то в задаче (1)-(3) существует б.д.р. с меньшим значением целевой функции.

Доказательство. В данном случае ребро, выходящее из вершины \bar{x} и образованное векторами $x(t)$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, является конечным. Предположим, что его длина $\bar{t} > 0$. Пусть r – индекс базисной переменной такой, что $\bar{t} = \frac{\bar{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min \left\{ \frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0, i \in \{1, \dots, m\} \right\}$. Очевидно, что для $i \in \{1, \dots, m\}$ и $t \leq \bar{t}$ выполняются неравенства $x_{\sigma(i)}(t) = \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t \geq 0$, $x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = 0$, и $x_{\sigma(r)}(t) < 0$ для $t > \bar{t}$.

Покажем, что вектор $x(\bar{t})$ – б.д.р. Действительно, по определению коэффициентов замещения $(z_{1s}, \dots, z_{ms})^T = B^{-1}A_s$. То есть $A_s = B(z_{1s}, \dots, z_{ms})^T = \sum_{i=1}^m z_{is}A_{\sigma(i)}$.

Так как в этом представлении вектора A_s через базисные векторы величина z_{rs} отлична от нуля, то замена столбца $A_{\sigma(r)}$ в базисной матрице B на столбец A_s приводит к невырожденной матрице $B' = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$.

Чтобы проверить это утверждение, допустим противное, то есть пусть матрица B' вырождена. Тогда существует такая нетривиальная линейная комбинация столбцов матрицы B'

$$\sum_{i=1}^{r-1} \beta_i A_{\sigma(i)} + \sum_{i=r+1}^m \beta_i A_{\sigma(i)} + \beta_s A_s = 0,$$

в которой коэффициент $\beta_s \neq 0$. Так как иначе из-за нетривиальности линейной комбинации следовала бы линейная зависимость столбцов матрицы B , что противоречило бы ее невырожденности.

Таким образом, $A_s = \sum_{i \neq r} \left(-\frac{\beta_i}{\beta_s} \right) A_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^m z_{is} A_{\sigma(i)}$. Следовательно,

$$\sum_{i \neq r} \left(z_{is} + \frac{\beta_i}{\beta_s} \right) A_{\sigma(i)} + z_{rs} A_s = 0.$$

Так как $z_{rs} \neq 0$, то получаем нетривиальную линейную комбинацию столбцов матрицы B . Получили противоречие. Следовательно, предположение неверно, и матрица B' невырождена.

Ранее было показано, что компоненты вектора $x(\bar{t})$ неотрицательны. С учетом невырожденности матрицы B' получаем, что $x(\bar{t})$ – б.д.р. и B' его базисная матрица. Так как $w(x(\bar{t})) = -z_{00} + z_{0s} \bar{t} < -z_{00}$, то $x(\bar{t})$ – искомое б.д.р. с меньшим значением целевой функции.

Рассмотрим случай $\bar{t} = 0$. Это означает, что ребро имеет нулевую длину, при движении по которому не происходит смены вершины. Но, как и в предыдущем случае, происходит смена базиса. В силу того, что $z_{rs} > 0$, тривиальное элементарное преобразование б.д.р. \bar{x} в $x(\bar{t}) = x(0) = \bar{x}$ приводит к замене базиса B на B' . ■

Пусть B' – базис, который получается из базиса B заменой столбца $A_{\sigma(r)}$ на столбец A_s , $s \in S'$. В этом случае говорят, что базис B' результат элементарного преобразования базиса B относительно вектора A_s .

Итак, теперь идею алгоритма решения задачи (1)-(3) содержательно можно описать следующим образом. Найдем начальное б.д.р. и проверим какое из трех условий выполняется. Если реализовался первый случай, то в соответствии с леммой 4 это решение оптимально. Во втором случае, как установлено в лемме 5, задача неразрешима. В обоих случаях алгоритм завершает свою работу. И, наконец, при выполнении последнего условия, когда известно, что текущая вершина не оптимальна, при помощи элементарного преобразования получаем новое б.д.р., на котором значение целевой функции не хуже. Если элементарное преобразование нетривиально, то получим соседнюю вершину, на которой значение целевой функции строго меньше, чем на исходной вершине. В противном случае вершина не меняется. Изменяется только способ ее представления, то есть базис. В любом случае решение за-

дачи сводится к анализу новой симплекс-таблицы T' , которую можно было бы построить по тем же правилам, что и исходную таблицу T .

Однако существует более простой способ получения таблицы T' . Вспомним, что исходная таблица состоит из коэффициентов формы (7)-(8), диагональной относительно базисных переменных и переменной $(-w)$, и в новом наборе базисных переменных присутствует переменная x_s , заменяющая переменную $x_{\sigma(r)}$. То есть для получения новой таблицы достаточно выполнить один шаг процедуры Гаусса-Жордана, чтобы исключить x_s из всех, кроме одного, уравнений системы (7)-(8), определяемой старым базисом. Для этого используем уравнение системы с номером r , как единственное уравнение, содержащее исключаемую из базиса переменную $x_{\sigma(r)}$. Разделим эту строку на величину $z_{rs} > 0$, чтобы в позиции (r, s) симплекс-таблицы была 1. Затем к каждой строке с номером $i \neq r$ прибавим модифицированную r -ую строку, умноженную на величину $(-z_{is})$. Выполнив указанные действия, получим симплекс-таблицу T' , в которой переменной x_s соответствует единичный столбец. Будем говорить, что симплекс-таблица T' получена *элементарным преобразованием* симплекс-таблицы T относительно вектора A_s . Таким образом вектор-строки $\alpha_i = (z_{i0}, z_{i1}, \dots, z_{in})$, $i = 0, \dots, m$, таблицы T преобразуются в вектор-строки $\alpha'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \dots, z'_{in})$, $i = 0, \dots, m$, таблицы T' по следующему правилу:

$$\begin{cases} \alpha'_i = \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}} \alpha_r, i \neq r, \\ \alpha'_r = \frac{1}{z_{rs}} \alpha_r. \end{cases} \quad (10)$$

При этом r -ая строка, s -ый столбец и элемент z_{rs} называются ведущими.

Элементы симплекс-таблицы пересчитываются по формулам:

$$\begin{cases} z'_{ij} = z_{ij} - \frac{z_{is} z_{rj}}{z_{rs}}, i \neq r, \\ z'_{rj} = \frac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

В качестве иллюстрации лемм 5 и 6 рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Исследовать на оптимальность решение $\bar{x} = (0, 1, 0, 2, 1)^T$ задачи

$$\begin{aligned} w(x) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 &= 3, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Решение. В этом примере столбцы $(A_2, A_4, A_5) = ((1, -2, 2)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T)$ – линейно независимы. Следовательно, \bar{x} – базисное допустимое решение с базисными переменными $x_2 = 1, x_4 = 2, x_5 = 1$. Построим соответствующую решению \bar{x} симплекс-таблицу. Небазисные переменные здесь x_1 и x_3 . Следовательно, из первого ограничения-равенства сразу получаем

$$x_2 = 1 + x_1 - x_3.$$

Подставив x_2 , выраженное через небазисные переменные, во второе и третье ограничения-равенства, придем к соотношениям

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$-x_1 + 2x_3 + x_4 = 2,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_5 = 1.$$

Осталось исключить базисные переменные из целевой функции:

$$w(x) = -x_1 - x_2 = -x_1 - (1 + x_1 - x_3) = -1 - 2x_1 + x_3.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$-w - 2x_1 + x_3 = 1.$$

Симплекс-таблица принимает вид

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	1	-2	0	1	0
x_2	1	-1	1	1	0
x_4	2	-1	0	2	1
x_5	1	1	0	-2	1

Базис не является вырожденным, так как вектор $(z_{10}, z_{20}, z_{30})^T = (1, 2, 1)^T$ не содержит нулевых элементов. Таблица прямо допустима, но не является двойственно допустимой: $z_{10} = -2 < 0$. И так как $z_{31} = 1 > 0$, то согласно утверждению леммы 6 существует базисное допустимое решение, которое дает меньшее значение целевой функции, чем $w(\bar{x}) = -z_{00} = -1$. Действительно, так как $z_{31} \neq 0$, то можно преобразовать базис, выведя из него столбец A_5 и заменив его на столбец A_1 , то есть получить базис (A_1, A_2, A_4) .

Согласно формулам элементарного преобразования базиса, получим таблицу

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	3	0	0	-3	0
x_2	2	0	1	-1	0
x_4	3	0	0	0	1
x_1	1	1	0	-2	0

с меньшим значением целевой функции $w(\bar{x}') = -z'_{00} = -3$, где $\bar{x}' = (1, 2, 0, 3, 0)^T$. Так как $z'_{03} - 3 < 0$ и в третьем столбце ($j = 3$) нет положительных элементов, то из леммы 5 следует неограниченность снизу целевой функции $w(x)$ на рассматриваемом множестве X .

1.3 Алгоритм симплекс-метода

Сформулируем симплекс-метод в виде следующей последовательности шагов.

Шаг 0. Построить симплекс-таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению, таблица будет прямо допустимой.

Шаг 1. Если симплекс-таблица двойственно допустима, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение).

Шаг 2. Иначе выбрать ведущий столбец s по правилу: $z_{0s} < 0$, $s \in \{1, \dots, n\}$.

Шаг 3. Если $\{i \mid z_{is} > 0, i \in \{1, \dots, m\}\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min \left\{ \frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0, i \in \{1, \dots, m\} \right\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

Шаг 4. Преобразовать симплекс-таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Шаги с 1-го по 4-ый образуют одну итерацию симплекс-метода. Обоснование шага 1 содержится в лемме 4, а шага 3 – в леммах 5 и 6. Из доказательства леммы 6 также следует, что при элементарном преобразовании сохраняется прямо допустимость симплекс-таблицы.

В данном алгоритме не описан 0-ой шаг, а именно, способ построения начальной симплекс-таблицы. Предполагается, что известно начальное б.д.р. Реализация 0-го шага содержится в параграфе 4 при описании двухфазного симплекс-метода.

При выполнении шагов 2 и/или 3 выбор ведущего столбца s и/или ведущей строки r может оказаться неоднозначным. Существуют разные правила выбора ведущего элемента. Ограничимся теми правилами, которые приводят к детерминированному алгоритму решения задач ЛП.

При выборе ведущего столбца используются следующие способы:

а) *правило Данцига*, которое заключается в выборе s с минимальным $z_{0s} < 0$;

б) *правило Блэнда*, которое состоит в выборе наименьшего s такого, что $z_{0s} < 0$.

При выборе ведущей строки используются следующие способы:

а) *правило Блэнда*: выбрать строку r с минимальным номером базисной переменной $\sigma(r)$, удовлетворяющей условиям шага 3;

б) *лексикографическое правило*, описанное в параграфе 3: выбрать строку r , для которой вектор $\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r$ лексикографически минимален среди векторов

$$\left\{ \frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0, i \in \{1, \dots, m\} \right\}.$$

Не всегда выбор ведущего элемента можно свести к последовательному выбору сначала ведущего столбца, а затем ведущей строки. Примером является *правило наибольшего улучшения*, в котором требуется выбрать такой ведущий элемент, для которого достигается максимальное уменьшение целевой функции.

Следующий пример демонстрирует работу описанного алгоритма.

Пример 3. Решить задачу

$$\begin{aligned} w(x) &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \min \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

взяв в качестве исходного решения точку $\bar{x} = (0, 1, 1, 0)^T$.

Решение. Таблица, соответствующая нулевому шагу, может быть построена следующим образом. Так как столбцы $\{A_2, A_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ линейно независимы, то имеем базис $B^0 = (A_2, A_3)$. Выразим базисные переменные x_2 и x_3 из ограничений равенств через небазисные переменные x_1 и x_4 . Получим:

$$\begin{aligned} x_2 - 1/2x_1 + 1/2x_4 &= 1, \\ x_3 + 1/2x_1 + 1/2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Исключим базисные переменные из целевой функции, выразив ее только через небазисные переменные:

$$\begin{aligned} w(x) &= -x_1 - 2(1/2x_1 - 1/2x_4 + 1) - 3(-1/2x_1 - 1/2x_4 + 1) + x_4 = \\ &= -5 - 1/2x_1 + 7/2x_4. \end{aligned}$$

Представим это равенство в удобном виде:

$$-w - 1/2x_1 + 7/2x_4 = 5.$$

Симплекс-таблица имеет такой исходный вид:

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	5	-1/2	0	0	7/2
x_2	1	-1/2	1	0	1/2
x_3	1	1/2	0	1	1/2

Базис не является двойственно допустимым, так как элемент $z_{01} = -1/2$ отрицателен. Рассматриваемый базис невырожденный ($z_{10} = 1, z_{20} = 1$), и, следовательно, значение целевой функции можно улучшить. Взяв в качестве ведущего первый столбец ($s = 1$), находим ведущую строку: $r = 2$, так как только $z_{21} = 1/2 > 0$. Преобразовав исходную таблицу с ведущим элементом z_{21} , получим новый базис $B^1 = (A_1, A_2)$ и таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	6	0	0	1	4
x_2	2	0	1	1	1
x_3	2	1	0	2	1

Так как таблица является двойственно допустимой, то базис B^1 оптимален и в соответствии с таблицей получаем, что $x^* = (2, 2, 0, 0)^T$ и $w(x^*) = -6$, так как $x^* = (z_{20}, z_{10}, 0, 0)^T$, $w(x^*) = -z_{00}$.

Обоснование конечности симплекс-метода зависит от того, является ли задача вырожденной или невырожденной, а также от используемого в алгоритме способа выбора ведущего элемента. В прямо допустимой симплекс-таблице всегда выполняются строгие неравенства $z_{i0} > 0, i = 1, \dots, m$, а в силу выбора ведущего элемента справедливо $z_{0s} < 0, z_{rs} > 0$. Поэтому при элементарном преобразовании таблицы элемент z_{00} обязательно увеличивается, то есть значение целевой функции при переходе к новому б.д.р. строго уменьшается. Это гарантирует неповторяемость встречающихся в ходе алгоритма базисов. И, как следствие, конечность числа итераций. Очевидно, что данный вывод не зависит от используемого способа выбора ведущего элемента.

В вырожденной задаче величина z_{r0} может оказаться равной 0. В лемме 6 отмечалось, что в этом случае элементарное преобразование не приводит к новой вершине, а лишь изменяет форму представления исходной вершины, то есть ее базис. При этом нельзя исключить, что цепочка из нескольких последовательных тривиальных преобразований может привести к уже встречавшемуся базису, то есть алгоритм будет неограниченное число раз повторять данный цикл преобразований. Такое явление называется заикливанием. Этого можно избежать, используя правило Блэнда, а также лексикографиче-

ское правило выбора ведущей строки. Этот вариант симплекс-метода описывается в третьем параграфе. Там же приводится пример, демонстрирующий заикливание. Правила Данцига и наибольшего улучшения заикливание не устраняют.

§ 2. Модифицированный симплекс-метод

В описанной в предыдущем параграфе реализации симплекс-метода на каждой итерации пересчитывается вся симплекс-таблица размера $(m+1) \times (n+1)$. Однако так как она определяется выбором базиса, то при выполнении алгоритма нет необходимости в информации обо всей таблице. Если число столбцов в матрице ограничений значительно больше числа ее строк, то можно понизить трудоемкость симплекс-метода, храня и преобразуя матрицу размера $(m+1) \times (m+1)$. В литературе [7] этот алгоритм известен под названием модифицированного симплекс-метода или алгоритма с обратной матрицей.

Пусть B – произвольный базис канонической задачи (1)-(3),
 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_B & c_N \\ b & B & N \end{pmatrix}$ – расширенная матрица условий задачи, тогда симплекс-таблица T , соответствующая базису B , имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} -c_B B^{-1} b & 0 & c_N - c_B B^{-1} N \\ B^{-1} b & E & B^{-1} N \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$T = M \bar{A}, \quad (11)$$

где $M = \begin{pmatrix} 1 & -c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ – матрица, обратная к расширенной базисной матрице

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & c_B \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Пусть симплекс-таблица T' получена в результате элементарного преобразования симплекс-таблицы T по следующим формулам:

$$z'_{ij} = z_{ij} - \frac{z_{is} z_{rj}}{z_{rs}}, \quad i \neq r,$$

$$z'_{ij} = \frac{z_{rj}}{z_{rs}}, \quad i = r.$$

Введем обозначения $\mu_{ir} = -z_{is} / z_{rs}$, $\mu_{rr} = 1 / z_{rs}$. Тогда $T' = M_{rs}T$, где

$$M_{rs} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \mu_{0r} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \mu_{1r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{mr} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $T' = M_{rs}T = M_{rs}M\bar{A} = M'\bar{A}$, где $M' = M_{rs}M$. Следовательно, достаточно пересчитывать на каждой итерации матрицу M размера $(m+1) \times (m+1)$ и хранить матрицу \bar{A} . Требуемые элементы симплекс-таблицы вычисляются по формуле (11) по мере необходимости на шагах 1-3 симплекс-метода.

§ 3. Лексикографический прямой симплекс-метод

В первом параграфе было отмечено, что в вырожденных задачах при детерминированном правиле выбора ведущего элемента может наблюдаться заикливание алгоритма симплекс-метода, то есть появляется возможность возвращения к базису, который уже встречался. Приведем пример, иллюстрирующий эту ситуацию.

Пример 4. Решить задачу

$$\begin{aligned} w(x) &= -x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \rightarrow \min \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 &= 0, \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 &= 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7. \end{aligned}$$

Решение. Нетрудно заметить, что в качестве исходного можно выбрать базис $B^0 = (A_1, A_2, A_7)$, при этом имеем базисное допустимое решение $\bar{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$. Данное решение, очевидно, вырожденное. Так как базисные переменные x_1, x_2 и x_7 не содержатся в целевой функции и равенства имеют требуемый для построения симплекс-таблицы вид, то сразу получаем симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	0	-1	1	-1	1	0
x_1	0	1	0	1	-2	-3	4
x_2	0	0	1	4	-3	-2	1
x_7	1	0	0	1	1	1	1

Выбираем $s = 3$, $r = 1$ и переходим к базису $B^1 = (A_2, A_3, A_7)$, при этом базисное решение не изменится, так как $z_{01} = 0$:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	1	0	0	-1	-4	5	0
x_3	0	1	0	1	-2	-3	4	0
x_2	0	-4	1	0	5	10	-15	0
x_7	1	-1	0	0	3	4	-3	1

Выбираем $s = 4$, $r = 2$ и переходим к базису $B^2 = (A_3, A_4, A_7)$. Базисное решение вновь не изменится:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	1/5	1/5	0	0	-2	2	0
x_3	0	-3/5	2/5	1	0	1	-2	0
x_4	0	-4/5	1/5	0	1	2	-3	0
x_7	1	7/5	-3/5	0	0	-2	6	1

Здесь можно взять $s = 5$, $r = 1$. Базису $B^3 = (A_4, A_5, A_7)$ соответствует таблица:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	-1	1	2	0	0	-2	0
x_5	0	-3/5	2/5	1	0	1	-2	0
x_4	0	2/5	-3/5	-2	1	0	1	0
x_7	1	1/5	1/5	2	0	0	2	1

с тем же базисным решением.

Теперь возьмем $s = 6$, $r = 2$. Получим базис $B^4 = (A_5, A_6, A_7)$ и таблицу

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	-1/5	-1/5	-2	2	0	0	0
x_5	0	1/5	-4/5	-3	2	1	0	0
x_6	0	2/5	-3/5	-2	1	0	1	0
x_7	1	-3/5	7/5	6	-2	0	0	1

Базисное решение и здесь не изменилось.

Пусть теперь $s = 1$, $r = 1$. Новый базис $B^5 = (A_1, A_6, A_7)$ с соответствующей таблицей и тем же решением:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	0	-1	-5	4	1	0
x_1	0	1	-4	-15	10	5	0
x_6	0	0	1	4	-3	-2	1
x_7	1	0	-1	-3	4	3	0

Выбрав $s = 2$, $r = 2$, приходим к базису $B^6 = (A_1, A_2, A_7) = B^0$, то есть произошёл возврат к исходному базису. Решение получить не удалось.

Для того чтобы гарантировать конечность симплекс-метода в вырожденных задачах, необходимо исключить возможность подобного заикливания. Таким свойством обладает упоминавшееся выше правило Блэнда. Также заикливание можно предотвратить при использовании лексикографической процедуры выбора ведущей строки.

Определение 10. Ненулевой вектор $\alpha = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ лексикографически больше нуля ($\alpha \succ 0$), если первая отличная от нуля компонента положительна, то есть $z_p > 0$, где $p = \min\{i \mid i \in \{1, \dots, n\}, z_i \neq 0\}$.

Пусть $\alpha', \alpha'' \in R^{n+1}$. Говорят, что вектор α' лексикографически больше вектора α'' ($\alpha' \succ \alpha''$), если $\alpha' - \alpha'' \succ 0$. Тем самым на R^{n+1} определено отношение линейного порядка, так что в любой конечной совокупности векторов $\{\alpha^i\}$ имеется лексикографически минимальный вектор, обозначаемый $\text{lex min}\{\alpha^i\}$.

Определение 11. Симплекс-таблица называется *нормальной*, если ее строки $\alpha_i = (z_{i0}, z_{i1}, \dots, z_{in})$, $i = 1, \dots, m$, лексикографически положительны.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 7. Любую прямо допустимую симплекс-таблицу можно преобразовать в нормальную путем перенумерации переменных и соответствующей перестановкой столбцов.

Из определения 11 следует, что нормальная симплекс-таблица является прямо допустимой.

Отличия лексикографического прямого симплекс-метода от симплекс-метода, описанного в параграфе 1, касаются только 0-го и 3-го шагов, остальные шаги остаются без изменений:

Шаг 0'. Начать с нормальной симплекс-таблицы.

Шаг 3'. Если $\{i \mid z_{is} > 0, i \in \{1, \dots, m\}\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}} \alpha_r = \text{lex min} \left\{ \frac{1}{z_{is}} \alpha_i \mid z_{is} > 0, i \in \{1, \dots, m\} \right\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Элементарное преобразование базиса при этом сохраняет нормальность симплекс-таблицы. Действительно, строка α'_r остается лексикографически положительной, так как она получается умножением лексикографически положительного вектора α_r на положительное число $1/z_{rs}$. Для доказательства лексикографической положительности остальных строк α'_i , $i \neq r$, $i = 1, \dots, m$, рассмотрим два случая:

а) если $z_{is} \leq 0$, то $\alpha'_i = \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}} \alpha_r \succ \alpha_i \succ 0$;

б) если $z_{is} > 0$, то в соответствии с правилом выбора ведущей строки (шаг

3') имеем $\frac{1}{z_{is}} \alpha_i \succ \frac{1}{z_{rs}} \alpha_r$, следовательно, $\alpha'_i = z_{is} \left[\frac{1}{z_{is}} \alpha_i - \frac{1}{z_{rs}} \alpha_r \right] \succ 0$.

Лемма 8. В результате одной итерации лексикографического симплекс-метода происходит лексикографическое возрастание нулевой строки $\alpha_0 = (z_{00}, z_{01}, \dots, z_{0n})$.

Из нормальности симплекс-таблиц следует, что на каждой итерации ведущая строка r лексикографически положительна. С учетом неравенств $z_{0s} < 0$ и $z_{rs} > 0$ имеем

$$\alpha_0 - \left(\frac{z_{0s}}{z_{rs}} \right) \alpha_r \succ \alpha_0.$$

Лемма 9. В ходе работы лексикографического симплекс-метода базисы не повторяются, что гарантирует его конечность.

Из леммы 8 следует, что последовательность нулевых строк симплекс-таблиц является лексикографически возрастающей. Поэтому в ходе работы алгоритма симплекс-таблицы, а значит и базисы, не повторяются, что гарантирует конечность лексикографического симплекс-метода.

Пример 5. Рассмотрим пример 4, на котором была продемонстрирована возможность заикливания обычного симплекс-метода. Выбрав базис $B^0 = (A_1, A_2, A_7)$, получим исходную таблицу, которая является нормальной:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	0	0	-1	1	-1	1	0
x_1	0	1	0	1	-2	-3	4	0
x_2	0	0	1	4	-3	-2	1	0
x_7	1	0	0	1	1	1	1	1

Пусть по-прежнему $s = 3$. Здесь $\alpha^1 = (0, 1, 0, 1, -2, -3, 4, 0)$, $\alpha^2 = (0, 0, 1, 4, -3, -2, 1, 0)$ и $\alpha^3 = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Так как $\alpha^3 - \alpha^1 = (1, -1, \dots) \succ 0$ и $\alpha^3 - \alpha^2 / z_{23} = (1, 0, \dots) \succ 0$, то $\alpha^3 \succ \alpha^1$ и $\alpha^3 \succ \alpha^2 / z_{23}$. Таким образом, нужно сравнить α^1 и α^2 / z_{23} . Имеем

$$\alpha^1 - \frac{1}{4}\alpha^2 = (0, 1, \dots) \succ 0.$$

Значит, $\text{lex min}\{\alpha^i / z_{i3} \mid z_{i3} > 0\} = \alpha^2 / z_{23}$ и $r = 2$.

Преобразовав симплекс-таблицу (перейдя к базису $B^1 = (A_1, A_3, A_7)$), получим

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	0	0	1/4	0	1/4	-6/4	5/4	0
x_1	0	1	-1/4	0	-5/4	-10/4	15/4	0
x_3	0	0	1/4	1	-3/4	-2/4	1/4	0
x_7	1	0	-1/4	0	7/4	6/4	3/4	1

Здесь ведущий элемент определяется однозначно: $s = 5$, $r = 3$. Переходя к базису $B^2 = (A_1, A_3, A_5)$, преобразуем симплекс-таблицу. В результате перейдем к таблице (ненужные элементы опущены):

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-w$	1	0	0	0	2	0	2	1
x_1	5/3	1	0	0				
x_3	1/3	0	1	0				
x_5	2/3	0	0	1				

Таблица является прямо и двойственно допустимой. Оптимальное решение получено за две итерации. При этом $x^* = (5/3, 0, 1/3, 0, 2/3, 0, 0)^T$, $w(x^*) = -1$.

§ 4. Метод искусственного базиса

В примерах, рассмотренных ранее, предполагалось, что либо задан исходный допустимый базис, либо было известно базисное допустимое решение.

В этом параграфе рассматривается общий метод решения задачи ЛП в канонической форме, позволяющий на первом шаге найти базисное допустимое решение или установить, что $Q = \emptyset$, а на втором шаге найти оптимальный базис и соответствующее ему решение, либо установить неразрешимость задачи из-за неограниченности целевой функции. При этом не предполагается, что ранг матрицы A равен m .

Без ограничения общности можно считать, что система ограничений-равенств $Ax = b$ записана таким образом, что $b \geq 0$. Этого можно добиться, умножая нужные строки на -1 .

Тогда метод искусственного базиса можно представить в виде следующих шагов.

Шаг 0. Построить симплекс-таблицу для задачи

$$\xi = \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \min \quad (12)$$

$$a_i x + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (13)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n + m, \quad (14)$$

выбрав в качестве базиса $B = (A_{n+1}, \dots, A_{n+m})$. Здесь a_i – это i -ая строка, $i = 1, \dots, m$, матрицы A . Так как матрица B единичная, то для построения таблицы достаточно в целевой функции ξ выразить базисные переменные (искусственный базис) x_{n+i} , $i = 1, \dots, m$, через небазисные переменные x_j , $j = 1, \dots, n$, используя ограничения (13). В результате получим

$$\xi = \sum_{i=1}^m (b_i - a_i x).$$

Следовательно,

$$z_{00} = -\sum_{i=1}^m b_i, \text{ а } z_{0j} = -\sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \quad z_{0j} = 0, \quad j = n + 1, \dots, n + m.$$

При этом симплекс-таблица прямо допустима, а базисное допустимое решение имеет вид $x_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, и $x_{n+i} = b_i$, $i = 1, \dots, m$.

Шаг 1. Прodelать шаги 1)-4) алгоритма симплекс-метода, описанного в пункте 1.3.

Так как целевая функция задачи (12)-(14) ограничена снизу нулем и допустимое множество, задаваемое условиями (13)-(14), не пусто, то задача (12)-(14) всегда разрешима и минимум неотрицателен. Поэтому на первом этапе вычисления могут завершиться только получением прямо и двойствен-

но допустимого базиса. Как только такой базис получен, перейти к следующему пункту.

Шаг 2. Если оптимальное решение $\xi^* > 0$, то КОНЕЦ (исходная задача не имеет допустимых решений: $Q = \emptyset$), иначе удалить из симплекс-таблицы все столбцы, соответствующие искусственным переменным $x_j = 0$, $j = n + 1, \dots, n + m$, и нулевую строку.

Шаг 3. Если базисными переменными являются только переменные исходной задачи x_j , $j \leq n$, то перейти на шаг 7.

Шаг 4. Выбрать строку, соответствующую искусственной переменной x_r , $r < n$.

Шаг 5. Если существует $z_{rs} \neq 0$, $1 \leq s \leq n$, то выполнить элементарное преобразование базиса с ведущим элементом z_{rs} и перейти на шаг 3.

Шаг 6. Если $z_{rs} = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, то удалить r -ую строку из симплекс-таблицы и перейти на шаг 3.

Шаг 7. Добавить нулевую строку в симплекс-таблицу, записав в нее коэффициенты целевой функции основной задачи $w(x)$, выраженной через небазисные переменные. Получена прямо допустимая симплекс-таблица исходной задачи.

Шаг 8. Прodelать шаги 1)-4) алгоритма симплекс-метода, описанного в пункте 1.3.

Шаги 0)-7) описанного выше способа получения базисного допустимого решения обычно называют первым этапом симплекс-метода, а метод в целом – двухэтапным симплекс-методом.

Выполнение шага 6 свидетельствует о линейной зависимости уравнений $Ax = b$, что позволяет удалить часть уравнений. Подобная ситуация возникает, когда ранг матрицы A меньше числа уравнений m .

После выполнения шага 7 имеем прямо допустимую симплекс-таблицу исходной задачи, то есть завершен 0-ой шаг алгоритма пункта 1.3, и можно переходить к его шагам 1)-4). В результате либо установим, что целевая функция $w(x)$ не ограничена снизу, либо получим оптимальное решение.

Следующие примеры иллюстрируют случаи, когда множество ограничений исходной задачи либо несовместно, либо избыточно.

Пример 6. Решить задачу

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &\rightarrow \min \\x_1 + x_4 + 2x_5 &= 1, \\-x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2, \\2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 5.\end{aligned}$$

Решение. Найдем начальное базисное допустимое решение с помощью метода искусственного базиса. Для этого добавим искусственные переменные x_6, x_7, x_8 и получим задачу

$$\begin{aligned} x_6 + x_7 + x_8 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_4 + 2x_5 + x_6 &= 1, \\ -x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + x_7 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_8 &= 0, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 8, \end{aligned}$$

с базисным допустимым решением $x = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 0)^T$. Исключим базисные переменные из целевой функции этой задачи и получим исходную симплекс-таблицу:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	-3	-3	4	0	-3	-4	0	0	0
x_6	1	1	0	0	1	2	1	0	0
x_7	2	0	-1	-1	1	2	0	1	0
x_8	0	2	-3	1	1	0	0	0	1

Таблица не является двойственно допустимой. Выбираем в качестве ведущего элемента $z_{34} = 1$. Преобразовав, получим симплекс-таблицу:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	-3	3	-5	3	0	-4	0	0	3
x_6	1	-1	3	-1	0	2	1	0	-1
x_7	2	-2	2	-2	0	2	0	1	-1
x_4	0	2	-3	1	1	0	0	0	1

Теперь в качестве ведущего элемента выбираем $z_{15} = 2$. После преобразования получим симплекс-таблицу:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	-1	1	1	1	0	0	2	0	1
x_5	1/2	-1/2	3/2	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2
x_7	1	-1	-1	-1	0	0	-1	1	0
x_4	0	2	-3	1	1	0	0	0	1

Таблица прямо и двойственно допустима. Получено оптимальное решение вспомогательной задачи. Так как $\xi^* = -z_{00} = 1 > 0$, то исходная задача неразрешима из-за несовместности ограничений.

Пример 7. Решить задачу

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 - x_3 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= -1, \\ 3x_1 + 2x_3 &= 3, \\ x_j &\geq 0, j=1,2,3. \end{aligned}$$

Решение. Будем искать начальное базисное допустимое решение методом искусственного базиса. Для этого умножим второе ограничение-равенство на -1 и добавим искусственные переменные x_4, x_5 и x_6 . Получим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} x_4 + x_5 + x_6 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_6 &= 3, \\ x_j &\geq 0, j=1, \dots, 6. \end{aligned}$$

с базисным допустимым решением $x = (0, 0, 0, 2, 1, 3)^T$. Исключим базисные переменные x_4, x_5 и x_6 из целевой функции этой задачи:

$$\xi = (2 - x_1 - x_2 - x_3) + (1 - 2x_1 + x_2 - x_3) + (3 - 3x_1 - 2x_3) = 6 - 6x_1 - 4x_3.$$

Данное равенство запишем в принятом виде

$$-\xi - 6x_1 - 4x_3 = -6.$$

Получаем исходную симплекс-таблицу, которая не является двойственно допустимой:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\xi$	-6	-6	0	-4	0	0
x_4	2	1	1	1	0	0
x_5	1	2	-1	1	0	1
x_6	3	3	0	2	0	1

Выбираем ведущий столбец s . Пусть $s = 3$. Выбираем ведущую строку. Получаем $r = 2$ и, следовательно, ведущий элемент $z_{23} = 1$. Переходим к новому базису, которому соответствует следующая симплекс-таблица:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\xi$	-2	2	-4	0	4	0
x_4	1	-1	2	0	1	-1
x_3	1	2	-1	1	0	1
x_6	1	-1	2	0	-2	1

Полученная таблица все еще не двойственно допустима. Выбираем в качестве ведущего элемента z_{32} . Выполнив элементарные преобразования, получим таблицу

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\xi$	0	0	0	0	0	2
x_4	0	0	0	1	1	-1
x_3	3/2	3/2	0	1	0	1/2
x_2	1/2	-1/2	1	0	-1	1/2

Данная таблица прямо и двойственно допустима. Получено оптимальное решение вспомогательной задачи. При этом $\xi^* = -z_{00} = 0$. Поэтому на шаге 2 в таблице произойдет удаление нулевой строки и трех последних столбцов, соответствующих искусственным переменным:

	x_1	x_2	x_3
x_4	0	0	0
x_3	3/2	3/2	1
x_2	1/2	-1/2	0

В числе базисных осталась искусственная переменная x_4 , при этом в строке, соответствующей ей, имеются только нулевые элементы. Значит, эту строку можно удалить. Исходная матрица имеет ранг равный 2. Действительно, если вернуться к предпоследней симплекс-таблице и переписать строку, соответствующую базисной переменной x_4 , в виде равенства $x_4 + x_5 = x_6$, то сразу обнаружим, что третье ограничение-равенство в исходной задаче является суммой первых двух, то есть они линейно зависимы.

После удаления строки в базисе остались только переменные исходной задачи. Переходим на шаг 7. Выразим через небазисные переменные целевую функцию $w(x)$. Из последней симплекс-таблицы имеем равенства

$$\begin{aligned} 3/2x_1 + x_3 &= 3/2, \\ -1/2x_1 + x_2 &= 1/2, \end{aligned}$$

то есть

$$w(x) = -x_1 - 4(1/2 + 1/2x_1) - (3/2 - 3/2x_1) = -7/2 - 3/2x_1.$$

Добавляем нулевую строку $-w - 3/2x_1 = 7/2$ к предыдущей таблице, учитывая, что первая строка вычеркнута,

	x_1	x_2	x_3
$-w$	7/2	-3/2	0
x_3	3/2	3/2	1
x_2	1/2	-1/2	0

Получим прямо допустимую симплекс-таблицу исходной задачи с базисом $B=(A_2, A_3)$ и соответствующим решением $\bar{x}=(0,1/2,3/2)$. Теперь переходим на шаг 8 и ищем оптимальное решение. Так как симплекс-таблица не является двойственно допустимой, то выбираем $s=1$, $r=1$. Преобразуем таблицу с ведущим элементом $z_{11}=3/2$ и окончательно приходим к прямо и двойственно допустимой таблице

	x_1	x_2	x_3
$-w$	5	0	1
x_1	1	0	2/3
x_2	1	1	1/3

из которой следует, что $x^*=(1,1,0)$, $w(x^*)=-5$.

§ 5. Двойственный симплекс-метод

Задача линейного программирования D

$$(b, y) \rightarrow \max$$

$$yA \leq c$$

называется *двойственной* к *прямой* задаче (1)-(3), которую обозначим через P [2, 3, 5-7, 9-11]. Существует глубокая связь между этими задачами. Чтобы выявить ее, проанализируем итоги работы лексикографического симплекс-метода. Как следует из его описания, может быть только два варианта завершения работы алгоритма.

Рассмотрим первый вариант, когда задача P разрешима. Пусть \bar{x} - оптимальное б.д.р. Тогда в оптимальной симплекс-таблице оценки замещения небазисных переменных удовлетворяют условию $c_N - c_B B^{-1}N \geq 0$, а для базисных переменных выполняется тривиальное тождество $c_B - c_B B^{-1}B = 0$. Из приведенных уравнений и неравенств следует, что вектор $\bar{y} = c_B B^{-1}$ является допустимым решением задачи D . Из определения вектора \bar{y} также следуют равенства $(b, \bar{y}) = (b, c_B B^{-1}) = (B^{-1}b, c_B) = (c_B, x_B) = (c, \bar{x})$. Рассмотрим два произвольных допустимых решения x и y прямой и двойственной задач, соответственно. Тогда, $(c, x) \geq (yA, x) = (Ax, y) = (b, y)$. С учетом предыдущих равенств $(c, x) \geq (b, \bar{y}) = (c_B, \bar{x}_B) = (c, \bar{x}) \geq (b, y)$. То есть \bar{y} - оптимальное решение задачи D .

Во втором варианте обнаруживается неразрешимость задачи P . Тогда неразрешима и задача D . Так как в противном случае мы могли бы найти ее оптимальное решение. Для этого необходимо записать двойственную задачу в каноническом виде и применить симплекс-метод для ее решения. По при-

веденной выше схеме найти оптимальное решение задачи P , что невозможно.

Для того чтобы связи между этими задачами стали более ясными и понятными, введем понятие базиса и базисного решения двойственной задачи. Вектор y называется *базисным решением* задачи D , если среди неравенств $yA \leq c$, которые он обращает в равенства, имеется m линейно независимых, а базис состоит из векторов A_j , $j=1, \dots, m$, образующих эти независимые ограничения. Б.д.р. y называется *невырожденным*, если для любого вектора A_j , не входящего в его базис, то есть $j \in S'$, выполняется $yA_j < c_j$. Двойственную задачу назовем *невырожденной*, если все ее б.д.р. являются невырожденными.

Теперь все базисные решения задач P и D можно разбить на пары решений, на которых значения целевых функций совпадают. Если x – базисное решение задачи P с базисом B , то ему соответствует базисное, но недопустимое решение $y = c_B B^{-1}$ задачи D , так как могут нарушаться некоторые из ограничений $yN \leq c$. Верно и обратное утверждение. Очевидно, что выполняются равенства $(c, x) = (c_B, x_B) = (yB, x_B) = (Bx_B, y) = (b, y)$.

Из вышеизложенного следует, что фактически в симплекс-методе на каждой итерации рассматриваются базисные решения прямой и двойственной задач с равными значениями целевых функций. Алгоритм организован таким образом, что на нулевом шаге 1-ой итерации выбирается прямо допустимый базис и затем с помощью элементарных преобразований, сохраняющих прямо допустимость, происходит перебор базисов. В тот момент, когда обнаруживается двойственно допустимый базис или неразрешимость задачи, процесс останавливается.

Теперь мы можем сформулировать идею нового алгоритма, который назовем двойственным симплекс-методом. На нулевом шаге 1-ой итерации выбирается начальный двойственно допустимый базис и затем с помощью элементарных преобразований, сохраняющих двойственную допустимость, происходит перебор базисов. В тот момент, когда обнаруживается прямо допустимый базис или неразрешимость задачи, процесс останавливается.

В приведенном ниже описании алгоритма этого метода предполагается, что используются та же форма симплекс-таблицы и то же элементарное преобразование, что и в параграфе 1. Под $\sigma(i)$, $i=1, \dots, m$, как и прежде, понимается набор номеров базисных столбцов (переменных).

Описание алгоритма двойственного симплекс-метода.

Шаг 0. Начать с двойственно допустимой симплекс-таблицы.

Шаг 1. Если симплекс-таблица прямо допустима, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение).

Шаг 2. Выбрать ведущую строку r по правилу: $z_{r0} < 0$, $r \in \{1, \dots, m\}$.

Шаг 3. Если $\{j \mid z_{rj} < 0, j = 1, \dots, n\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущий столбец s по правилу:

$$\frac{z_{0s}}{|z_{rs}|} = \min \left\{ \frac{z_{0j}}{|z_{rj}|} \mid z_{rj} < 0, j = 1, \dots, n \right\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима, так как $Q = \emptyset$).

Шаг 4. Преобразовать симплекс-таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Замечания.

1. Доказательство того, что двойственная допустимость симплекс-таблицы в результате ее преобразования на шаге 4 сохраняется, может быть вполне аналогично тому, как проводилось ранее доказательство сохранения прямой допустимости в случае прямого симплекс-метода. Таким образом, если в прямом симплекс-методе идет целенаправленный перебор прямо допустимых базисов, то в двойственном симплекс-методе – двойственно допустимых базисов. Цель в обоих случаях одна и та же – найти прямо и двойственно допустимый базис.

2. Если на шаге 3 имеем $z_{rj} \geq 0, j = 1, \dots, n$, то это означает, что задача неразрешима ввиду несовместности ограничений. В самом деле, r -ой строке симплекс-таблицы соответствует уравнение системы (8) $\sum_{j=1}^n z_{rj} x_j = z_{r0}$, из

которого при $x \geq 0$ следует $z_{r0} \geq 0$. С другой стороны, согласно правилу выбора ведущей строки, $z_{r0} < 0$. Эти два противоречащих друг другу неравенства свидетельствуют об отсутствии у системы (8) неотрицательных решений, то есть о несовместности ограничений задачи (1)-(3).

3. Рассмотрим ряд случаев, когда вопрос о нахождении двойственно допустимого базиса решается просто.

а) Предположим, что требуется решить задачу ЛП $\min\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ с неотрицательным вектором c . С помощью введения дополнительных переменных $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ задача может быть преобразована в каноническую форму $\min\{cx \mid Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$. Очевидно, базис, образованный последними m столбцами матрицы $[A, E]$ системы ограничений новой задачи, является двойственно допустимым и итерации двойственного симплекс-метода можно начинать с симплекс-таблицы $\begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ b & A & E \end{bmatrix}$.

б) Может сложиться такая ситуация, когда после получения оптимального решения задачи (1)-(3) и соответствующего прямо и двойственно допустимо-

го базиса B нужно получить оптимальное решение задачи с измененными правыми частями системы ограничений (2). Нетрудно видеть, что для измененной задачи базис B является также двойственно допустимым и может быть использован в качестве начального базиса для решения задачи двойственным симплекс-методом.

в) Прием, использованный в случае а) для получения двойственно допустимой симплекс-таблицы, может быть распространен на ситуации, когда к ограничениям задачи ЛП, для которой известна некоторая двойственно допустимая симплекс-таблица, добавляются новые ограничения. Эта возможность используется при решении задач целочисленного линейного программирования методами отсечения, о чем более подробно речь будет идти в параграфе 3 главы 4.

4. Конечность двойственного симплекс-алгоритма доказывается так же, как и конечность прямого симплекс-метода. Если двойственная задача D невырожденная, то алгоритм конечен при любом уточнении правил выбора ведущего элемента. Отметим, что в случае невырожденной задачи D в каждой двойственно допустимой симплекс-таблице элементы z_{0j} , $j \in S'$, должны быть положительными.

В случае вырожденной задачи конечность двойственного симплекс-метода может быть обеспечена за счет использования тех же способов, что и в случае прямого симплекс-метода, в частности, путем применения некоторого аналога правила Блэнда или лексикографической процедуры. Последний алгоритм приводится в следующем параграфе.

§ 6. Лексикографический двойственный симплекс-метод

Описание метода начнем с симплекс-таблицы, форма которой отличается от использовавшейся ранее.

Пусть B – двойственно допустимый базис, $S' = \{\tau(1), \dots, \tau(l)\}$, $l = n - m$, – множество номеров небазисных переменных, а S – множество номеров базисных переменных. Перепишем соотношения (7) и (8):

$$x_i = z_{i0} + \sum_{j \in S'} z_{ij}(-x_j), \quad i \in S \cup \{0\}. \quad (15)$$

Добавим к системе уравнений (15) тождественные соотношения $x_i = x_i$ для небазисных переменных

$$x_i = (-1)(-x_i), \quad i \in S'. \quad (16)$$

Симплекс-таблица будет состоять из коэффициентов правых частей равенств (15) и (16).

	1	$-x_{m+1}$	\dots	$-x_n$
x_0	z_{00}	z_{01}	\dots	z_{0l}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
x_i	z_{i0}	z_{i1}	\dots	z_{il}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
x_{m+1}	0	-1	\dots	0
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
x_n	0	0	\dots	-1

Пусть $\beta_j = (z_{0j}, z_{1j}, \dots, z_{nj})^T$, $j = 0, 1, \dots, l$, – столбцы, образующие симплекс-таблицу. Тогда система (15), (16) эквивалентна векторному уравнению:

$$(x_0, x_1, \dots, x_n)^T = \beta_0 + \sum_{j \in S'} \beta_j (-x_j). \quad (17)$$

Если $z_{rs} \neq 0$, $r \in S$, $s \in S'$, то возможно элементарное преобразование базиса, при котором базисная переменная x_r заменяется на небазисную переменную $x_{\tau(s)}$. Далее выразим переменную $x_{\tau(s)}$ из r -го уравнения системы (15):

$$x_{\tau(s)} = \frac{1}{z_{rs}} (z_{r0} + \sum_{j \in S', j \neq s} z_{rj} (-x_{\tau(j)}) - x_r)$$

и заменим ее в правой части (17):

$$(x_0, x_1, \dots, x_n)^T = (\beta_0 - \frac{z_{r0}}{z_{rs}} \beta_s) + \sum_{j \in S', j \neq s} (\beta_j - \frac{z_{rj}}{z_{rs}} \beta_s) (-x_{\tau(j)}) + \left(\frac{-1}{z_{rs}} \right) (x_r).$$

Итак, элементарное преобразование базиса приводит к симплекс-таблице со столбцами

$$\begin{cases} \beta'_j = \beta_j - \frac{z_{rj}}{z_{rs}} \beta_s, j \neq s, \\ \beta'_s = \left(\frac{-1}{z_{rs}} \right) \beta_s. \end{cases} \quad (18)$$

Симплекс-таблицу будем называть *нормальной*, если каждый ее столбец β_j , $j = 1, \dots, l$, лексикографически больше нуля.

Описание алгоритма лексикографического двойственного симплекс-метода.

Шаг 0. Начать с нормальной симплекс-таблицы.

Шаг 1. Если симплекс-таблица прямо допустима, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение).

Шаг 2. Иначе выбрать ведущую строку r по правилу: $z_{r0} < 0$, $r \in \{1, \dots, n\}$.

Шаг 3. Если $\{j \mid z_{rj} < 0, j \in \{1, \dots, l\}\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущий столбец s по правилу:

$$\frac{1}{|z_{rs}|} \beta_s = \text{lex min} \left\{ \frac{1}{|z_{rj}|} \beta_j \mid z_{rj} < 0, j \in \{1, \dots, l\} \right\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Шаг 4. Преобразовать симплекс-таблицу, положить $\tau(s) := r$ и перейти на шаг 1.

Замечания.

1. Если на шаге 3 имеем $z_{rj} \geq 0, j = 1, \dots, l$, то ограничения задачи несовместны. Действительно, r -ой строке симплекс-таблицы соответствует уравнение $x_r = z_{r0} + \sum_{j \in S'} z_{rj}(-x_j)$, из которого при $x \geq 0$ следует $x_r < 0$.

2. Покажем, что элементарное преобразование симплекс-таблицы на шаге 4 сохраняет ее нормальность. Согласно правилу выбора ведущего столбца, $z_{rs} < 0$. Так как по условию $\beta_s > 0$, то $\beta'_s = \left(-\frac{1}{z_{rs}}\right) \beta_s > 0$. Для доказательства лексикографической положительности остальных столбцов $\beta'_j, j \neq s, j \in S'$, рассмотрим два случая.

а) Если $z_{rj} \geq 0$, то $\beta'_j - \beta_j = -\frac{z_{rj}}{z_{rs}} \beta_s \geq 0$. Следовательно, $\beta'_j \geq \beta_j > 0$.

б) Если $z_{rj} < 0$, то из (18) следует $\beta'_j = |z_{rj}| \left(\frac{1}{|z_{rj}|} \beta_j - \frac{1}{|z_{rs}|} \beta_s \right) > 0$. Последнее неравенство следует из правила выбора ведущего столбца.

3. Из описания алгоритма следует $z_{r0} < 0, z_{rs} < 0$ и $\beta_s > 0$. Учитывая (18), отсюда получим $\beta_0 - \beta'_0 = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} \beta_s > 0$, то есть $\beta'_0 > \beta_0$. Таким образом, базисы не могут повторяться и, следовательно, метод конечен.

§ 7. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

Приведем геометрическую интерпретацию задач линейного программирования применительно к следующей паре взаимодвойственных задач, которые обозначим, соответственно, через P и D :

$$\begin{array}{ll} (c, x) \rightarrow \min & (b, y) \rightarrow \max \\ Ax = b, & yA \leq c. \\ x \geq 0, & \end{array}$$

Обозначим через $\bar{A}_j = (A_j, c_j)^T, j = 1, \dots, n$, расширенные вектор-столбцы матрицы A , а через $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m, 0)^T$ – расширенный вектор правых частей ограничений прямой задачи.

Определение 12. Множество K , содержащее с любой своей точкой x все точки λx при $\lambda \geq 0$, называется конусом.

Определим линейное преобразование $f_A : R^n \rightarrow R^{m+1}$:

$$f_A(x) = \sum_{j=1}^n \bar{A}_j x_j, \quad x \in R^n. \quad (19)$$

Пусть $K = f_A(R_{\geq 0}^n) = \{u \in R^{m+1} \mid u = \sum_{j=1}^n \bar{A}_j x_j, x \geq 0\}$. Очевидны следующие

свойства множества K :

1. K – выпуклый конус.
2. Вектор $(0, \dots, 0) \in K$ и является его вершиной.
3. K порожден конечным числом векторов $\bar{A}_j, j = 1, \dots, n$, то есть является

множеством точек вида $\sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{A}_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Чтобы пояснить введенное определение конуса K , рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{array}{l} c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \rightarrow \min \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = b_1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{array}$$

Здесь $m = 1, \bar{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ c_j \end{pmatrix}, j = 1, \dots, 4$.

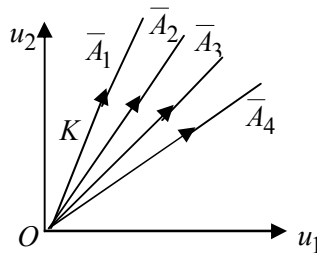


Рис. 1

На рис. 1 приведено множество K для данной задачи. Очевидно, что конус K порожден крайними лучами, образованными векторами \bar{A}_1 и \bar{A}_4 .

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^n \bar{A}_j x_j = (b_1, \dots, b_m, \lambda)^T.$$

Будем считать, что вектор c коэффициентов целевой функции прямой задачи P не является линейной комбинацией векторов $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, так как в противном случае любое допустимое решение является оптимальным. Тогда

$$f_A \left(\left\{ x \mid \sum_{j=1}^n \bar{A}_j x_j = (b, \lambda)^T, \lambda \in R \right\} \right) = \{ u \in R^{m+1} \mid u = \bar{b} + \lambda e_{m+1}, \lambda \in R \}.$$

Обозначим последнее множество через Q . Оно является прямой в пространстве R^{m+1} , которая проходит через точку $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m, 0)^T$ параллельно оси Ou_{m+1} . Так как $f_A(\{x \mid x \geq 0, Ax = b\}) =$

$$= f_A(\{x \mid x \in R^n, x \geq 0\}) \cap f_A \left(\left\{ x \mid \sum_{j=1}^n \bar{A}_j x_j = (b, \lambda)^T, \lambda \in R \right\} \right) = K \cap Q,$$

то образом множества допустимых решений задачи P при отображении f_A является пересечение конуса K и прямой Q .

Таким образом, задача P сводится к поиску «крайней» точки пересечения прямой Q и конуса K , то есть точки с наименьшей последней координатой.

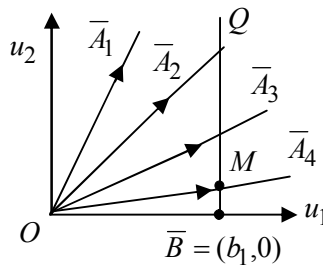


Рис. 2

На рис. 2 точка M – крайняя точка пересечения $K \cap Q$, является образом оптимальных решений рассмотренной выше задачи ЛП.

Приведем интерпретацию задачи D . Пусть

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k u_k = 0 \tag{20}$$

уравнение гиперплоскости, проходящей через начало координат. Направляющий вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1})^T$ гиперплоскости (20) определен с точностью до ненулевого множителя. Будем считать, что $\lambda_{m+1} = -1$. Другими словами, мы не рассматриваем гиперплоскости содержащие ось Ou_{m+1} . Следовательно, существует взаимнооднозначное соответствие между гиперплоскостями, проходящими через ноль, не содержащими ось Ou_{m+1} , и их направляющими векторами $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, -1)^T$. Пусть $y = (y_1, \dots, y_m)$ – допустимое решение задачи D , а Π_y – гиперплоскость, определяемая уравнением

$$\sum_{i=1}^m y_i u_i - u_{m+1} = 0. \quad (21)$$

Подставим \bar{A}_j в (21). Так как y является допустимым решением задачи D , то $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \leq 0$. Поскольку конус K порожден векторами \bar{A}_j , K лежит «над» гиперплоскостью Π_y , то есть по ту же сторону от гиперплоскости, что и вектор $e_{m+1} = (0, \dots, 0, 1)$.

Пусть $\sum_{i=1}^m y_i u_i - u_{m+1} = 0$ – произвольная гиперплоскость, проходящая через O и не содержащая ось Ou_{m+1} . Если конус K располагается «над» гиперплоскостью, то есть для любой точки $u \in K$ справедливо $\sum_{i=1}^m y_i u_i - u_{m+1} \leq 0$, тогда для любого расширенного вектора условий \bar{A}_j выполняется $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$, следовательно, $y = (y_1, \dots, y_m)$ является допустимым решением задачи D .

Итак, геометрическим образом множества допустимых решений задачи D является совокупность гиперплоскостей, содержащих начало координат, не содержащих ось Ou_{m+1} и расположенных «под» конусом K . Это соответствие является взаимнооднозначным и определяется уравнениями (21).

Пусть $u^y \in Q \cap \Pi_y$. Тогда из определения Q и (21) имеем

$$u_{m+1}^y = \sum_{i=1}^m b_i y_i = z(y).$$

Следовательно, значение целевой функции двойственной задачи на допустимом решении равно расстоянию от точки пересечения прямой Q и гиперплоскости Π_y до гиперплоскости $u_{m+1} = 0$.

Таким образом, с геометрической точки зрения двойственная задача заключается в отыскании такой гиперплоскости, которая содержит начало координат, не содержит ось Ou_{m+1} , расположена «под» конусом K и пересекает Q в «наивысшей точке» в смысле порядка на оси Ou_{m+1} .

§ 8. Геометрическая интерпретация прямого симплекс-метода

Рассмотрим б.д.р. \bar{x} задачи P . Пусть B – его базисная матрица, а N , соответственно, небазисная матрица. Обозначим через Π гиперплоскость, натянутую на расширенные вектора базиса $\bar{A}_{\sigma(i)}$, $i=1, \dots, m$, и проходящую через начало координат. Эта гиперплоскость однозначно определяется базисом B и ее направляющий вектор \bar{y} есть решение следующей системы уравнений

$$yA_{\sigma(i)} = c_{\sigma(i)}, \quad i=1, \dots, m,$$

следовательно, $y = c_B B^{-1}$. В параграфе 1 показано, что оценки замещения симплекс-таблицы, соответствующей б.д.р. \bar{x} , образуют вектор $c_N - c_B B^{-1} N$. Таким образом, если на первом шаге итерации симплекс-таблица, соответствующая б.д.р. \bar{x} , является двойственно допустимой, то есть $c_N - \bar{y}N \geq 0$, то вектор \bar{y} является допустимым решением двойственной задачи, тогда \bar{x} и \bar{y} – оптимальные решения. Их геометрическая интерпретация содержится в предыдущем параграфе.

Если существует номер s такой, что $c_s - \bar{y}A_s < 0$, то это означает, что \bar{y} недопустимое решение двойственной задачи, то есть симплекс-таблица не двойственно допустима, а \bar{x} неоптимальное решение. Геометрически это эквивалентно тому, что вектор \bar{A}_s расположен ниже гиперплоскости Π . Рассмотрим конус K_s , натянутый на вектора $\bar{A}_{\sigma(i)}$, \bar{A}_s :

$$K_s = \left\{ u \mid u = \sum_{i=1}^m x_{\sigma(i)} \bar{A}_{\sigma(i)} + x_s \bar{A}_s, x \geq 0 \right\}. \quad \text{Если коэффициенты замещения}$$

$z_{is} \leq 0$, $i=1, \dots, m$, где $A_s = \sum_{i=1}^m z_{is} \bar{A}_{\sigma(i)}$, то множество $K_s \cap Q$ содержит луч,

исходящий из точки \bar{x} . Это следует из существования параметрического семейства векторов $x(t)$, которое использовалось при обосновании симплекс-метода. В этом случае задача (1)-(3) не имеет оптимального решения. Заметим, что это возможно тогда и только тогда, когда конус K_s содержит полуось Ou_{m+1} .

Если конус K_S не содержит полуось Ou_{m+1} , то тогда $\{i \mid z_{iS} > 0, i \in \{1, \dots, m\}\} \neq \emptyset$ и множество $K_S \cap Q$ является отрезком, который в вырожденном случае может оказаться точкой. Если задача (1)-(3) невырожденная, то отрезок $K_S \cap Q$ отличен от точки. Его *крайняя верхняя точка* является *образом базисного допустимого решения* \bar{x} и лежит на грани K_S , образованной векторами $\bar{A}_{\sigma(i)}$, так как $yA_{\sigma(i)} = c_{\sigma(i)}, i = 1, \dots, m$. Это означает, что эта грань есть пересечение конуса K_S с гиперплоскостью Π . Тогда нижняя точка отрезка $K_S \cap Q$ является *геометрическим образом нового базисного допустимого решения* $x(B')$ и лежит на грани, порожденной векторами $\bar{A}_{\sigma(1)}, \dots, \bar{A}_{\sigma(r-1)}, \bar{A}_S, \bar{A}_{\sigma(r+1)}, \dots, \bar{A}_{\sigma(m)}$, другими словами, B' – новый базис, образованный векторами $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r-1)}, A_S, A_{\sigma(r+1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$. Точки пересечения конуса K_S и прямой Q являются *геометрическими образами решений*, полученных из *базисно допустимого решения* \bar{x} *элементарным преобразованием, которое определяется вектором* A_S .

ГЛАВА 4.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Большинство существующих методов в нелинейном программировании можно разделить на прямые методы и методы, использующие понятие двойственности.

Прямые методы имеют дело с исходной задачей. Они порождают последовательность допустимых решений, обеспечивая монотонное убывание минимизируемой функции, и дают приближенное решение задачи, если итерационный процесс остановить на произвольном шаге. Их основной недостаток – трудности с доказательством глобальной сходимости.

Двойственные методы в этом отношении более сильные. Глобальную сходимость обычно удается получить легче, чем для прямых методов. Их главный недостаток в том, что они не дают приближенного допустимого решения, если метод остановить на произвольном шаге.

В данной главе только методы штрафа относятся к двойственным, остальные методы являются прямыми.

§ 1. Метод возможных направлений

Методы безусловной оптимизации можно использовать для решения экстремальных задач условной оптимизации. Для этого необходимо доработать эти методы таким образом, чтобы учитывались ограничения задачи. В этом параграфе рассмотрен один из таких методов – *метод возможных направлений*.

Пусть имеется точка, удовлетворяющая ограничениям задачи. Выберем возможное направление движения, то есть такой ненулевой вектор, что

1. малое перемещение в этом направлении не выводит за пределы множества допустимых решений;

2. целевая функция строго убывает в этом направлении.

Затем осуществляется перемещение в выбранном направлении до получения нового допустимого решения с лучшим значением целевой функции. Представленный ниже алгоритм был разработан голландским математиком Зойтендейком [2, 3, 6], который предложил выбирать направление спуска из пересечения конусов возможных направлений и направлений убывания целевой функции. Особенность метода заключается в учете нелинейности ограничений и в сравнении направлений не только по локальной скорости убывания целевой функции, но и по длинам шагов, которые удастся сделать вдоль них.

Представленный ниже алгоритм предназначен для поиска экстремума при наличии ограничений только типа неравенств. Рассмотрим задачу

$$\min f(x) \tag{1}$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

$$x \in R^n, \tag{3}$$

где $f(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1, \dots, m$, – гладкие выпуклые функции. Вводя дополнительные переменную и ограничение, функционал задачи можно сделать линейным:

$$\begin{aligned} \min y \\ f(x) \leq y, \\ \varphi_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, m, \\ x \in R^n. \end{aligned}$$

Поэтому без ограничения общности будем считать, что $f(x) = \langle c, x \rangle$. Пусть, как и прежде, $Q = \{x \mid \varphi_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m\}$ – множество допустимых решений задачи (1)-(3). Обозначим через $I(x) = \{i \mid \varphi_i(x) = 0, i=1, \dots, m\}$ множество ограничений активных в точке x .

Предположим, что выполняется условие Слейтера [2, 3, 6], то есть существует точка \tilde{x} такая, что $\varphi_i(\tilde{x}) < 0$, $i=1, \dots, m$.

Ненулевой вектор p назовем возможным направлением для множества Q из точки x , если найдется $\alpha_0 > 0$ такое, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$ точка $(x + \alpha p)$ принадлежит Q .

Ненулевой вектор p является направлением спуска для множества Q из точки x , если p – возможное направление из этой точки и $\langle c, p \rangle < 0$.

Для фиксированной точки $x \in Q$ рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования

$$\xi^* = \min \xi \tag{4}$$

$$\langle c, p \rangle \leq \xi, \tag{5}$$

$$\langle \varphi'_i(x), p \rangle \leq \xi, \quad i \in I(x), \tag{6}$$

$$|p_l| \leq 1, \quad l=1, \dots, n. \tag{7}$$

Условия (7) называются условиями нормировки. Нулевое решение $p=0, \xi=0$ является допустимым решением вспомогательной задачи и, значит, $\xi^* \leq 0$. Из условий (5) и (7) следует, что целевая функция (4) ограничена снизу на множестве допустимых решений. Тогда из критерия разрешимости для задач линейного программирования (теорема 3.2) следует, что найдется хотя бы одно оптимальное решение (p^*, ξ^*) задачи (4)-(7).

Предположим, что $\xi^* < 0$. Тогда $\langle c, p^* \rangle \leq \xi^* < 0$ и $\langle \varphi'_i(x), p^* \rangle \leq \xi^* < 0$, $i \in I(x)$. Следовательно, $p^* \neq 0$ и для любого $i \in I(x)$ имеем

$$\varphi_i(x + \alpha p^*) = \varphi_i(x + \alpha p^*) - \varphi_i(x) = \langle \varphi'_i(x), p^* \rangle \alpha + o(\alpha) \leq \alpha(\xi^* + o(\alpha)/\alpha) < 0$$

для всех достаточно малых $\alpha > 0$. Если $i \notin I(x)$, то есть $\varphi_i(x) < 0$, то в силу непрерывности функции φ_i неравенство $\varphi_i(x + \alpha p^*) < 0$ будет выполняться

для всех достаточно малых $\alpha > 0$. Поэтому найдется $\alpha_0 > 0$ такое, что $(x + \alpha p^*) \in Q$ для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$, и, следовательно, вектор p^* является возможным направлением для множества Q из точки x . Из неравенства (5) получим, что p^* является также и направлением спуска. Следовательно,

$$f(x + \alpha p^*) - f(x) = \langle c, p^* \rangle \alpha \leq \xi^* \alpha < 0.$$

Если $\xi^* = 0$, то нельзя утверждать, что p^* будет возможным направлением или направлением спуска в точке x . Например, может оказаться, что $\langle c, p^* \rangle = 0$ или $\varphi'_i(x) = 0$ для некоторого $i \in I(x)$.

В случае общей задачи нелинейного программирования без дополнительных условий типа выпуклости равенство $\xi^* = 0$ является лишь необходимым условием минимума. Для задачи выпуклого программирования (1)-(3) при выполнении условия Слейтера последнее равенство является также и достаточным условием оптимальности.

Теорема 1 (критерий оптимальности). Пусть (p^*, ξ^*) – оптимальное решение вспомогательной задачи для $x^* \in Q$. Тогда $\xi^* = 0$, если и только если, x^* является оптимальным решением задачи (1)-(3).

Доказательство. Покажем достаточность. Пусть x^* – оптимальное решение вспомогательной задачи (4)-(6). Предположим, что $\xi^* < 0$, тогда $p^* \neq 0$. Рассмотрим вектор $(x^* + \alpha p^*)$ и выберем значение $\alpha = \alpha^*$ следующим образом. Если $i \in I(x^*)$, то $\langle \varphi'_i(x^*), p^* \rangle < 0$. Следовательно, $\varphi_i(x^* + \alpha p^*) < 0$ при всех $\alpha \in (0, \alpha_i)$ для достаточно малого $\alpha_i > 0$.

Если $i \notin I(x^*)$, то есть $\varphi_i(x^*) < 0$, то в силу непрерывности функции $\varphi_i(x)$ неравенство $\varphi_i(x^* + \alpha p^*) < 0$ будет справедливо при всех $\alpha \in (0, \alpha_i)$ для достаточно малого $\alpha_i > 0$. Положим $\alpha^* = \min_{i=1, \dots, m} \{\alpha_i\}$. Тогда для любого $\alpha \in (0, \alpha^*)$ вектор $(x^* + \alpha p^*)$ является допустимым решением задачи (1)-(3). Из условия $\langle c, p^* \rangle \leq \xi^* < 0$ получим $f(x^* + \alpha p^*) < f(x^*)$ при $\alpha \in (0, \alpha^*)$, что противоречит оптимальности x^* .

Докажем необходимость. Пусть x^* не является оптимальным решением задачи (1)-(3). Тогда существует $x \in Q$, для которого

$$f(x) - f(x^*) = \langle c, x - x^* \rangle < 0.$$

Пусть $p = x - x^*$. Тогда $\langle c, p \rangle < 0$. Если ограничение φ_i активно в точке x^* , то $\varphi_i(x^*) = 0$. Тогда из неравенства для гладких выпуклых функций теоремы 1.4 имеем

$$\varphi_i(x) \geq \varphi_i(x^*) + \langle \varphi_i'(x^*), x - x^* \rangle$$

и допустимости вектора x получим

$$\langle \varphi_i'(x^*), p \rangle \leq 0. \quad (8)$$

Из условия Слейтера следует существование вектора \tilde{x} , для которого $\varphi_i(\tilde{x}) < 0$, $i = 1, \dots, m$. Пусть $\tilde{p} = \tilde{x} - x^*$. Если $i \in I(x^*)$, то аналогично (8) имеем

$$\langle \varphi_i'(x^*), \tilde{p} \rangle < 0.$$

Выберем $p^* = p + \alpha \tilde{p}$. Тогда при достаточно малом α справедливо $\langle c, p^* \rangle < 0$ и $\langle \varphi_i'(x^*), p^* \rangle < 0$ для $i \in I(x^*)$. Отсюда непосредственно вытекает, что $\xi^* < 0$. ■

Если в решении (p^*, ξ^*) задачи (4)-(7) величина $\xi^* < 0$ мала по абсолютной величине, то это может привести к замедлению скорости сходимости метода возможных направлений. Чтобы избежать этого, следует изменить множество номеров $I(x)$ в ограничении (6). Опишем один из таких подходов, в котором используется множество номеров $\{i \mid -\delta < \varphi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$, где δ – положительное число. Другими словами, это множество номеров ограничений задачи (1)-(3), которые в точке x выполняются как равенства с точностью до $\delta > 0$.

Приведем описание этой модификации метода возможных направлений.

Пусть $\delta_0 > 0$ и $x^0 \in Q$ – некоторое начальное приближение. Допустим, что известно k -ое приближение $x^k \in Q$ и $\delta_k > 0$. Введем множества номеров

$$I^k = I(x^k, \delta_k) = \{i \mid -\delta_k < \varphi_i(x^k) \leq 0, i = 1, \dots, m\}, k = 0, 1, \dots,$$

$$I_0^k = \{i \mid \varphi_i(x^k) = 0, i = 1, \dots, m\}, k = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} \xi_k &= \min \xi \\ \langle c, p \rangle &\leq \xi, \\ \langle \varphi_j'(x^k), p \rangle &\leq \xi, \quad j \in I^k, \\ |p_l| &\leq 1, \quad l = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Обозначим эту задачу $P(x^k, I^k)$. Приведем описание одной итерации метода возможных направлений. Пусть (p_k, ξ_k) – оптимальное решение задачи $P(x^k, I^k)$. Рассмотрим три случая:

1. Если $\xi_k \leq -\delta_k$, то полагаем $\delta_{k+1} = \delta_k$.
2. Если $-\delta_k < \xi_k < 0$, то полагаем $\delta_{k+1} = \delta_k/2$.
3. Если $\xi_k = 0$, то найдем решение $(\bar{p}_k, \bar{\xi}_k)$ задачи $P(x^k, I_0^k)$. При $\bar{\xi}_k = 0$ вектор x^k согласно критерию оптимальности является оптимальным решением задачи (1)-(3). Если же $\bar{\xi}_k < 0$, то полагаем

$$\delta_{k+1} = \delta_k/2, p_k = \bar{p}_k.$$

Как уже упоминалось выше, в случае $\xi_k = 0$ нельзя утверждать, что вектор \bar{p}_k является направлением спуска. Поэтому, решив задачу $P(x^k, I_0^k)$, на основании критерия оптимальности можно оценить является ли оптимальным текущее приближение x^k . Если $\bar{\xi}_k < 0$, то в качестве направления спуска выбирается вектор \bar{p}_k .

Длина шага α_k определяется по следующей схеме. Пусть α_{k_i} – наименьший положительный корень уравнения $\varphi_i(x^k + \alpha p_k) = 0$. Тогда полагаем $\alpha_k = \min_i \alpha_{k_i}$ и

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p_k, I^{k+1} = I(x^{k+1}, \delta_{k+1}).$$

Теорема 2. Пусть $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, – гладкие выпуклые функции, выполнено условие Слейтера и множество Q ограничено. Тогда

1. последовательность $\{f(x^k)\}_{k \in N}$ сходится к величине $f^* = \min_{x \in Q} f(x)$, то есть $f(x^k) = \langle c, x^k \rangle \rightarrow f^*$ при $k \rightarrow \infty$;
2. любая предельная точка x^* последовательности $\{x^k\}_{k \in N}$ есть точка минимума функции $f(x)$ на множестве допустимых решений Q .

Доказательство. По построению последовательность $\{f(x^k)\}_{k \in N}$ невозрастающая, множество Q ограниченное, тогда существует предел $\hat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k)$ и

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Величина δ_k на каждом шаге либо делится пополам, либо остается без изменения. Покажем, что $\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$. Предположим противное, то есть $\delta > 0$. Тогда найдется K_0 такое, что $\delta_k = \delta$ и $\xi_k \leq -\delta$ для всех $k > K_0$. Другими словами, начиная с номера K_0 в алгоритме всегда реализуется первый случай $\delta_k = \delta$. Выберем некоторую сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_j}, p_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow (x^*, p^*)$. Такая подпоследовательность существует в виду ограниченности множества Q и условия нормировки (7). Пусть

$$I^* = I(x^*, \delta) = \{i \mid -\delta < \varphi_i(x^*) \leq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Тогда при некотором $K_1 > K_0$ для всех $k_j > K_1$ справедливо $-\delta = -\delta_{k_j} < \varphi_i(x^{k_j}) \leq 0$ для $i \in I^*$. Это означает, что $I^* \subseteq I^{k_j}$ для достаточно больших k_j . Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle c, p_{k_j} \rangle &\leq \xi_{k_j} \leq -\delta, \\ \langle \varphi'_i(x^{k_j}), p_{k_j} \rangle &\leq \xi_{k_j} \leq -\delta, i \in I^*. \end{aligned}$$

Тогда из непрерывности функций $\varphi'_i(x)$ следует, что $\langle \varphi'_i(x^*), p^* \rangle \leq -\delta$ для $i \in I^*$. С другой стороны, $\varphi_i(x^*) \leq -\delta$ для $i \notin I^*$. Отсюда вытекает, что существует $\alpha^* > 0$ такое, что $\varphi_i(x^* + \alpha^* p^*) < 0$ для $i \notin I^*$. С учетом непрерывности функций φ_i , $i \in I$, это означает, что $\varphi_i(x^{k_j} + \alpha^* p_{k_j}) < 0$ для достаточно больших k_j и $i \in I$. Таким образом, $\alpha_{k_j} > \alpha^*$. Тогда $f(x^{k_j}) - f(x^{k_j+1}) = -\alpha_{k_j} \langle c, p_{k_j} \rangle > \alpha^* \delta > 0$, что противоречит (9). Следовательно, $\delta = 0$.

Покажем, что $\hat{f} = f^*$. Пусть $t_1 < t_2 < \dots < t_j < \dots$ – номера итераций, на которых происходит дробление величины δ_k . Из неравенств $-\delta_{t_j} < \xi_{t_j} \leq 0$ следует, что $\lim_{t_j \rightarrow \infty} \xi_{t_j} = 0$. Можно считать, что $x^{t_j} \rightarrow x^*$ при $t_j \rightarrow \infty$. Пусть $\hat{f} = f(x^*) > f^*$. Тогда из критерия оптимальности следует, что существуют p^* , ξ^* , где $\xi^* < 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \langle c, p^* \rangle &\leq \xi^*, \\ \langle \varphi'_i(x^*), p^* \rangle &\leq \xi^*, i \in I_0^* = \{i \mid \varphi_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, найдется $\sigma > 0$ такое, что $\varphi_i(x^*) < -\sigma$ для $i \notin I_0^*$. Из непрерывной дифференцируемости функций $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, следует, что найдется номер K такой, что для всех $t_j > K$ справедливы следующие неравенства:

$$\langle c, p^* \rangle < \xi^* / 2, \quad (10)$$

$$\langle \varphi'_i(x^{t_j}), p^* \rangle < \xi^* / 2, \quad i \in I_0^*, \quad (11)$$

$$\varphi_i(x^{t_j}) < -\sigma, \quad i \notin I_0^*. \quad (12)$$

Поскольку $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то $-\sigma \leq -\delta_{t_j}$ для достаточно больших t_j . Из последнего неравенства и (12) имеем $I^{t_j} \subseteq I_0^*$ для всех t_j больших некоторого $K_1 > K$. Отсюда, с учетом (10), (11) и выбора p^* , получаем

$$\langle c, p^* \rangle < \xi^* / 2,$$

$$\langle \varphi'_i(x^{t_j}), p^* \rangle < \xi^* / 2, \quad i \in I^{t_j},$$

$$\|p_l^*\| \leq 1, \quad l = 1, \dots, n.$$

Таким образом,

$$\xi_{t_j} < \xi^* / 2 < 0$$

для любого $t_j > K_1$, что противоречит сходимости последовательности $\{\xi_{t_j}\}_{j \in N}$ к нулю.

Следовательно,

$$\hat{f} = f(x^*) = f^* = \min_{x \in Q} f(x).$$

Поскольку $f(x^k) > f(x^{k+1})$, то для любой предельной точки \bar{x} последовательности $\{x^k\}_{k \in N}$ имеет место равенство $f(\bar{x}) = f(x^*)$. ■

§ 2. Метод Келли или метод секущих плоскостей

Данный метод используется для решения задач выпуклого программирования вида (1)-(3). По-прежнему предполагается, что $f, \varphi_i \in C^1$, $i = 1, \dots, m$. Как и в §1 без ограничения общности считаем, что $f(x) = (c, x)$, и далее ограничимся изучением выпуклых задач вида:

$$(c, x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Пусть в задаче существует оптимальное решение x^* , и множество допустимых решений задачи Q содержится в многогранном множестве $Q^0 = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Приведем описание k -ой итерации *метода Келли*, где $k = 0, 1, 2, \dots$

Итерация k .

1. Решаем задачу ЛП (линейного программирования)

$$(c, x) \rightarrow \min,$$

$$x \in Q^k,$$

где Q^k – текущее многогранное приближение множества $Q \subseteq Q^k$.

Пусть x^k – оптимальное решение этой задачи. Если x^k – допустимое решение задачи (1)-(3), то найдено ее оптимальное решение. На этом алгоритм завершает свою работу. В противном случае переходим к выполнению следующего шага.

2. Выберем ограничение с номером i_k , для которого величина $\varphi_{i_k}(x^k) > 0$ максимальна. Перейдем к выполнению следующей итерации с новым многогранным приближением $Q^{k+1} = Q^k \cap \{x \mid \varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq 0\}$ множества допустимых решений Q задачи (1)-(3).

Корректность определения множества Q^{k+1}

1. Так как ограничение $\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq 0$ линейно, то множество Q^{k+1} является многогранным.

2. Поскольку множество Q^k и функция φ_{i_k} выпуклые, то $\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq \varphi_{i_k}(x)$ для всех $x \in Q^k$ (теорема 1.4). Тогда из неравенства $\varphi_{i_k}(x) \leq 0, x \in Q$, следует включение $Q \subseteq Q^{k+1}$. Другими словами, ограничение $\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) \leq 0$ является отсечением, которое позволяет исключить точку x^k из множества допустимых решений. Следовательно, гиперплоскость $\varphi_{i_k}(x^k) + (\varphi'_{i_k}(x^k), x - x^k) = 0$ строго отделяет [2, 3] точку x^k от множества Q . Поэтому она называется *секущей плоскостью*.

Если алгоритм останавливается через конечное число шагов, то текущее приближение – оптимальное решение задачи. Рассмотрим случай, когда последовательность $\{x^k\}_{k \in N}$ бесконечна.

Теорема 3. Любая предельная точка последовательности $\{x^k\}_{k \in N}$, порожденная методом секущих плоскостей, есть оптимальное решение задачи.

Доказательство. Последовательность $\{(c, x^k)\}_{k \in N}$ монотонно неубывающая и ограничена сверху, так как существует оптимальное решение. Поэтому, без ограничения общности считаем, что последовательность $\{x^k\}_{k \in N}$ ограничена и сходится к \bar{x} . Выберем произвольное ограничение с номером i , $i \in \{1, \dots, m\}$. Пусть $\{x^k\}_{k \in T}$, где $T \subseteq N$, – подпоследовательность элементов, для которых секущая плоскость порождалась с помощью i -го ограничения. Возможны два случая.

1. Множество T – конечное, тогда найдется номер k_0 такой, что $\varphi_i(x^k) \leq 0$ для всех $k \geq k_0$. Поэтому $\varphi_i(x^k) \rightarrow \varphi_i(\bar{x}) \leq 0$ при $k \rightarrow \infty$.

2. Множество T – бесконечное, тогда для любого $k' > k$ выполняется $\varphi_i(x^k) + (\varphi'_i(x^k), x^{k'} - x^k) \leq 0$. Следовательно, $\varphi_i(x^k) \leq \|\varphi'_i(x^k)\| \|x^{k'} - x^k\|$. Так как $\|x^{k'} - x^k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, что следует из сходимости последовательности, то $\|\varphi'_i(x^k)\| \rightarrow \|\varphi'_i(\bar{x})\|$ при $k \rightarrow \infty$, $\varphi_i \in C^1(R^n)$.

Таким образом, $\varphi_i(x^k) \rightarrow \varphi_i(\bar{x}) \leq 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, \bar{x} – допустимое решение задачи в силу произвольного выбора i . Но для любого k имеем $(c, x^k) \leq (c, x^*)$, следовательно, $(c, \bar{x}) \leq (c, x^*)$. То есть \bar{x} – оптимальное решение задачи. ■

§ 3. Первый (или циклический) алгоритм Гомори

В данном параграфе рассматривается алгоритм решения задачи *целочисленного линейного программирования* (ЦЛП). Постановка такой задачи получается из задачи линейного программирования добавлением условий целочисленности переменных. Сформулируем идею алгоритма решения таких задач. Рассмотрим разрешимую задачу ЦЛП. Известно [10], что выпуклую оболочку множества допустимых решений задачи ЦЛП можно описать конечной системой линейных ограничений. Очевидно, что вершины соответствующего многогранного множества содержатся среди допустимых решений задачи ЦЛП. Далее применяется один из вариантов симплекс-метода. Полученное таким способом оптимальное базисное допустимое решение является оптимальным решением исходной задачи ЦЛП. Существенный недостаток такого способа решения целочисленных задач связан с трудностями, возникающими при построении конечной системы линейных ограничений, определяющих выпуклую оболочку [10].

Данциг предложил более простой подход, основанный на использовании линейной релаксации задачи ЦЛП, получаемой удалением условий целочисленности. Если при решении линейной задачи с помощью симплекс-метода полученное оптимальное б.д.р. является целочисленным, то оно и есть искомого оптимальное решение задачи ЦЛП. В противном случае генерируется по определенным правилам новое линейное ограничение, которое называется отсечением, и оно добавляется к ограничениям задачи ЦЛП. Решаем новую линейную релаксацию. И так далее. Поступая подобным образом, удается отсечь те части многогранника линейной релаксации исходной задачи, которые не содержат целочисленных допустимых решений исходной задачи. При этом оптимальное целочисленное решение может быть получено раньше, чем стягивающиеся допустимые области линейных релаксаций сожмутся до размеров выпуклой оболочки.

3.1. Задача ЦЛП, отсечение Гомори

Приведем постановку задачи ЦЛП, которую далее будем обозначать IP:

$$\begin{aligned} cx &\rightarrow \min \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0, \\ x_j &- \text{целое, } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Множество допустимых решений этой задачи будем обозначать как Q_{IP} . ЛП-релаксация задачи IP совпадает с задачей ЛП в канонической форме (3.1)-(3.3).

Пусть x^0 – оптимальное решение ЛП-релаксации задачи IP. Если $x^0 \in Z^n$, то x^0 – оптимальное решение задачи IP. Иначе в соответствии с описанным выше рецептом следует добавить к ЛП-релаксации новое ограничение такое, что:

- x^0 этому ограничению не удовлетворяет (отсекается);
- все допустимые решения задачи ЦЛП остаются допустимыми решениями новой задачи ЛП.

Опишем способ построения отсечений, впервые реализованный Гомори. Предположим, что оптимальное решение ЛП-релаксации получено с помощью двойственного симплекс-метода, изложенного в главе 3. Так как решение оказалось нецелочисленным, то среди уравнений (3.15), образующих оптимальную симплекс-таблицу, найдется такое уравнение, в котором значение базисной компоненты z_{i0} является нецелым. Рассмотрим это уравнение, опустив в нем для упрощения индекс i :

$$x_p = z_{p0} - \sum_{j \in S'} z_{pj} x_j \quad (13)$$

Для $x \in Q_{IP}$ имеем

$$x_p + \sum_{j \in S'} \lfloor z_{pj} \rfloor x_j \leq z_{p0}.$$

В силу целочисленности x_p и x_{pj} на множестве Q_{IP} имеем

$$x_p + \sum_{j \in S'} \lfloor z_{pj} \rfloor x_j \leq \lfloor z_{p0} \rfloor.$$

Из (13) получим

$$z_{p0} - \sum_{j \in S'} z_{pj} x_j + \sum_{j \in S'} \lfloor z_{pj} \rfloor x_j \leq \lfloor z_{p0} \rfloor.$$

Преобразуем

$$\sum_{j \in S'} (\lfloor z_{pj} \rfloor - z_{pj}) x_j \leq \lfloor z_{p0} \rfloor - z_{p0}$$

или

$$\sum_{j \in S'} (-f_{pj}) x_j \leq -f_{p0},$$

где f_{pj} – дробная часть $z_{pj} = \lfloor z_{pj} \rfloor + f_{pj}$, $0 \leq f_{pj} < 1$.

Если к задаче IP добавить ограничения

$$u = -f_{p0} - \sum_{j \in S'} (-f_{pj}) x_j,$$

$$u \geq 0, u \in Z,$$

то получим эквивалентную задачу.

3.2. Первый алгоритм Гомори

Приведем описание *первого или циклического алгоритма отсечения Гомори*. Он основывается на лексикографическом варианте двойственного симплекс-метода, изложенного в главе 3. В процессе работы алгоритма число используемых одновременно отсечений не превосходит числа небазисных переменных.

Ниже приводится описание одной итерации алгоритма, состоящей из 5 шагов. Шаг с номером 0 выполняется только один раз на первой итерации. Обозначим через ν число итераций, на которых вводятся отсечения.

Шаг 0. Начать с нормальной симплекс-таблицы. Положить $\nu := 0$.

Шаг 1. Если симплекс-таблица прямо допустима и все элементы z_{p0} , $p = 1, \dots, n$, целые, то КОНЕЦ; получено оптимальное решение задачи ЦЛП.

Шаг 2. Если симплекс-таблица прямо допустима, то выбрать минимальное $p \in \{1, \dots, n\}$ такое, что z_{p0} – нецелое; положить $\nu := \nu + 1$.

Строку с номером p назовем *производящей*. Этой строке соответствует уравнение

$$x_p = z_{p0} - \sum_{j=1}^l z_{pj} x_{\tau(j)},$$

которое называется отсечением Гомори и используется для построения дополнительного ограничения, здесь l – число небазисных переменных

$$x_{n+v} = -f_{p0} - \sum_{j=1}^l (-f_{pj}) x_{\tau(j)} \geq 0,$$

где f_{pj} – дробная часть числа z_{pj} ($z_{pj} = \lfloor z_{pj} \rfloor + f_{pj}$, $0 \leq f_{pj} < 1$).

К симплекс-таблице добавляется $(n+1)$ -ая строка (отсечение Гомори), соответствующая дополнительному ограничению с базисной переменной x_{n+v} .

Шаг 3. Выбрать ведущую строку r такую, что $z_{r0} < 0$, $r \in \{1, \dots, n\}$.

Шаг 4. Если $\{j \mid z_{rj} < 0, j \in \{1, \dots, l\}\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущий столбец s по правилу

$$\frac{1}{|z_{rs}|} \beta_s = \text{lex min} \left\{ \frac{1}{|z_{rj}|} \beta_j \mid z_{rj} < 0, j \in \{1, \dots, l\} \right\},$$

иначе КОНЕЦ (текущая задача ЛП, а, следовательно, и исходная задача ЦЛП, неразрешима ввиду несовместности ее ограничений).

Шаг 5. Преобразовать симплекс-таблицу; положить $\tau(s) := n+v$ и отбросить $(n+1)$ -ую строку, если таковая имелась, иначе $\tau(s) := r$; перейти на шаг 1.

Пусть $x^0 = (z_{10}, \dots, z_{n0})^T$ – базисное допустимое решение ЛП-релаксации целочисленной задачи соответствующее текущей симплекс-таблице в момент введения отсечения Гомори. Из описания алгоритма следует, что это б.д.р. является оптимальным решением линейной релаксации задачи. Так как z_{p0} – нецелое, то $f_{p0} > 0$, следовательно,

$$x_{n+v}(x^0) = -f_{p0} < 0.$$

Поэтому оптимальное решение линейной релаксации отсекается.

Пусть

$$x_{n+v} = -f_{p0} - \sum_{j=1}^l (-f_{pj}) x_{\tau(j)} \geq 0$$

является отсечением Гомори, полученным на шаге 2. Так как $-f_{p0} < 0$, то x_{n+v} – единственная отрицательная базисная переменная. Следовательно, симплекс-таблица двойственно допустима, но не прямо допустима. Это означает, что на шаге 3 в качестве ведущей будет выбрана $(n+1)$ -ая строка, так как это единственная строка, нарушающая прямо допустимость текущей симплекс-таблицы.

При элементарном преобразовании этой таблицы переменная x_{n+v} станет небазисной. Ведущая строка превращается в тождество $x_{n+v} = (-1)(-x_{n+v})$ и на шаге 5 удаляется из симплекс-таблицы.

3.3. Обоснование конечности алгоритма Гомори

При обосновании алгоритма будут использоваться следующие предположения.

1. Известно, что оптимальное значение целевой функции ограничено снизу некоторой константой.

2. Целевая функция задачи ЦЛП принимает целочисленные значения на множестве допустимых решений Q_{LP} . Тогда переменная x_0 будет принимать целочисленные значения и, следовательно, нулевая строка симплекс-таблицы может быть использована в качестве производящей.

Итерация алгоритма, то есть шаги с 1 по 5, называется *LD-итерацией*, если во время ее выполнения не вводится отсечение. И называется *итерацией Гомори*, если на шаге 2 вводится отсечение.

Элементы и столбцы симплекс-таблицы, полученной после выполнения первых t итераций, обозначим z_{ij}^t и β_j^t , соответственно. Через z_{ij}^0 обозначим элементы начальной симплекс-таблицы.

Доказательство конечной сходимости алгоритма проведем методом от противного. Пусть при решении задачи алгоритмом Гомори выполняется бесконечная последовательность итераций. Из описания LD-метода имеем

$$\beta_0^0 > \beta_0^1 > \beta_0^2 > \dots > \beta_0^t > \beta_0^{t+1} > \dots \quad (14)$$

Из конечности этого метода следует, что число итераций Гомори бесконечно. Действительно, если число итераций Гомори конечно, то тогда, начиная с некоторого момента, LD-методом бесконечное число раз решается одна и та же задача ЛП, а это невозможно.

Пусть $(t_v + 1)$, $v = 1, 2, \dots$, – порядковые номера этих итераций. Из (14) имеем

$$z_{00}^0 \geq z_{00}^1 \geq z_{00}^2 \geq \dots \geq z_{00}^t \geq z_{00}^{t+1} \geq \dots$$

Рассмотрим подпоследовательность

$$z_{00}^{t_1}, z_{00}^{t_2}, \dots, z_{00}^{t_v}, \dots, \quad (15)$$

состоящую из элементов z_{00} тех симплекс-таблиц, которые являются входными для итераций Гомори. Пусть $z_{00}^{t_v}$ – нецелое. Тогда на итерации $(t_v + 1)$ нулевая строка будет производящей и справедливо

$$z_{00}^{t_v+1} = z_{00}^{t_v} - z_{0s}^{t_v} \frac{f_{00}^{t_v}}{f_{0s}^{t_v}}.$$

Так как $z_{0s}^{t_v} \geq 0$ и $z_{0s}^{t_v} \geq f_{0s}^{t_v}$, то

$$z_{00}^{t_v+1} \leq z_{00}^{t_v} - f_{00}^{t_v} = \lfloor z_{00}^{t_v} \rfloor < z_{00}^{t_v}.$$

Таким образом, каждый интервал $(z, z+1)$, где z – целое, содержит не более одного нецелого элемента последовательности (15). Из монотонности и ограниченности снизу этой последовательности следует, что она стабилизируется на некотором целом значении. Тогда существует T_0 такое, что для всех $t \geq T_0$ выполняется $z_{00}^t = \bar{z}_{00}$, где \bar{z}_{00} – целое число.

В силу строгого лексикографического убывания нулевого столбца выполняются соотношения

$$z_{10}^{T_0} \geq z_{10}^{T_0+1} \geq \dots \geq z_{10}^t \geq z_{10}^{t+1} \geq \dots \quad (16)$$

По условию $z_{10}^{t_v}$ – нецелое. Тогда на итерации $(t_v + 1)$ первая строка будет производящей и выполняется равенство

$$z_{10}^{t_v+1} = z_{10}^{t_v} - z_{1s}^{t_v} \frac{f_{10}^{t_v}}{f_{1s}^{t_v}}, \quad (17)$$

где $0 < f_{10}^{t_v} < 1$ и $0 < f_{1s}^{t_v} < 1$.

Пусть $z_{1s}^{t_v} < 0$. Так как $\beta_s^{t_v} > 0$, то $z_{0s}^{t_v} > 0$. Из условий $z_{00}^{t_v+1} = z_{00}^{t_v} - z_{0s}^{t_v} \frac{f_{10}^{t_v}}{f_{1s}^{t_v}}$, $0 < f_{10}^{t_v} < 1$, $0 < f_{1s}^{t_v} < 1$ получим $z_{00}^{t_v+1} < z_{00}^{t_v}$, что противоречит равенству $z_{00}^{t_v+1} = z_{00}^{t_v}$. Таким образом из (17), учитывая неравенства $z_{1s}^{t_v} \geq 0$ и $z_{1s}^{t_v} / f_{1s}^{t_v} \geq 1$, имеем

$$z_{10}^{t_v+1} \leq z_{10}^{t_v} - f_{10}^{t_v} = \lfloor z_{10}^{t_v} \rfloor < z_{10}^{t_v}.$$

Следовательно, $\lfloor z_{10}^{t_v} \rfloor < z_{10}^{t_v} < \lfloor z_{10}^{t_v} \rfloor + 1$. Это означает, что каждый интервал $(z, z+1)$, где z – целое, содержит не более одного нецелого элемента из последовательности (16). Так как симплекс-таблицы с номерами t_v , $v = 1, 2, \dots$ прямо допустимы, то $z_{10}^{t_v} \geq 0$. Поэтому, последовательность с номерами t_v , $v = 1, 2, \dots$ является монотонно убывающей и ограниченной снизу. Тогда существует $T_1 \geq T_0$ такой, что для всех $t \geq T_1$ выполняется $z_{10}^t = z_{10}$.

Аналогичные рассуждения верны и для оставшихся компонент вплоть до n -ой. Следовательно, существует такой номер T_n , что для $t \geq T_n$ и для $i = 1, \dots, n$ справедливо $z_{i0}^t = \bar{z}_{i0}$, где $\bar{z}_{i0} \in Z^+$.

Подобное утверждение противоречит предположению о бесконечности числа итераций. Тем самым доказана конечность первого алгоритма Гомори.

§ 4. Метод ветвей и границ

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min_Q.$$

Допустим, что множество допустимых решений Q является конечным, тогда одним из алгоритмов решения этой задачи является полный перебор, когда наилучшее найденное решение, которое назовем *рекордом*, сравнивается с очередным допустимым решением. Понятно, что это очень неэффективный способ решения экстремальных задач. Так как приходится сравнивать друг с другом все решения, которых может оказаться слишком много. А в случае, когда задача непрерывна и множество допустимых решений континуально, не очень понятно как реализовать такую стратегию решения. Возникающие трудности можно попытаться обойти, если воспользоваться методом ветвей и границ (МВГ). Данный метод основан на переборе допустимых решений, в процессе которого рекорд сравнивается с подмножествами допустимых решений. Этот алгоритм осуществляет поиск оптимального решения посредством последовательного разбиения множества допустимых решений на подмножества меньшей мощности. Нижние оценки на значения целевой функции на этих подмножествах сравниваются с текущим рекордным значением целевой функции. Ясно, что подмножества решений, у которых нижние оценки больше текущего рекордного значения, не могут содержать оптимального решения и должны быть отброшены. В приводимом ниже описании метода ветвей и границ предположение о конечности множества Q не используется. Более важно свойство разложимости, которое описывается ниже, и предположение о конечности числа атомарных множеств.

Атомарным множеством назовем подмножество Q , на котором исходная задача легко решается точно или приближенно. Подмножество Q допустимых решений назовем *разложимым*, если оно представимо в виде объединения некоторого конечного набора атомарных множеств.

Обозначим через $x(d)$ *наилучшее решение* задачи на атомарном множестве d , найденное с помощью некоторого алгоритма.

Функцией ветвления $b(d)$ назовем функцию, определенную на разложимых подмножествах множества Q и ставящую в соответствие множеству d определенное его разбиение на несобственные разложимые подмножества.

Нижней границей назовем вещественную функцию $H(d)$, определенную на разложимых подмножествах множества Q и такую, что

$$0 < H(d) \leq \min_{x \in d} f(x).$$

Функция $H(d)$ невозрастающая, то есть $H(d_1) \geq H(d_2)$, если $d_1 \subseteq d_2$.

4.1 Схема метода

Алгоритм, реализующий метод ветвей и границ, состоит из конечной последовательности однотипных шагов. На каждом шаге рассматривается некоторое разбиение d_1, \dots, d_L множества еще не рассмотренных допустимых решений и некоторый рекорд x^0 .

На первом шаге положим $d_1 = Q$, а в качестве x^0 выберем произвольное допустимое решение.

Пусть к очередному шагу имеется разбиение d_1, \dots, d_L и рекорд x^0 . Шаг начинается с проверки элементов разбиения (не обязательно всех) на выполнение следующих условий: содержится ли в нем решение со значением лучше рекорда; какое решение в подмножестве является наилучшим? Пусть проверяется множество d_l . Это множество считается проверенным и отбрасывается, если выполняется одно из условий:

1. $f(x^0) \leq H(d_l)$;
2. функция $x(d)$ определена на множестве d_l .

При этом если реализуется второй случай и $f(x(d_l)) \leq f(x^0)$, то устанавливается новое значение рекорда $x^0 = x(d_l)$. Если отброшенными оказываются все элементы разбиения, то алгоритм заканчивает работу и текущий рекорд x^0 является оптимальным решением.

Пусть $d'_1, \dots, d'_{L'}$, $0 < L' \leq 1$ – множества, не отброшенные в результате проверок. Выберем среди них некоторое «перспективное» подмножество d'_{l_0} . Применим к нему функцию ветвления b , в результате получим разбиение d_1, \dots, d_N этого множества и, следовательно, новое разбиение d'_1, \dots, d'_{l_0-1} , d_1, \dots, d_N , $d'_{l_0+1}, \dots, d'_{L'}$ множества неотброшенных решений. После этого начинается следующий шаг алгоритма.

Чтобы завершить описание метода, уточним способ выбора «перспективного» подмножества. Имеется два основных правила: *одновременного ветвления* и *одностороннего ветвления*. При одновременном ветвлении функция ветвления может быть применена к любому элементу разбиения. Чаще всего выбор элемента d'_{l_0} производится по правилу $l_0 = \arg \min_{1 \leq l \leq L'} H(d'_l)$.

При одностороннем ветвлении выбор разбиваемого подмножества предписан от начала до конца. Перспективным является, например, первый или последний элемент разбиения.

Конечность алгоритма следует из того, что на каждом шаге алгоритма хотя бы один из элементов разбиения либо отбрасывается, либо разбивается на подмножества, каждое из которых состоит из меньшего числа атомарных множеств. Далее атомарные множества всегда отбрасываются. И, наконец, число атомарных множеств является конечным.

Пусть $Q = Q_1 \cup Q_2$, где Q_1 – объединение подмножеств отброшенных по первому правилу, Q_2 – объединение подмножеств отброшенных при проверке по второму правилу.

Если $Q^* \cap Q_1 \neq \emptyset$, то рекорд, полученный алгоритмом, является оптимальным решением вне зависимости от того, как задана функция $x(d)$.

В противном случае, если $Q^* \cap Q_1 = \emptyset$, то $Q^* \subseteq Q_2$. Следовательно, существует набор подмножеств $\{d_i\}$ таких, что $Q^* \cap d_i \neq \emptyset$, $d_i \subseteq Q_2$ для каждого i и $Q^* \subseteq \bigcup_i d_i$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Для любого множества d , если функция $x(d)$ определена, то

$$f(x(d)) = \inf_{x \in d} f(x).$$

Из определения множества Q_2 следует, что функция $x(d_i)$ определена для каждого i и является оптимальным решением задачи. Согласно алгоритму смена рекорда происходит только при реализации условия 2. Пусть d_1 – первое подмножество, отброшенное по условию 2. Тогда из предыдущих рассуждений следует, что $f(x^0) \leq f(x(d_1))$ и, следовательно, x^0 – оптимальное решение.

Случай 2. Допустим, что для любого множества $d \subseteq Q$, для которого определена функция $x(d)$, выполняется неравенство:

$$f(x(d)) \leq (1 + \varepsilon)f(x^*(d)),$$

где $x^*(d)$ – наилучшее решение в подмножестве d , $\varepsilon > 0$.

Рассуждая как в предыдущем пункте, получим, что $f(x^0) \leq f(x(d_1)) \leq (1 + \varepsilon)f(x^*(d_1))$. Из определения множества d_1 следует, что x^0 является ε -оптимальным решением.

Таким образом, при разработке алгоритма МВГ, исходя из специфики рассматриваемой задачи, необходимо конкретизировать и определить следующие составные элементы общей схемы:

- атомарные множества решений;
- способ задания подмножеств решений;
- функцию ветвления;
- способ вычисления нижней границы;
- функцию выбора наилучшего решения;

– правила выбора перспективного элемента разбиения.

В следующем параграфе будет показано, как данная схема может быть реализована для решения задачи нелинейного программирования.

§ 5. Метод ветвей и границ для решения задач нелинейного программирования

Рассмотрим задачу минимизации нелинейной функции f на параллелепипеде

$$f(x) \rightarrow \inf_{x \in Q},$$

где $Q = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$.

Считаем, что целевая функция f удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \text{const} > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|_\infty, \quad x \in Q, \quad y \in Q. \quad (18)$$

Из (18) следует, что f – непрерывная функция, следовательно, достигает своего минимального значения f^* на параллелепипеде.

Выберем на отрезке $[a_j, b_j]$ оси j следующие точки:

$$x_j^1 = a_j + h/2, \quad x_j^2 = x_j^1 + h, \dots, \quad x_j^{m_j+1} = x_j^{m_j} + h, \quad x_j^{m_j} = \min\{x_j^1 + (m_j - 1)h, b_j\},$$

где $h = 2\varepsilon/L$ – шаг сетки, m_j – натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$x_j^{m_j-1} < b_j - \frac{h}{2} \leq x_j^1 + (m_j - 1)h.$$

На параллелепипеде Q введем сетку $Q_h = \{x^{i_1 \dots i_n} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_j^{i_j}, \dots, x_n^{i_n})\}$,

где j -ая координата $x_j^{i_j}$ точки $x^{i_1 \dots i_n}$ принимает одно из следующих значений: $x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{m_j}$. Пусть $F_h = \min_{Q_h} f(x^{i_1 \dots i_n})$.

Теорема 4. Для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Липшица (18), справедлива оценка

$$f^* \leq F_h \leq f^* + \varepsilon.$$

Доказательство. Множество

$$Q_{i_1 \dots i_n} = \{x \in R^n \mid \|x - x^{i_1 \dots i_n}\|_\infty \leq h/2\}$$

является кубом с центром в точке $x^{i_1 \dots i_n}$ и гранями, параллельными осям координат, с длиной ребра равной h . Множество всех кубов $Q_{i_1 \dots i_n}$ с центрами

$x^{i_1 \dots i_n} \in Q_h$ покрывает весь параллелепипед Q , поэтому для любой точки $x \in Q$ найдется гиперкуб $Q_{i_1 \dots i_n}$, содержащий эту точку. Учитывая условие(18), получим, что для любого $x \in Q$ выполняется

$$f(x) \geq f(x^{i_1 \dots i_n}) - L \|x - x^{i_1 \dots i_n}\|_\infty \geq F_h - L \frac{h}{2} = F_h - \varepsilon.$$

Отсюда $f^* \leq F_h \leq f^* + \varepsilon$. ■

Рассмотрим произвольный гиперкуб $\Gamma[x^c, h]$ с центром x^c и длиной стороны h :

$$\Gamma[x^c, h] = \{x \in R^n : \|x - x^c\|_\infty \leq \frac{h}{2}\}.$$

Из доказательства теоремы 4 следует, что для любого $x \in \Gamma[x^c, h]$ верно

$$f(x) = f(x) - f(x^c) + f(x^c) \geq -L |x - x^c| + f(x^c) \geq f(x^c) - L \frac{h}{2}.$$

Естественно тогда определить нижнюю границу на гиперкубе $\Gamma[x^c, h]$ равенством $H(\Gamma[x^0, h]) = f(x^c) - L \frac{h}{2}$.

Функцию выбора наилучшего решения определим на гиперкубах, которые являются атомарными множествами, со стороной $h \leq 2 \frac{\varepsilon}{L}$. Положим

$x(\Gamma[x^c, h]) = x^c$. Подмножества решений будем задавать в виде набора гиперкубов.

На первом шаге имеем $t_1 = \Gamma[x^R, \Delta]$, где первый рекорд x^R является центром гиперкуба со стороной $\Delta^R = \Delta$.

Пусть к очередному шагу имеется разбиение $t_1 = \Gamma[x^1, h_1], \dots, t_L = \Gamma[x^L, h_L]$ и рекорд x^R – центр гиперкуба со стороной Δ^R . Очередной шаг начинается с проверки гиперкуба с номером l . Он считается проверенным и отбрасывается, если выполняется одно из следующих условий:

1. $f(x^R) \leq H(\Gamma[x^l, h_l])$;
2. сторона гиперкуба h_l не превосходит величины $2 \frac{\varepsilon}{L}$.

При этом если реализуется второй случай и $f(x^l) < f(x^R)$, то устанавливаются новые значения рекорда $x^R = x^l$ и величины $\Delta^R = h_l$.

В рассматриваемой задаче дополнительно можно использовать следующие правила проверки подмножеств.

Случай 1. Если $f(x^l) < f(x^R)$, то есть текущий рекорд хуже, то пересчитываем рекорд и среди оставшихся гиперкубов разбиения отбрасываем те, которые содержатся в гиперкубе $\Gamma[x^R, 2(f(x^R) - f(x^l))/L]$. По определению нижней границы для любого $x \in \Gamma[x^c, h]$ верно неравенство $f(x) \geq H(\Gamma[x^c, h]) = f(x^c - L \frac{h}{2})$. Поэтому для любой точки x из данного гиперкуба имеем

$$f(x) \geq H(\Gamma[x^R, \frac{2(f(x^R) - f(x^l))}{L}]) = f(x^R) - \frac{L}{2} \frac{2(f(x^R) - f(x^l))}{L} = f(x^l).$$

Случай 2. Если $f(x^R) \leq f(x^l)$, то есть текущий рекорд не хуже, то среди оставшихся гиперкубов разбиения отбрасываем те, которые содержатся в $\Gamma[x^l, \frac{f(x^l) - f(x^R)}{L}]$, так как для любой точки x из данного гиперкуба имеем $f(x) \geq f(x^R)$.

Если отброшены все элементы разбиения, то алгоритм заканчивает работу и x^R – требуемое решение. Если остались неотброшенные множества, то выбираем «перспективное» по одному из правил, которые описаны в схеме метода, подмножество $\Gamma[x^l, h_l]$. Функция ветвления $b(\cdot)$ разбивает его на 2^n одинаковых гиперкубов со стороной $h_l/2$. После этого начинается следующий шаг. Конечность алгоритма МВГ обосновалась в предыдущем параграфе.

Замечание.

Если в процессе работы алгоритма ни разу не происходит смены рекорда по 2 условию, когда функция $x(d)$ является определенной на проверяемом множестве, то полученный рекорд является оптимальным решением задачи. В противном случае полученный рекорд является ε -оптимальным решением.

§ 6. МЕТОДЫ ШТРАФА

В этом параграфе представлены *методы штрафа*, общая идея которых заключается в замене решения исходной задачи на решение последовательности экстремальных задач без ограничений. Эти методы интересны тем, что они просты при обосновании сходимости и оказываются практически эффективными при решении оптимизационных задач.

Опишем в общем виде идею метода штрафов, используемого для решения следующей задачи (1)-(3). Рассмотрим функцию $h: R \rightarrow R$ вида

$$h(Y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ +\infty, & y > 0. \end{cases}$$

Определим функцию штрафа $H(x) = \sum_{i=1}^m h(\varphi_i(x))$. Очевидно, что

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q, \\ +\infty, & x \notin Q. \end{cases}$$

Следовательно, решение задачи (1)-(3) эквивалентно решению следующей задачи без ограничений

$$g(x) = f(x) + H(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}.$$

Основной недостаток этого подхода связан с разрывностью функции штрафа H , так как минимизация функции g в этом случае является весьма непростой задачей, для решения которой неприменимы методы главы 2.

6.1 Метод внешних штрафов

Затруднений, связанных с разрывностью функции g , можно избежать, рассматривая непрерывные и непрерывно дифференцируемые штрафные функции. Покажем реализацию этого подхода на примере *метода внешних штрафов*.

Определение 1. Функция $P_k(x)$ называется *штрафной функцией* множества Q , если $P_k(x) \geq 0$, $k=1,2,\dots$, $x \in R^n$, и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q, \\ +\infty, & x \notin Q. \end{cases}$$

В дальнейшем будем предполагать, что штрафная функция имеет следующий вид: $P_k(x) = kH(x)$, где $k=1,2,\dots$ – *коэффициент штрафа*. Напри-

мер, возьмем $H(x) = \sum_{i=1}^m [\varphi_i(x)]_+^2$ или $H(x) = \sum_{i=1}^m [\varphi_i(x)]_+$, здесь

$$[a]_+ = \max(0, a).$$

Теперь решение задачи (1)-(3) сводится к решению последовательности задач минимизации вида

$$F_k(x) = f(x) + P_k(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}, \quad k=1,2,\dots \quad (19)$$

Для упрощения последующих рассуждений будем считать, что имеется метод нахождения оптимального решения $x(k)$ задачи (19) для любого коэффициента штрафа $k=1,2,\dots$. Обычно с этой целью выбирается один из итерационных алгоритмов безусловной оптимизации.

С практической точки зрения мы не можем использовать сведение задачи (1)-(3) к задачам вида (19), так как оптимальное значение целевой функции задачи (1)-(3) является пределом оптимальных значений задач вида (19). При практических вычислениях приходится довольствоваться теми приближениями $x(k)$, для которых величина $H(x(k))$ достаточно мала.

Соответствующий итерационный алгоритм может быть описан следующим образом.

Шаг $l+1$. Найти решение задачи (19) с коэффициентом штрафа $k_{l+1} > k_l$. Если $H(x^{l+1}) \leq \varepsilon$, то алгоритм завершает работу, иначе перейти на следующий шаг.

Понятно, чтобы этот алгоритм представлял интерес с вычислительной точки зрения необходимо найти условия, которые гарантировали бы сходимость приближений к оптимальному решению.

Для этого рассмотрим ситуацию, когда алгоритм не останавливается. Положим $\varepsilon = 0$. Тогда получается последовательность приближений $\{x\}_{l \in N}$. При очень простых условиях она сходится к оптимальному решению задачи P . Будем считать, что

- 1) $H \in C^0$, $H(x) \geq 0$ для всех $x \in R^n$,
- 2) $H(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in Q$,
- 3) $f \in C^0$ и множество Q – замкнутое.

Теорема 5. Пусть выполняется хотя бы одно из условий:

а) $f(x_k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ для любой последовательности $\{x_k\}_{k \in N} \in Q$ такой, что $\|x_k\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$,

б) множество Q – ограничено и $H(x_k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ для любой последовательности $\{x_k\}_{k \in N} \in Q$ такой, что $\|x_k\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Тогда последовательность $x^l = x(k_l)$, $l \in N$, имеет хотя бы одну предельную точку, и всякая предельная точка этой последовательности есть оптимальное решение задачи, и $H(x^l) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

Доказательство. Покажем, что в задаче (1)-(3) существует оптимальное решение. В случае б) это очевидно, так как множество Q является компактным. Рассмотрим случай а). Если множество Q ограничено, то тогда оно снова является компактным и искомый оптимум x^* существует. Пусть x^* – оптимальное решение. В противном случае найдется последовательность $\{x_k\}_{k \in N} \in Q$ такая, что $\|x_k\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим множество Лебега вида $\{x \in Q \mid f(x) \leq f(x_0)\}$. Вне этого множества функция f неограничен-

но возрастает. В силу того, что данное множество ограничено и замкнуто, то и в этом случае также существует оптимальное решение.

Учитывая, что $k_{l+1} > k_l$, x^l – оптимальное решение задачи (19) с коэффициентом штрафа k_l , получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} F_{l+1}(x^{l+1}) &= f(x^{l+1}) + k_{l+1}H(x^{l+1}) > f(x^{l+1}) + k_lH(x^{l+1}) \geq \\ &\geq f(x^l) + k_lH(x^l) = F_l(x^l). \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда следует, что последовательность $\{F_l(x^l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ является монотонно возрастающей.

Из следующих двух неравенств:

$$\begin{aligned} f(x^l) + k_lH(x^l) &\leq f(x^{l+1}) + k_lH(x^{l+1}), \\ f(x^{l+1}) + k_{l+1}H(x^{l+1}) &\leq f(x^l) + k_{l+1}H(x^l), \end{aligned}$$

получим $(k_{l+1} - k_l)H(x^{l+1}) \leq (k_{l+1} - k_l)H(x^l)$, тогда

$$H(x^{l+1}) \leq H(x^l), \quad l \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Аналогично, $f(x^l) \leq f(x^l) + k_lH(x^l) \leq f(x^*) + k_lH(x^*)$, следовательно,

$$f(x^l) \leq F_l(x^l) \leq f(x^*), \quad l \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Покажем, что последовательность $\{x^l\}_{l \in \mathbb{N}}$ является ограниченной. Допустим противное. Тогда если выполняется гипотеза а) теоремы, то $f(x^l) \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, что противоречит (22). В случае выполнения гипотезы б) имеем $H(x^l) \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, что противоречит (21).

Таким образом, последовательность $\{x^l\}_{l \in \mathbb{N}}$ ограничена. Без ограничений общности считаем, что существует предел \hat{x} последовательности $\{x^l\}_{l \in \mathbb{N}}$ при $l \rightarrow \infty$. Из непрерывности функции f следует, что $f(x^l) \rightarrow f(\hat{x})$ при $l \rightarrow \infty$. Тогда из (22) имеем

$$f(\hat{x}) \leq f(x^*). \quad (23)$$

Так как последовательность $\{F_l(x^l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ монотонно возрастающая и ограниченная, что следует из (20), (22), то существует $\lim_{l \rightarrow \infty} F_l(x^l) = F^* \leq f(x^*)$, следовательно, существует и $\lim_{l \rightarrow \infty} k_lH(x^l) = F^* - f(\hat{x})$.

Учитывая, что $k_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, получим, что $H(x^l) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Тогда $H(\hat{x}) = 0$, следовательно, $\hat{x} \in Q$. Таким образом, $f(x^*) \leq f(\hat{x})$. Из (23) имеем, что $f(\hat{x}) = f(x^*)$, то есть \hat{x} – оптимальное решение задачи P . ■

6.2 Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

Основной недостаток предыдущего метода заключается в том, что оптимум x^* аппроксимируется снаружи, то есть приближения x^1, x^2, \dots, x^l , полученные при коэффициентах штрафа k_1, k_2, \dots, k_l , не принадлежат множеству допустимых решений задачи, что и послужило причиной создания других методов штрафа, в которых оптимум аппроксимируется изнутри. Этим обосновывается их название – *методы внутренних штрафов*.

Определение 2. Функция $B(x)$ называется *барьерной функцией* для Q , если $B(x)$ определена и конечна на $Int Q$, $B(x) \geq 0$ и $\lim_{x \rightarrow \partial Q} B(x) = \infty$.

Примеры барьерных функций: $-\sum_{i=1}^m (\varphi_i(x))^{-1}, \sum_{i=1}^m |\varphi_i(x)|^{-1}, \sum_{i=1}^m |\varphi_i(x)|^{-2}$.

Определим штрафную функцию $P_k(x) = a_k B(x)$, где a_k – коэффициент штрафа или *барьерный коэффициент*. Тогда решение задачи (1)-(3) сводится к решению последовательности задач минимизации вида

$$F_k(x) = f(x) + a_k B(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Предполагается, что $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Как и выше, считаем, что существует метод нахождения оптимального решения задачи (24). Пусть $x^k = x(k)$ – оптимальное решение задачи (24) со значением барьерного коэффициента a_k .

На практике для решения задачи (24) можно использовать метод градиентов. При этом, если $Int Q \neq \emptyset$ и начальное приближение $x^0 \in Int Q$, то можно гарантировать, что все последующие приближения будут принадлежать $Int Q$. Действительно, рассмотрим итерационную формулу $x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k)$, $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Если в ней текущее приближение $x^k \in Int Q$, то при достаточно малой длине шага α_k новое приближение $x^{k+1} \in Int Q$.

Рассмотрим итерационный алгоритм. Пусть $x^k \in Int Q$ – решение задачи (24) на шаге k .

Шаг $k + 1$. Находим решение задачи (24) со значением барьерного коэффициента $a_{k+1} < a_k$. Текущее решение x^k используется в качестве начального приближения. Если $a_{k+1} B(x^{k+1}) \leq \varepsilon$, то алгоритм завершает работу. Иначе перейти на следующий шаг.

С практической точки зрения важно, чтобы приближения, которые генерируются в процессе работы алгоритма, сходились к оптимальному решению задачи. Как и в предыдущем случае, возьмем $\varepsilon = 0$. Тогда алгоритм порождает бесконечную последовательность приближений. Оказывается, что при достаточно простых предположениях можно гарантировать сходимость этой последовательности к оптимуму.

Предположим, что задача (24) при любом $k \in N$ достигает минимума на Q и для его вычисления используется один из итерационных методов безусловной оптимизации. Тогда, если начальное приближение $x^0 \in \text{Int } Q$, то из свойств барьерной функции следует, что данный алгоритм будет сходиться к некоторому значению из множества $\text{Int } Q$.

При доказательстве теоремы 6 предполагаем, что множество допустимых решений замкнуто, $\text{Int } Q \neq \emptyset$, $f \in C^0(R^n)$, $B \in C^0(\text{Int } Q)$, $B(x) \geq 0$, $x \in \text{Int } Q$ и, наконец, для любого элемента $x \in Q$ существует последовательность $\{y_k\}_{k \in N}$, $y_k \in \text{Int } Q$, такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x$.

Теорема 6. Пусть выполняется одно из условий:

- а) $f(x_k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ для любой последовательности $\{x^k\}_{k \in N} \in Q$ такой, что $\|x_k\| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$,
 б) множество Q ограничено.

Тогда

1) последовательность $\{x^k\}_{k \in N}$ имеет хотя бы одну предельную точку и любая предельная точка этой последовательности является оптимальным решением,

2) $\alpha_k B(x^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Как и в случае теоремы 5, из условий а) и б) следует, что существует оптимальное решение задачи $x^* \in Q$. Для любого $k \in N$ справедливо

$$f(x^*) \leq f(x^k) \leq f(x^k) + a_k B(x^k) = F_k(x^k). \quad (25)$$

Из введенных выше соглашений следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{x}_\varepsilon \in \text{Int } Q$ такое, что $f(\tilde{x}_\varepsilon) \leq f(x^*) + \varepsilon$. Учитывая, что x^k – минимум F_k , получим

$$F_k(x^k) \leq f(\tilde{x}_\varepsilon) + a_k B(\tilde{x}_\varepsilon) \leq f(x^*) + \varepsilon + a_k B(\tilde{x}_\varepsilon). \quad (26)$$

Из определения величин x^k , x^{k+1} и условия $a_k > a_{k+1}$ следует

$$\begin{aligned}
F_k(x^k) &= f(x^k) + a_k B(x^k) > f(x^k) + a_{k+1} B(x^k) \geq \\
&\geq f(x^{k+1}) + a_{k+1} B(x^{k+1}) = F_{k+1}(x^{k+1}).
\end{aligned}$$

То есть последовательность $\{F_k(x^k)\}_{k \in N}$ является монотонно убывающей. В силу (25) она ограничена снизу и, следовательно, существует ее предел. Учитывая, что при $k \rightarrow \infty$ $a_k B(\tilde{x}_\varepsilon) \rightarrow 0$, из (26) получим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x^k) \leq f(x^*) + \varepsilon$, Так как $\varepsilon > 0$ – произвольное и выполняется неравенство (25), имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x^k) = f(x^*)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(x^*)$.

Из условий теоремы следует, что последовательность $\{x^k\}_{k \in N}$ содержится в ограниченном множестве. Следовательно, существует подпоследовательность $\{x^{k_i}\}_{i \in N}$, сходящаяся к некоторому \hat{x} . Так как f непрерывна, то $f(\hat{x}) = f(x^*)$, а замкнутость Q гарантирует, что $\hat{x} \in Q$ и, следовательно, \hat{x} есть оптимальное решение задачи. ■

ГЛАВА 5

ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вариационное исчисление возникло при исследовании некоторых прикладных задач. Напомним постановку классической изопериметрической задачи, в которой требуется среди замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую наибольшую площадь. В одной из работ Лагранжа, посвященной постановкам подобных задач, было предложено «варьировать» кривую, подозреваемую на экстремум, и выделять из приращений функционалов главные части, которые он назвал вариациями. Со временем весь раздел математики, в котором использовался метод Лагранжа, стал называться вариационным исчислением.

Для того чтобы более четко очертить границы данного класса задач, воспользуемся их постановками на языке функционального анализа. Задачи вариационного исчисления – это задачи поиска экстремума функционала или отображения, которое переводит вектор-функции из некоторого подмножества функционального пространства в числа. Таким образом, особенность задач вариационного исчисления состоит в том, что неизвестными являются функции. Множество допустимых решений задачи представляет собой подмножество некоторого функционального пространства. Допустимые решения удовлетворяют общим требованиям для элементов пространства, например, непрерывности, дифференцируемости и т.д., а также ограничениям и связям между неизвестными.

§ 1. Постановка задачи классического вариационного исчисления

Общая постановка:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \rightarrow \inf(\sup), \quad (1)$$

$$G_1(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) = 0, G_2(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) \leq 0, \quad (2)$$

$$u(t) \in U(t) \in R^r, \quad (3)$$

$$(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \in \Gamma, \quad (4)$$

охватывает большинство задач оптимального управления и вариационного исчисления [4].

Переменные $x = (x^1, \dots, x^n)$ называют *фазовыми переменными*, а $u = (u^1, \dots, u^r)$ – *управлениями*.

Функционал J может быть функционалом одного из следующих трех типов. *Интегральный функционал* имеет следующую форму:

$$J_1(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) dt, \quad \text{где функция } f : R \times R^n \times R^n \times R^r \rightarrow R$$

называется *интегрантом*. Функционалы вида $J_2(x(\cdot)) = \psi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$, где $\psi : R \times R^n \times R \times R^n \rightarrow R$, называются *терминальными*. Если функционал представим в виде суммы интегрального и терминального функционалов, то он называется *функционалом смешанного типа*.

Ограничения вида (2), где $G_i : R \times R^n \times R^n \times R^r \rightarrow R^{k_i}$, $i = 1, 2$, называются *функциональными*, а ограничения вида (3) – *нефункциональными*.

Граничные условия задаются выделением в пространстве $R \times R^n \times R \times R^n$ подмножества Γ , которому должны принадлежать концы траектории, то есть точка $(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$. Как правило, рассматриваются следующие граничные условия:

- *закрепленные*, когда значения траектории закреплены на обоих концах отрезка $[t_0, t_1]$, при этом сам отрезок предполагается фиксированным: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$;
- *свободный правый или левый конец*, когда соответствующий конец отрезка $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным, но на нем нет условия на фазовую траекторию;
- *периодические*, когда отрезок $[t_0, t_1]$ фиксирован и фазовая траектория принимает равные значения на концах.

Отрезок $[t_0, t_1]$ не предполагается закрепленным. Если же он фиксируется, то соответствующую задачу называют *задачей с закрепленным временем*.

Если функционал (1) является интегральным, то задача (1) – (4) называется *задачей Лагранжа*; если функционал терминальный, то она называется *задачей Майера* и, наконец, если функционал смешанный, то соответствующая задача называется *задачей Больца*.

Все три постановки являются в значительной мере равносильными. Если, например, задан интегральный функционал, то, введя новую координату x^{n+1} и пополнив систему (2) уравнением $\dot{x}^{n+1} - f = 0$ с граничным условием $x^{n+1}(t_0) = 0$, задача о минимизации функционала

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} f dt$$

сводится к задаче минимизации терминального функционала

$$J_2 = x^{n+1}(t_1).$$

Наоборот, если требуется минимизировать терминальный функционал $J_2 = \psi(t_1, x(t_1))$ при фиксированных значениях t_0 и $x(t_0)$, то, предполагая, что функция ψ дифференцируема, положим

$$f(t, x, \dot{x}) = \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x}, \dot{x} \right),$$

откуда получим, что

$$J_2 = \psi(t_1, x(t_1)) = J_1.$$

Особенности задач классического вариационного исчисления состоят в следующем. Во-первых, в задачах классического вариационного исчисления все функции, входящие в описание задачи, предполагаются гладкими, по меньшей мере непрерывно дифференцируемыми. С другой стороны, в них отсутствуют нефункциональные ограничения вида (3). В задачах оптимального управления нефункциональные ограничения играют весьма существенную роль. Само по себе множество $U(t)$, задающее ограничение (3), может иметь самую разнообразную природу, например, оно может быть дискретным множеством. Это делает неестественным рассмотрение в задачах оптимального управления гладких и даже непрерывных управлений, а вместе с этим и допущение о гладкости отображений G_1, G_2 в (2) по управлению u . Так что стандартные допущения в задачах вариационного исчисления – непрерывная дифференцируемость по всем переменным, а в задачах оптимального управления – непрерывность по совокупности переменных и гладкость по переменным t и x .

Приведем несколько примеров частных задач, укладывающихся в общую схему.

Простейшей векторной задачей называется задача следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \inf, \\ (x(t_0), x(t_1)) \in \Gamma. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В (5) отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным, функция L – определенной и непрерывно дифференцируемой в некоторой области пространства $R \times R^n \times R^n$; множество Γ , задающее граничные условия, предполагается произвольным подмножеством пространства $R^n \times R^n$. Если $n = 1$, то задачу (5) называется *простейшей задачей*.

Задачей Лагранжа с ограничениями в разрешенной форме и фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств называют следующую задачу:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (6)$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad (7)$$

$$g_1(t, x(t)) = 0, \quad g_2(t, x(t)) \leq 0, \quad (8)$$

$$h_0(t_0, x(t_0)) = 0, \quad h_1(t_1, x(t_1)) = 0, \quad (9)$$

$$u \in U. \quad (10)$$

Здесь интегральный функционал не зависит от \dot{x} . Ограничения разделены на *разрешенные* – (7) и *фазовые* – (8). Граничные условия описываются соотношениями (9). В такой форме можно задать не все встречающиеся в прило-

жениях граничные условия. Например, периодические условия таким путем описать нельзя. Но вместе с тем, соотношения (9) дают возможность выразить достаточно широкий класс граничных условий.

При рассмотрении задачи Лагранжа в рамках классического вариационного исчисления будем предполагать, что отрезок $[t_0, t_1]$ является фиксированным и ограничение (10) отсутствует.

Задача (6) – (10) называется *автономной*, если во всех входящих в ее определение функциях и отображениях отсутствует явная зависимость от времени.

Линейными задачами оптимального управления будем называть задачи с закрепленным временем следующего вида:

$$\int_{t_0}^{t_1} ((a(t), x(t)) + (b(t), u(t))) dt \rightarrow \inf ,$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u ,$$

$$(g_i(y), x(t)) \leq \alpha_i(t), \quad i = 1, \dots, m ,$$

$$(h_{kj}, x(t_k)) = \beta_{kj}, \quad k = 0, 1, \quad j = 1, \dots, s_k, \quad u \in U .$$

Иногда требование о закреплённости времени при определении линейных задач опускают.

§ 2. Сильный и слабый экстремум в задачах классического вариационного исчисления

Поставленные выше задачи обладают все еще неопределенностью, так как не описан класс допустимых элементов. Задача Лагранжа (6) – (9) с фиксированным временем в рамках классического вариационного исчисления будет исследоваться в банаховых пространствах $C_1^n([t_0, t_1]) \times C^r([t_0, t_1])$, где $C_1^n([t_0, t_1])$ – пространство непрерывно дифференцируемых вектор-функций, а $C^r([t_0, t_1])$ – пространство непрерывных вектор-функций. Норму в пространстве C_1 обозначим как $\|\cdot\|_1$, норму в пространстве C , если мы хотим сопоставить ее с нормой в пространстве C_1 , иногда будем обозначать $\|\cdot\|_0$. Исследование простейших задач проводится в банаховых пространствах $C_1^n([t_0, t_1])$.

Локальный минимум в пространстве $C_1^n \times C^r$ в случае задачи Лагранжа, или в пространстве C_1^n в случае простейших задач, называется *слабым*. Иначе говоря, пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ доставляет слабый локальный минимум функ-

ционалу $J(x(\cdot), u(\cdot))$ в задаче (6) – (9), если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot)) \in C_1^n \times C^r$ такой, что

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_1 < \varepsilon, \|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_0 < \varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)).$$

При этом пара называется допустимой в задаче, если она удовлетворяет ограничениям (7) и (8) и граничным условиям (9). Совершенно аналогично определяется слабый минимум для простейшей векторной задачи (5).

Локальный экстремум по x в топологии пространства C_1^n называется *сильным*. Иначе говоря, допустимая пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ дает сильный локальный минимум функционалу J в задаче (6) – (9), если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, для которой

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_0 < \varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)).$$

Аналогичным образом определяется сильный минимум для простейшей векторной задачи (5).

Далее в термин «сильный экстремум» будет вкладываться несколько расширенное толкование, которое свойственно этому понятию в задачах оптимального управления. Об этом речь пойдет в следующем параграфе.

§ 3. Допустимые управления и управляемые процессы в задачах оптимального управления. Оптимальные процессы

Уже упоминалось, что требование непрерывности управлений во многих случаях не является естественным. Нередко из самой постановки задачи вытекает необходимость рассматривать более широкий класс допустимых управлений. Иногда в качестве такого берут класс кусочно-непрерывных управлений. В дальнейшем в качестве допустимых управлений будут рассматриваться произвольные ограниченные измеримые функции, принимающие значения из множества $U(t)$.

При таком выборе допустимых управлений требуется уточнить понятие управляемого процесса. Процесс $(x(t), u(t))$ называется *управляемым на отрезке* $[t_0, t_1]$, если на этом отрезке функция $u(t)$ – допустимое управление, $x(t)$ – абсолютно непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая почти всюду уравнению (7).

В понятие допустимого управляемого процесса включается и отрезок времени, на котором этот процесс рассматривается. Таким образом, управляемый процесс, допустимый в задаче (6) – (10), это тройка $(x(t), u(t), [t_0, t_1])$ та-

кая, что вектор-функции $x(t)$ и $u(t)$ образуют управляемый процесс на отрезке $[t_0, t_1]$, и при этом фазовые переменные $x(t)$ удовлетворяют фазовым ограничениям (8) и граничным условиям (9).

Допустимый процесс $(x_*(t), u_*(t), [t_{0*}, t_{1*}])$ назовем *оптимальным*, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всякого другого допустимого процесса $(x(t), u(t), [t_0, t_1])$, для которого при всех $t \in [t_0, t_1] \cap [t_{0*}, t_{1*}]$ выполняются условия $|t_0 - t_{0*}| < \varepsilon$, $|t_1 - t_{1*}| < \varepsilon$ и $|x(t) - x_*(t)| < \varepsilon$, имеет место неравенство

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)).$$

В описанной ситуации говорят еще, что процесс $(x_*(t), u_*(t), [t_{0*}, t_{1*}])$ доставляет сильный минимум в задаче (6) – (10).

Таким образом, возвращаясь к задачам классического вариационного исчисления, в расширенное понимание сильного минимума вкладывается следующий смысл. Проиллюстрируем его на векторной задаче классического вариационного исчисления.

Будем говорить, что вектор-функция $x_*(t)$ доставляет сильный минимум в задаче (5), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всякой функции $x(t) \in W_{\infty,1}^n([t_0, t_1])$, удовлетворяющей граничным условиям и неравенству

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_0 < \varepsilon,$$

имеет место неравенство

$$J(x(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot)).$$

§ 4. Элементарный вывод необходимых условий экстремума для простейших задач классического вариационного исчисления

В этом параграфе дается вывод *необходимых условий Эйлера*. Дальнейшие рассуждения всюду основаны на непосредственном применении метода вариаций.

Начнем с простейшей задачи вариационного исчисления с закрепленными концами:

$$\left. \begin{aligned} J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \inf, \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Предположим, что функция $L(t, x, y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой области U пространства R^3 . Задачу (11) будем исследовать на слабый экстремум, то есть в пространстве $C_1([t_0, t_1])$.

Вывод уравнения Эйлера состоит из трех этапов.

Первый этап состоит в доказательстве того, что функционал J обладает первой вариацией в любой точке $x_*(\cdot)$ такой, что точки $(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, принадлежат области U , и в получении необходимого условия в терминах первой вариации. Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi(\lambda) = J(x_*(\cdot) + \lambda x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t, \lambda) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_*(t) + \lambda x(t), \dot{x}_*(t) + \lambda \dot{x}(t)) dt, \quad (12)$$

порожденную *вариацией* $x(t, \lambda) = x_*(t) + \lambda x(t)$ точки $x_*(\cdot)$ по направлению точки $x(\cdot)$. При наших допущениях относительно L , $x_*(\cdot)$ и $x(\cdot)$ функция $\psi(t, \lambda)$ является дифференцируемой по λ при достаточно малых λ , и при этом производная $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ непрерывна, так как $\frac{\partial \psi(t, \lambda)}{\partial \lambda} = L_x(t, x_*(t) + \lambda x(t), \dot{x}_*(t) + \lambda \dot{x}(t))x(t) + L_{\dot{x}}(t, x_*(t) + \lambda x(t), \dot{x}_*(t) + \lambda \dot{x}(t))\dot{x}(t)$.

Следовательно, допустимо дифференцирование в (12) под знаком интеграла и при этом

$$\varphi'(0) = \delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (q(t)x(t) + p(t)\dot{x}(t)) dt,$$

где

$$q(t) = L_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)), \quad p(t) = L_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)).$$

Так как исследуемая функция $x_*(t)$ допустима, то для любой функции $x(t)$, принадлежащей подпространству $L_0 = \{x(t) \in C_1([t_0, t_1]) \mid x(t_0) = x(t_1) = 0\}$, функция $x_*(t) + \lambda x(t)$ будет проходить через те же граничные точки, что и функция $x_*(t)$. Следовательно, если $x_*(t)$ есть решение задачи (11), то при условии, $x(t) \in L_0$, функция, определяемая соотношением (12), должна иметь минимум в точке нуль. В итоге получаем необходимое условие экстремума

$$\varphi'(0) = \delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = 0, \quad \text{для всех } x(\cdot) \in L_0. \quad (13)$$

Первый этап вывода закончен.

Второй этап состоит в преобразовании выражения для первой вариации на пространстве L_0 посредством интегрирования по частям. Делают это двумя способами: следуя Лагранжу, когда интегрируют по частям второе слагаемое, и, следуя Дюбуа-Раймону, когда интегрируют первое слагаемое. Преобразование по Лагранжу предполагает дополнительное условие гладкости, а именно, допущение, что функция $p(t) = L_{\dot{x}}|_{x_*(t)}$ является непрерывно дифференцируемой. При этом дополнительном предположении проинтегрируем

по частям второе слагаемое в выражении для первой вариации при условии, что $x(\cdot) \in L_0$. Получим:

$$\delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)x(t) dt, \quad (14)$$

где

$$a(t) = q(t) - \dot{p}(t) = \left(-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x \right) \Big|_{x_*(t)}.$$

Приведем теперь преобразование первой вариации по Дюбуа-Раймону. Для этого проинтегрируем по частям первое слагаемое на пространстве L_0 :

$$\int_{t_0}^{t_1} q(t)x(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} -d \left(\int_t^{t_1} q(\tau) d\tau \right) x(t) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_t^{t_1} q(\tau) d\tau \right) \dot{x}(t) dt$$

и получим, что выражение для первой вариации имеет следующий вид:

$$\delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} b(t)\dot{x}(t) dt, \quad (15)$$

где

$$b(t) = \int_t^{t_1} q(\tau) d\tau + p(t) = \int_t^{t_1} L_x \Big|_{x_*(\tau)} d\tau + L_{\dot{x}} \Big|_{x_*(t)}.$$

Переходим к третьему этапу вывода уравнения Эйлера.

Лемма 1 (Лагранжа). Пусть функция $a(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$. Предположим, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $x(t)$, обращающейся в нуль на концах отрезка $[t_0, t_1]$, выполнено равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)x(t) dt = 0,$$

тогда $a(t) \equiv 0$.

Доказательство. В силу непрерывности функции $a(t)$ достаточно проверить, что $a(t) \equiv 0$ во внутренних точках отрезка $[t_0, t_1]$. Предположим, что в некоторой внутренней точке отрезка τ значение $a(\tau) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $a(\tau) > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы, с одной стороны, отрезок $\Delta_0 = [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ целиком лежал внутри отрезка $[t_0, t_1]$, а с другой стороны, чтобы на этом отрезке функция $a(t)$ была больше некоторого положительного числа α . Возьмем теперь любую неотрицатель-

ную, но не тождественно равную нулю финитную функцию из $C_1([t_0, t_1])$ с носителем в Δ_0 . Например, в качестве такой функции можно взять

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tau, \varepsilon) = \begin{cases} (t - \tau + \varepsilon)^2 (t - \tau - \varepsilon)^2, & t \in \Delta_0, \\ 0 & , t \notin \Delta_0. \end{cases}$$

Применив теорему о среднем из интегрального исчисления, получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t) \tilde{x}(t) dt = \int_{\Delta_0} a(t) \tilde{x}(t) dt \geq \alpha \int_{\Delta_0} \tilde{x}(t) dt > 0,$$

что противоречит условиям леммы. ■

Завершим вывод уравнения Эйлера по Лагранжу. На первом этапе было установлено, что если $x_*(t)$ – решение задачи (1), то выполнено равенство (13). На втором этапе было показано, что на подпространстве L_0 первая вариация при дополнительном предположении представима в виде (14). Сопоставив эти два факта с леммой Лагранжа, приходим к выводу, что если $x_*(t)$ есть решение задачи (11), то должно выполняться соотношение

$$\left(-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x \right) \Big|_{x_*(t)} = -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) + L_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = 0,$$

называемое уравнением Эйлера задачи (11) в форме Лагранжа.

Отметим, что при выводе использовались вариации $x(t, \lambda) = x_*(t) + \lambda \tilde{x}(t, \tau, \varepsilon)$ экстремали $x_*(t)$ по направлению $\tilde{x}(t, \tau, \varepsilon)$.

Для того чтобы вывести то же самое уравнение по Дюбуа-Раймону докажем следующую лемму.

Лемма 2 (Дюбуа-Раймона). Пусть функция $b(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$. Предположим, что для любой непрерывной функции $v(t)$, в среднем равной нулю, выполнено равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} b(t)v(t) dt = 0.$$

Тогда $b(t) = b_0 = const$.

Доказательство. Напомним, что функция $v(t)$ называется в среднем равной нулю, если

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = 0.$$

Допустим, что заключение леммы неверно. Тогда должны найтись две точки τ_1 и τ_2 , лежащие внутри отрезка $[t_0, t_1]$, для которых $b(\tau_1) \neq b(\tau_2)$, скажем, $\tau_1 < \tau_2$ и $b(\tau_1) > b(\tau_2)$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы интервалы

$$\Delta_1 = [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1 + \varepsilon] \text{ и } \Delta_2 = [\tau_2 - \varepsilon, \tau_2 + \varepsilon]$$

не пересекались друг с другом, лежали внутри отрезка $[t_0, t_1]$, и при этом выполнялось неравенство:

$$\beta_1 = \min_{t \in \Delta_1} b(t) > \max_{t \in \Delta_2} b(t) = \beta_2.$$

Очевидно, что этого можно добиться. Рассмотрим теперь любую непрерывную функцию $\tilde{v}(t)$, которая вне множества $\Delta_1 \cup \Delta_2$ равна нулю, на Δ_1 неотрицательна и не тождественно равна нулю, а на Δ_2 принимает значения противоположного знака. В качестве примера нужной функции можно взять

$$\tilde{v}(t) = \tilde{v}(t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) = \begin{cases} (t - \tau_1 + \varepsilon)^2 (-t + \tau_1 + \varepsilon)^2, & t \in \Delta_1, \\ -(t - \tau_2 + \varepsilon)^2 (-t + \tau_2 + \varepsilon)^2, & t \in \Delta_2, \\ 0, & t \in [t_0, t_1] \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2). \end{cases}$$

Снова по теореме о среднем получим

$$\int_{t_0}^{t_1} b(t) \tilde{v}(t) dt = \int_{\Delta_1} b(t) \tilde{v}(t) dt + \int_{\Delta_2} b(t) \tilde{v}(t) dt \geq (\beta_1 - \beta_2) \int_{\Delta_1} \tilde{v}(t) dt > 0.$$

Противоречие с условием доказывает лемму. ■

Сопоставив соотношения (13) и (15) с леммой Дюбуа-Раймона, получаем, что если $x_*(t)$ является решением задачи (11), то должно выполняться соотношение

$$\int_t^{t_1} q(\tau) d\tau + p(t) \equiv c_0,$$

или, подробнее,

$$\int_t^{t_1} L_x(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau)) d\tau + L_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = c_0.$$

Это соотношение называют уравнением Эйлера в форме Дюбуа-Раймона. Первое слагаемое в последнем соотношении можно продифференцировать, откуда вытекает, что и второе слагаемое является непрерывно дифференцируемым.

Итак, приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. Пусть в задаче (11) лагранжиан L непрерывно дифференцируем в некоторой области $U \subset R^3$ такой, что ей принадлежат точки $(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, где $x_*(\cdot) \in C_1([t_0, t_1])$. Для того чтобы функция $x_*(t)$ доставляла слабый локальный минимум в задаче (11), необходимо, чтобы было выполнено уравнение Эйлера в форме Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) + L_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = 0. \quad (16)$$

Функции $x_*(t)$, вдоль которых выполнено уравнение Эйлера, называются экстремалами.

Приведем несколько частных случаев, когда у уравнения Эйлера имеются интегралы.

Следствие 2. Если функция L не зависит от \dot{x} , то для экстремальности $x_*(t)$ необходимо, чтобы было выполнено соотношение

$$L_x(t, x_*(t)) = 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Следствие 3. Если функция L не зависит от x , то уравнение Эйлера допускает интеграл импульса:

$$p(t) = L_{\dot{x}}(t, \dot{x}_*(t)) \equiv p_0 = const.$$

Следствие 4. Если функция L не зависит от t , то уравнение Эйлера допускает интеграл энергии:

$$H(t) = p(t)\dot{x}_*(t) - L(x_*(t), \dot{x}_*(t)) = L_{\dot{x}}(x_*(t), \dot{x}_*(t))\dot{x}_*(t) - L(x_*(t), \dot{x}_*(t)) \equiv H_0 = const.$$

Следствия 1 и 2 непосредственно вытекают из (16). Для доказательства следствия 3 надо взять производную $\frac{dH}{dt}$ и, воспользовавшись (16), показать, что она равна нулю.

ГЛАВА 6

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В середине прошлого века в вариационном исчислении появился новый класс экстремальных задач – задачи оптимального управления. Одно из отличий этих задач от задач классического вариационного исчисления – наличие переменных, которые не обладают необходимой гладкостью и могут быть разрывными. Необходимое условие экстремума для задач этого класса имеет существенно иную форму в сравнении с классическими уравнениями Эйлера и Лагранжа. В качестве обязательного условия в решение задачи оптимального управления входит решение вспомогательной задачи на максимум. Отсюда и возникло название этого необходимого условия экстремума – принцип максимума.

§ 1. Постановка задачи оптимального управления

Содержательно задачу оптимального управления можно сформулировать следующим образом. В *фазовом пространстве* R^n заданы две точки x_0 и x_1 , являющиеся, соответственно, начальным и конечным положением объекта управления. В качестве объекта управления рассмотрим самолет. А в качестве *фазового вектора*, определяющего положение самолета в фазовом пространстве, возьмем вектор, компонентами которого являются скорости и координаты, однозначно характеризующие положение самолета в пространстве и времени. У самолета имеются органы управления – «рули». Управляя «рулями», мы управляем движением самолета. Если важно время, за которое самолет переходит из начального положения в конечное, то необходимо найти управление, которое реализует этот переход за минимальное время.

Естественно под управлением понимать функцию, которая задает положение «рулей» в каждый момент времени t , где $t_0 \leq t \leq t_1$ и $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Будем считать, что значения любого управления принадлежат области управления U , которая является подмножеством пространства R^r . Управление $u(t) \in U$, $t_0 \leq t \leq t_1$, является допустимым, если функция $u(t)$ кусочно-непрерывна, то есть имеет конечное число точек разрыва первого рода. Для определенности предполагаем, что в точке разрыва τ существуют конечные пределы $u(\tau + 0)$, $u(\tau - 0)$ и $u(\tau) = u(\tau - 0)$, а также, что управление непрерывно на концах отрезка t_0, t_1 .

Далее считаем, что закон движения фазовой точки (самолета или объекта управления) и закон воздействия управления («рулей») записывается в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u), i = 1, \dots, n,$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (1)$$

где функции f^i непрерывны по переменным x и u , непрерывно дифференцируемы по переменной x . Здесь рассматривается случай, когда система (1) автономна, то есть правые ее части не зависят явно от времени t .

Рассмотрим произвольное допустимое управление $u(t)$. Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t)). \quad (2)$$

Тогда при любых начальных условиях $x(t_0) = x_0$ однозначно определяется траектория движения объекта $x = x(t)$, то есть решение этого уравнения, определенное на некотором отрезке времени. Назовем его решением системы (2), соответствующим управлению $u(t)$ при начальном условии $x(t_0) = x_0$.

Будем говорить, что допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ переводит фазовую точку x из положения x_0 в x_1 , если решение $x(t)$ уравнения (2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ определено на $[t_0, t_1]$ и $x(t_1) = x_1$, то есть проходит в момент времени t_1 через точку x_1 . Такую пару назовем управляемым процессом, определенном на отрезке $[t_0, t_1]$.

Пусть задана еще одна функция f^0 непрерывная по переменным x и u , непрерывно дифференцируемая по переменной x . Приведем формальную постановку задачи оптимального управления.

Найти среди всех допустимых управлений, переводящих фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 , такое, для которого функционал

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt$$

принимает наименьшее значение.

Заметим, что при заданных x_0 и x_1 пределы интегрирования t_0 , t_1 являются переменными, которые зависят от управления, переводящего x_0 в x_1 , и эти пределы определяются из соотношений $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Управление $u(\cdot)$, на котором достигается оптимальное значение данной задачи, называется *оптимальным управлением*, а соответствующая траектория $x(t)$ – *оптимальной траекторией*. В этом смысле основная задача – найти оптимальные управления и соответствующие оптимальные траектории, другими словами, найти *оптимальный управляемый процесс*.

Для $J = t_1 - t_0$ оптимальность управления $u(t)$ эквивалентна минимизации времени перехода из положения x_0 в положение x_1 . Задача отыскания оптимальных управлений и траекторий в этом случае называется *задачей об оптимальном быстродействии*.

§2. Формулировка принципа максимума для линейной задачи быстродействия

Пусть $H(x, u, P) = (P, f(x, u))$ – функция Понтрягина, а

$$\dot{P}_k = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x_k}(x(t), u(t)) P_i, \quad k = 1, \dots, n, \quad - \quad (3)$$

сопряженная система уравнений для соответствующей пары $(x(t), u(t))$. Эта система линейна и однородна. Поэтому при любых начальных условиях для P_k , $k = 1, \dots, n$, существует единственное решение этой системы, определенное на всем отрезке, на котором определены управление $u(t)$ и траектория $x(t)$. Функции $P_1(t), \dots, P_n(t)$ непрерывны и имеют всюду, кроме конечного числа точек разрыва управления $u(t)$, непрерывные производные по t .

Теорема 1 (принцип максимума). Пусть $((x_*(t), u_*(t)), t \in [t_0, t_1])$ – оптимальный управляемый процесс. Тогда существует ненулевая непрерывная вектор-функция $P(t) = (P_1(t), \dots, P_n(t))$ такая, что справедливы следующие утверждения:

- а) $\dot{P}_k = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x_k}(x_*(t), u_*(t)), \quad k = 1, \dots, n$;
- б) $H(x_*(t), u_*(t), P(t)) = \max_{u \in U} H(x_*(t), u_*(t), u), \quad t \in [t_0, t_1]$;
- в) $H(x_*(t_1), u_*(t_1), P(t_1)) \geq 0$.

Если функция f линейна относительно переменных и система (1) записывается в виде $\dot{x} = Ax + Bu$, то возникает задача линейного оптимального быстродействия. Далее будем также использовать следующую запись системы (1):

$$\dot{x}^i = \sum_{\alpha=1}^k a_{\alpha}^i x_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^r b_{\beta}^i u_{\beta}.$$

В дальнейшем предполагается, что U – выпуклый многогранник в R^r , $0 \in U$, и 0 не является вершиной U . Будем считать, что $x_1 = 0$, $x_1 \in R^n$.

Теорема 2 (принцип максимума для линейной задачи быстрогодействия). Пусть $(x_*(t), u_*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ – оптимальный управляемый процесс. Тогда существует такое непрерывное нетривиальное решение $P(t)$ сопряженной системы $\dot{P} = -PA$, что справедливо

$$P(\tau)Bu_*(\tau) = \max_{u \in U} P(\tau)Bu, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \quad (4)$$

Название данных теорем связано с тем, что функция переменной u достигает в точке $u = u(t)$ максимума на множестве U . Управление $u_*(t)$ удовлетворяет принципу максимума, если существует нетривиальное решение сопряженной системы (3) и выполняется равенство (4).

Покажем, как применяется принцип максимума к решению одной задачи об оптимальном быстродействии. Из рассмотрения этого примера выясняется новая важная постановка задачи об оптимальных процессах – *задача синтеза оптимальных управлений*.

Пример 1.

Рассмотрим уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = u$, где u – вещественный управляющий параметр, удовлетворяющий ограничению $|u| \leq 1$. В фазовых координатах $x^1 = x$, $x^2 = \frac{dx}{dt}$ это уравнение переписывается в виде следующей системы:

$$\frac{dx^1}{dt} = x^2, \quad \frac{dx^2}{dt} = u. \quad (5)$$

Рассмотрим для фазовой точки, движущейся по закону (5), задачу о наискорейшем попадании в начало координат $x_1 = (0,0)$ из заданного начального состояния x_0 . Функция H в данном случае имеет вид

$$H = \psi_1 x^2 + \psi_2 u. \quad (6)$$

Далее, для вспомогательных переменных ψ_1, ψ_2 получается система уравнений (см. (3), (6))

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1,$$

откуда $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2 - c_1 t$, где c_1, c_2 – постоянные. С учетом (6) и условия $|u| \leq 1$, из соотношения (4) следует

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t) = \text{sign } (c_2 - c_1 t). \quad (7)$$

Откуда получим, что каждое оптимальное управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения ± 1 и имеющей не более двух интервалов постоянства, так как линейная функция $c_2 - c_1 t$ не

более одного раза меняет знак на отрезке $[t_0, t_1]$. Обратно, любая такая функция $u(t)$ может быть получена из соотношения (7) при некоторых значениях постоянных c_1, c_2 .

Для отрезка времени, на котором $u \equiv 1$, в силу системы (5) справедливо

$$x^2 = t + s_2, \quad x^1 = \frac{t^2}{2} + s_2 t + s_1 = \frac{1}{2}(t + s_2)^2 + \left(s_1 - \frac{s_2^2}{2} \right),$$

где s_1, s_2 – постоянные интегрирования, откуда следует

$$x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 + s, \quad (8)$$

где $s = s_1 - \frac{1}{2}s_2^2$ – постоянная. Таким образом, часть фазовой траектории, для которой $u \equiv 1$, представляет собой дугу параболы (8). Семейство парабол (8) показано на рис. 1.

Аналогично, для отрезка времени, на котором $u \equiv -1$, имеем

$$x^2 = -t + s'_2, \\ x^1 = -\frac{t^2}{2} + s'_2 t + s'_1 = -\frac{1}{2}(-t + s'_2)^2 + \left(s'_1 + \frac{1}{2}(s'_2)^2 \right),$$

откуда получим

$$x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + s'. \quad (9)$$

Семейство парабол (9) показано на рис. 2. По параболом (8) фазовые точки движутся снизу вверх, так как $\frac{dx^2}{dt} = u = +1$, а по параболом (9) – сверху вниз, так как $\frac{dx^2}{dt} = -1$.

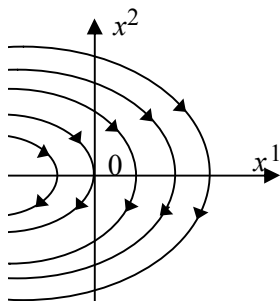


Рис. 1

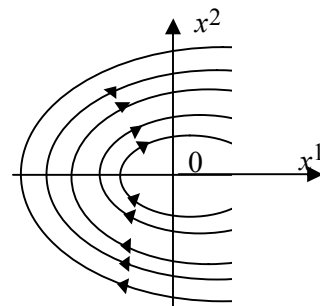


Рис. 2

Если управление $u(t)$ в течение некоторого времени равно $+1$, а затем равно -1 , то фазовая траектория состоит из частей двух парабол (рис. 3), примыкающих друг к другу, причем одна из этих частей лежит на той из парабол (9), которая проходит через начало координат, так как искомая траектория должна вести в начало координат. Если же, наоборот, сначала $u = -1$, а затем $u = +1$, то фазовая кривая заменяется центрально симметричной (рис. 4).

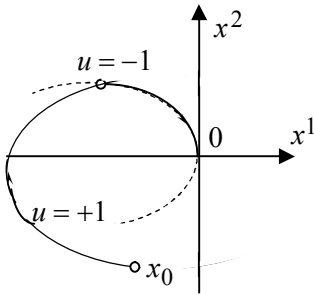


Рис. 3

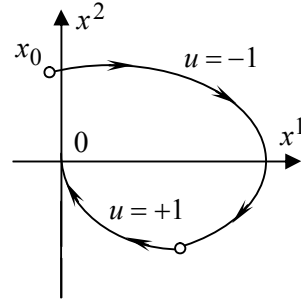


Рис. 4

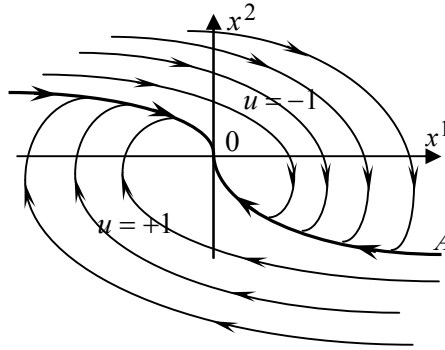


Рис. 5

На рис. 3, 4 на дугах парабол надписаны соответствующие значения управляющего параметра u . На рис. 5 изображено все семейство полученных таким образом фазовых траекторий (АО – дуга параболы $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2$, расположенная в нижней полуплоскости; ВО – дуга параболы $x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2$, расположенная в верхней полуплоскости). Фазовая точка движется по проходящей через начальную точку x_0 дуге параболы (9), если точка x_0 расположена выше линии АОВ, и по дуге параболы (8), если точка x_0 расположена ниже этой линии. Иначе говоря, если начальное положение x_0 расположено выше линии АОВ, то фазовая точка должна двигаться под воздействием управления $u = -1$ до тех пор, пока она не попадет на дугу АО; в момент попадания на дугу АО значение u переключается и становится равным $+1$ вплоть до момента попадания в начало координат. Если же начальное поло-

жение x_0 расположено ниже линии AOB , то u должно быть равно $+1$ до момента попадания на дугу BO , а в момент попадания на дугу BO значение u переключается и становится равным -1 .

Итак, согласно теореме 2, только описанные выше траектории могут быть оптимальными, причем из проведенного исследования видно, что из каждой точки фазовой плоскости исходит только одна траектория, ведущая в начало координат, которая может быть оптимальной, то есть задание начальной точки x_0 однозначно определяет соответствующую траекторию. Из теоремы существования [8] вытекает, что в данном примере для любой начальной точки x_0 существует оптимальная траектория. Таким образом, найденные траектории (рис. 5) являются оптимальными, и других оптимальных траекторий, ведущих в начало координат, не существует.

Полученное в рассмотренном примере решение оптимальной задачи можно истолковать следующим образом. Обозначим через $v(x^1, x^2) = v(x)$ функцию, заданную на плоскости x^1, x^2 :

$$v(x) = \begin{cases} +1 & \text{ниже линии } AOB \text{ и на дуге } AO, \\ -1 & \text{выше линии } AOB \text{ и на дуге } BO. \end{cases}$$

Тогда на каждой оптимальной траектории значение $u(t)$ управляющего параметра в произвольный момент t равно $v(x(t))$, то есть равно значению функции v в той точке, в которой в момент t находится фазовая точка, пробегающая оптимальную траекторию $u(t) = v(x(t))$. Это означает, что, заменив в системе (5) величину u функцией $v(x)$, получим систему

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = x^2, \\ \frac{dx^2}{dt} = v(x^1, x^2), \end{cases} \quad (10)$$

решение которой при произвольном начальном состоянии x_0 дает оптимальную фазовую траекторию, ведущую в начало координат. Иначе говоря, система (10) представляет собой систему дифференциальных уравнений с разрывной правой частью для нахождения оптимальных траекторий, ведущих в начало координат.

§ 3. Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстрого действия

Введем понятие *сферы достижимости*. Пусть $T > 0$ – верхняя граница на длины интервалов, на которых будут рассматриваться управления. Будем говорить, что точка \bar{x} принадлежит сфере достижимости (см. рис. 6), если на

интервале $[t_0, t_1]$ существует допустимое управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $x(t)$ такие, что $x(t_0) = \bar{x}$, $x(t_1) = 0$, $t_1 - t_0 \leq T$.

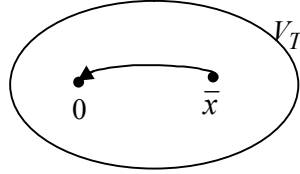


Рис. 6

Лемма 1. Сфера достижимости V_T является выпуклым множеством.

Доказательство. Пусть $\bar{x}_0, \tilde{x}_0 \in V_T$. По определению это означает, что существует допустимое управление $\bar{u}(t)$, $t \in [t_0, \bar{t}_1]$, где $\bar{t}_1 \leq t_0 + T$, которое переводит фазовую точку x из положения \bar{x}_0 в точку 0 . Аналогично, существует допустимое управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [t_0, \tilde{t}_1]$, где $\tilde{t}_1 \leq t_0 + T$, которое переводит фазовую точку x из положения \tilde{x}_0 в точку 0 .

Можно считать, что $\bar{t}_1 = t_0 + T$. В противном случае решим систему (2) с начальным условием $\bar{x}(\bar{t}_1) = 0$, доопределив управление $\bar{u}(t)$, как показано на рис. 7:

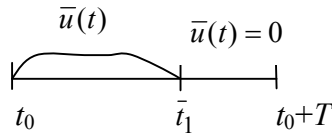


Рис. 7

Получим, что $\bar{x}(t) = 0$ на интервале $[\bar{t}_1, t_0 + T]$. Аналогично, для $\tilde{u}(\cdot)$ и $\tilde{x}(\cdot)$ можно считать, что $\tilde{t}_1 = t_0 + T$. Пусть $y_0 = \lambda \bar{x}_0 + (1 - \lambda) \tilde{x}_0$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Тогда управление $u^*(t) = \lambda \bar{u}(t) + (1 - \lambda) \tilde{u}(t)$, определенное на интервале $[t_0, t_0 + T]$, является допустимым управлением. Ему соответствует траектория $x^*(t) = \lambda \bar{x}(t) + (1 - \lambda) \tilde{x}(t)$, по которой фазовая точка переходит из начального положения $x^*(t_0) = \lambda \bar{x}_0 + (1 - \lambda) \tilde{x}_0 = y_0$ в конечное положение $x^*(t_0 + T) = 0$. ■

Лемма 2. Если x_0 – внутренняя точка V_T , то из x_0 можно перейти в точку 0 за время строго меньше T .

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \text{Int} V_T$. Из определения внутренней точки следует, что существует шар $B(x_0, r) \subseteq V_T$. Так

как из леммы 1 следует, что множество V_T выпукло, то по лемме Каратеодори существуют $(n+1)$ точка z_1, \dots, z_{n+1} [3], расположенные внутри шара и такие, что симплекс, образованный ими, содержит x_0 строго внутри. Следовательно, в силу непрерывности расстояния найдутся достаточно малые окрестности точек z_j , содержащие точки y_j из V_T , такие, что симплекс, образованный этими точками из сферы достижимости, как показано на рис. 8, содержит x_0 . Тогда по определению множества V_T существуют допустимые управления $u_s(t)$ на интервале $[t_0, t_0 + T]$ такие, что $x_s(t_0) = y_s$, $x_s(t_0 + T) = 0$, $s = 1, \dots, n+1$. Так как функции $x_s(t)$ непрерывны, то существует $\varepsilon > 0$, для которого $x_0 \in \text{Int Co}\{x_1(t_0 + \varepsilon), \dots, x_{n+1}(t_0 + \varepsilon)\}$. Но все точки $x_s(t_0 + \varepsilon)$, $s = 1, \dots, n+1$, лежат в сфере достижимости $V_{T-\varepsilon}$. Это означает, что $x_0 \in V_{T-\varepsilon}$. ■

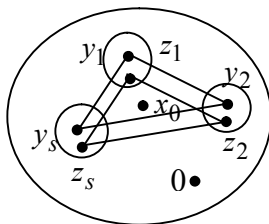


Рис. 8

Лемма 3. Пусть $u(t)$ – допустимое управление на интервале $[t_0, t_1]$, $x(t)$ – соответствующее решение, $P(t)$ – произвольное решение сопряженной системы $\dot{P} = -PA$ на данном интервале. Тогда во всех точках непрерывности управления $u(t)$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}(P(t)x(t)) = P(t)Bu(t),$$

$$P(t_1)x(t_1) - P(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} P(t)Bu(t)dt.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P(t)x(t)) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) = -P(t)Ax(t) + P(t)(Ax(t) + Bu(t)) = \\ &= P(t)Bu(t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Перейдем к доказательству принципа максимума, то есть докажем, что оптимальное управление удовлетворяет (4).

Пусть $u(t)$ – оптимальное управление на интервале $[t_0, t_1]$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$. Положим $T = t_1 - t_0$. Из леммы 2 следует, что x_0 – граничная точка

сферы достижимости V_T . Следовательно, по теореме отделимости [2, 3] существует вектор $d \neq 0$ такой, что для всех векторов x из множества V_T выполняется неравенство $d(x - x_0) \geq 0$. Рис. 9 иллюстрирует сказанное выше.

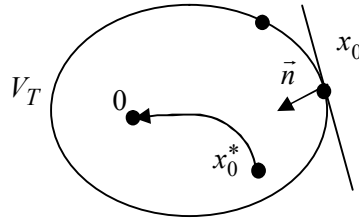


Рис. 9

Пусть P – решение $\dot{P} = -PA$ с начальным условием $P(t_0) = \bar{n}$. Для него выполняется равенство $P(t)Bu(t) = \max_{u \in U} P(t)Bu$ для всех t из интервала $[t_0, t_1]$. Действительно, допустим противное: пусть существует $\bar{\tau} \in [t_0, t_1]$ такое, что $P(\bar{\tau})Bu(\bar{\tau}) < \max_{u \in U} P(\bar{\tau})Bu$. Это означает, что существует такое $v \in U$, что $P(\bar{\tau})Bu(\bar{\tau}) < P(\bar{\tau})Bv$. Из непрерывности управления следует, что существует интервал $[\tau_0, \tau_1] \subset [t_0, t_1]$ такой, что $P(\tau)Bu(\tau) < P(\tau)Bv$ для всех $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$. Пусть

$$u^*(t) = \begin{cases} v, & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ u(t), & [t_0, t_1] \setminus [\tau_0, \tau_1]. \end{cases}$$

Очевидно, что u^* – допустимое управление. Пусть $x^*(t)$ – соответствующая ему траектория и $x^*(t_1) = 0$. Пусть $x_0^* = x^*(t_0)$. Имеем, что $x_0^* \in V_T$ и, следовательно, $d(x_0^* - x_0) \geq 0$. Из леммы 3 имеем:

$$\begin{aligned} d(x_0^* - x_0) &= P(t_0)(x^*(t_0) - x(t_0)) = (P(t_1)x(t_1) - P(t_0)x(t_0)) - \\ &- (P(t_1)x^*(t_1) - P(t_0)x^*(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} [P(t_1)Bu(t) - P(t)Bu^*(t)] dt = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} [P(\tau)Bu(\tau) - P(\tau)Bv] d\tau < 0. \end{aligned}$$

Противоречие с неравенством, которое следует из теоремы отделимости. ■

§ 4. Достаточность принципа максимума

Пусть X – конечномерное пространство, $Y \subseteq X$ – подпространство, $A: X \rightarrow X$ – линейное преобразование. Будем говорить, что Y – подпро-

пространство инвариантно относительно A , если $A(Y) \subseteq Y$. Когда $Y \neq X$, то Y – собственное подпространство. Пусть $a \in X$. Элемент a принадлежит собственному инвариантному подпространству Y тогда и только тогда, когда вектора $\{a, Aa, \dots, A^{k-1}a\}$ линейно зависимы, что очевидно, так как из независимости этой системы следует, что подпространство Y совпадает с X .

Будем говорить, что для задачи быстродействия выполнено *условие общности положения*, если для каждого вектора w параллельного некоторому ребру многогранника U , вектор Bw не принадлежит никакому собственному инвариантному подпространству A , то есть вектора $\{Bw, ABw, \dots, A^{k-1}Bw\}$ образуют линейно зависимую систему.

Замечание 1. Множество векторов, для которых $\det\{Bw, ABw, \dots, A^{k-1}Bw\} \neq 0$, является нигде неплотным. Следовательно, добиться выполнения условия общности положения можно всегда сколь угодно малым сдвигом. Напомним, что множество называется нигде неплотным, если его дополнение всюду плотно (см. приложение).

Лемма 4. Пусть $P(t)$ – нетривиальное решение сопряженной системы $\dot{P} = -PA$, $a \neq 0$ такое, что $P(\tau)a = 0$ для всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$. Тогда a принадлежит некоторому собственному инвариантному подпространству относительно преобразования A .

Доказательство. Пусть $y \in Y$, где $Y = \{y \in R^n : P(\tau)y = 0, \tau \in (\tau_0, \tau_1)\}$ – инвариантное собственное подпространство относительно A . Тогда $\frac{d}{dt}(P(t), y) = 0$, что эквивалентно условию $\dot{P}(t)y = 0$. Следовательно, $-P(t)Ay = 0$. Таким образом $Ay \in Y$ и $Y \neq R^n$, так как существует $\bar{\tau} \in (\tau_0, \tau_1)$ такое, что $P(\bar{\tau}) \neq 0$. Тогда $P(\bar{\tau}) \notin Y$, так как $P(\bar{\tau}) \neq 0$. ■

Теорема 3. Пусть $u(t)$ – допустимое управление, заданное на отрезке $[t_0, t_1]$, $x(t)$ – соответствующая траектория, удовлетворяющая начальным условиям $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = 0$. Тогда для оптимальности управления необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2 (принцип максимума).

Достаточность. Пусть существует $P(t) \neq 0$ такое, что $\dot{P} = -PA$ и $\max_{u \in U} P(t)Bu = P(t)Bu(t)$. Докажем, что лучшего управления, чем $u(t)$ не существует, то есть не существует другого управления u^* , которое переводит

фазовую точку x из положения x_0 в положение 0 за меньшее время, чем $(t_1 - t_0)$.

Предположим противное: пусть на интервале $[t_0, t^*]$ определен управляемый процесс $(u^*(t), x^*(t))$ такой, что $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(t^*) = 0$ и $t^* < t_1$. Очевидны следующие неравенства:

$$1) P(t)Bu(t) \geq 0, t \in [t_0, t_1], \text{ так как } 0 \in U;$$

2) $P(t)Bu(t) \geq P(t)Bu^*(t)$, $t \in [t_0, t^*]$, поскольку $u^*(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

$$\begin{aligned} \text{Далее, } P(t^*)x(t^*) &= [P(t^*)x(t^*) - P(t_0)x(t_0)] - [P(t^*)x^*(t^*) - P(t_0)x^*(t_0)] = \\ &= \int_{t_0}^{t^*} [P(t)Bu(t) - P(t)Bu^*(t)] dt \geq 0, \end{aligned}$$

$$P(t^*)x(t^*) = -[P(t_1)x(t_1) - P(t^*)x(t^*)] = -\int_{t^*}^{t_1} P(t)Bu(t) dt \leq 0, \quad \text{так как}$$

$$P(t)Bu(t) = 0 \text{ для всех } t \in [t^*, t_1]. \text{ Следовательно, } \max_{u \in U} P(t)Bu = 0, t \in [t^*, t_1].$$

Пусть U_1 – грань многогранника минимальной размерности и $0 \in U_1$. Следовательно, $\dim U_1 \geq 1$, так как по условию 0 не является вершиной U . Поэтому в U_1 имеется не меньше двух соседних вершин. Пусть (u_1, u_2) – одна из таких пар соседних вершин. Нулевой вектор является относительно внутренней точкой U_1 , так как $0 \in U_1$ и 0 не является вершиной U_1 . Следовательно, $\max_{u \in U_1} P(t)Bu = 0$. Так как $\max_{u \in U} P(t)Bu = 0$, $t \in [t^*, t_1]$, то линейная функция $P(t)Bu$, достигающая максимума во внутренней точке, тождественно равна 0 на грани U_1 .

Пусть $w = u_1 - u_2$. Следовательно, $P(t)Bw = 0$, $t \in [t^*, t_1]$. По лемме 4 вектор Bw принадлежит некоторому собственному инвариантному пространству относительно преобразования A , что противоречит условию общности положения. ■

Теорема 4 (о конечности переключений). Для любого нетривиального решения $P(t)$ сопряженной системы $\dot{P} = -PA$ соотношение $P(t)Bu(t) = \max_{u \in U} P(t)Bu$ однозначно определяет управление $u(t)$. Кроме того, управление $u(t)$ оказывается кусочно-постоянным и его значениями являются лишь вершины многогранника U (рис. 10).

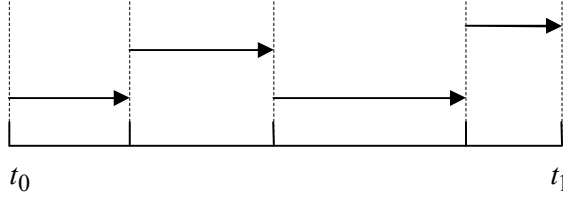


Рис. 10

Доказательство. Очевидно, что $P(t)Bu$ – функция линейная по u при фиксированном t . Она также является аналитической функцией по t . Значит, она разлагается в ряд Тейлора и всюду сходится. Зафиксируем отрезок $[t_0, t_1]$. Точки этого отрезка можно разбить на две группы:

- 1) точки первого рода – это те точки, где $P(t)Bu(t)$ достигает максимума в единственной точке, а именно, в вершине многогранника U ;
- 2) точки второго рода – остальные точки, то есть те точки, где максимум $P(t)Bu(t)$ достигается на некоторой грани размерности не меньше единицы.

Докажем, что множество точек второго рода конечно. Предположим, что их бесконечно много. Возьмем на грани U две соседние вершины u_1 и u_2 . Рассмотрим вектор $w = u_1 - u_2$, тогда $P(t)Bw = 0$. Из свойства аналитических функций $P(t)Bw \equiv 0$ на отрезке, что противоречит условию общности положения.

Так как точек второго рода конечное число, то, отрезок $[t_0, t_1]$ делится этими точками на конечное число отрезков. Рассмотрим открытый промежуток J между двумя точками второго рода. Пусть $u(t^1) = e^1$, $u(t^2) = e^2 \neq e^1$. Рассмотрим график функции $P(t)Be^1$. Пусть $\psi(t) = \max_{e \neq e^1} P(t)Be$. При этом $P(t^1)Be^1 > \psi(t^1)$, $P(t^2)Be^1 < \psi(t^2)$. Если для всех $t \in (t^1, t^2)$ выполняется $P(t)Be^1 = \psi(t)$, то t – точка на грани. Но по построению (t^1, t^2) не содержит точек второго рода. Значит, $u(t)$ изменяется только в точках второго рода. ■

Теорема 5. Пусть $U = \{u : a^\beta \leq u^\beta \leq b^\beta, \beta = 1, \dots, r\}$, собственные значения матрицы A – вещественные. Тогда в оптимальном управлении $u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ каждая функция $u^\beta(t)$ кусочно-постоянна, принимает лишь значения a^β, b^β и имеет не более $(n - 1)$ точек переключения.

Доказательство.

$$\max_u p(t)Bu = \max_{u \in U} \sum_{\beta=1}^r \left[\sum_{\alpha=1}^n p_\alpha(t) B_\beta^\alpha \right] u^\beta = \sum_{\beta=1}^r \max_{a^\beta \leq u^\beta \leq b^\beta} \left[\sum_{\alpha=1}^n p_\alpha(t) B_\beta^\alpha \right] u^\beta.$$

Пусть $\psi_\beta(t) = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha(t) B_\beta^\alpha$. Докажем, что функция ψ_β имеет на отрезке $[t_0, t]$ не более, чем $(n-1)$ нулей. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – различные собственные значения A кратности k_1, \dots, k_s . Тогда $p_\alpha(t)$ имеет вид: $c_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + c_s(t)e^{\lambda_s t}$, где $c_i(t)$ – полином степени $(k_i - 1)$. Значит, $\psi_\beta(t)$ имеет такой же вид. Если бы $\psi_\beta \equiv 0$, то максимум достигался бы на целом ребре, что противоречит условию общности положения. Обозначим через d_1 сумму степеней полиномов, через d_2 – число слагаемых: $d_1 + d_2 = n$. Будем доказывать утверждение индукцией по n .

База индукции очевидна, так как функция $c_1(t)e^{\lambda_1 t}$ имеет те же корни, что и полином $c_1(t)$.

Шаг индукции: $d_1 + d_2 = n$, предположим противное, то есть функция $e^{\lambda_1 t} [c_1(t) + \dots + c_s(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t}]$ имеет не менее n нулей. Следовательно, и $[c_1(t) + \dots + c_s(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t}]$ имеет не менее n нулей. Так как между нулями данной функции всегда лежит ноль ее производной $[c_1'(t) + \dots + c_s'(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t}]$, то последняя имеет не менее $(n-1)$ нулей. Действительно, для производной сумма степеней полиномов и числа слагаемых не превосходит величины $n-1$. А по предположению индукции имеется не более $(n-1)-1 = n-2$ нулей. Получили противоречие с предположением индукции. ■

Таким образом, в управлении не более $(n-1)r$ точек переключения, где n – порядок системы уравнений, определяющих движение фазовой точки.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приводятся наиболее употребительные общематематические обозначения, а также часто используемые в пособии сведения из математического анализа и линейной алгебры.

$x \in X$ – элемент x принадлежит множеству X .

$x \notin X$ – элемент x не принадлежит множеству X .

$X \subseteq Y$ – множество X содержится в множестве Y , что не исключает случая $X = Y$.

$X \cup Y, \bigcup_{i \in I} X_i$ – объединение множеств.

$X \cap Y, \bigcap_{i \in I} X_i$ – пересечение множеств.

$X \setminus Y$ – теоретико-множественная разность множеств.

$X \times Y$ – декартово произведение множеств.

\emptyset – пустое множество.

$\{x, y, z\}$ – множество, состоящее из элементов x, y, z .

$|X|$ – число элементов конечного множества X .

$[t]$ – целая часть числа t , то есть наибольшее целое число, меньшее или равное t .

$\lceil t \rceil$ – наименьшее целое число, большее или равное t .

R – числовая прямая, множество действительных чисел.

R_+ – множество неотрицательных действительных чисел.

R^n – n -мерное координатное пространство.

$R_+^n, R_{\geq}^n = \{x \in R^n \mid x \geq 0\}$ – неотрицательный ортант в R^n .

$x = (x_1, \dots, x_n)$ – стандартное обозначение элементов из R^n , для обозначения координат данного элемента всегда используется тот же символ с индексом внизу. Элементы из R^n называются также точками или векторами. За исключением специально оговоренных мест для нас несущественно, как записывается вектор, а именно: в виде строки или в виде столбца.

$0 = (0, \dots, 0)$ – нулевой элемент в R^n .

e^j – j -ый единичный орт в R^n , то есть $e_j^j = 1$ и $e_i^j = 0$ при всех $i \neq j$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ – сумма элементов x и y из R^n .

$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ – произведение элемента x на число λ .

$X \pm Y = \{z \in R^n \mid z = x \pm y, x \in X, y \in Y\}$ – алгебраические сумма и разность множеств X и Y из R^n .

$\text{lin } X$ – линейная оболочка множества X с R^n , то есть пересечение всех линейных подпространств пространства R^n , содержащих X .

$(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ – скалярное произведение элементов x и y , эти элементы называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – евклидова норма элемента x .

$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ – норма максимума элемента x .

Для любых элементов x и y справедливо неравенство Коши-Буняковского: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Для элементов x и y из R^n пишем: $x \geq y$ и $x > y$, если, соответственно, $x_j \geq y_j$ и $x_j > y_j$ при всех $j \in \{1, \dots, n\}$.

Если дана матрица A размера $m \times n$ (с m строками и n столбцами), то a_i – ее i -я строка, A_j – j -й столбец, a_{ij} – элемент на пересечении i -й строки и j -го столбца.

A^T – матрица, транспонированная к матрице A .

A^{-1} – матрица, обратная к квадратной матрице A .

$|A| \equiv \det(A)$ – определитель квадратной матрицы A .

$\text{rang}(A)$ – ранг матрицы A , то есть максимальное число ее линейно независимых строк или столбцов.

$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ – норма матрицы A ; очевидно, что $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ при всех x .

E – единичная матрица (на диагонали стоят единицы, остальные элементы – нули).

Если даны матрица A размера $m \times n$, векторы $x \in R^n$ и $y \in R^n$, то:

Ax – вектор из R^m с координатами $(Ax)_i = \langle a_i, x \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $i = 1, \dots, m$,

yA – вектор из R^n с координатами $(yA)_j = \langle y, A_j \rangle = \sum_{i=1}^m y_i a_{ij}$, $j = 1, \dots, n$.

В литературе часто используется обозначение $y^T A$, подчеркивающее, что вектор, умножаемый на матрицу слева, является строкой, а умножаемый справа – столбцом. Там, где не возникает сомнения в однозначности прочтения формулы, символ T опускается.

Главным угловым минором k -го порядка некоторой матрицы называется определитель матрицы, составленной из первых k строк и первых k столб-

цов исходной матрицы.

Критерий Сильвестра. Симметричная матрица является:

а) положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные угловые миноры положительны;

б) отрицательно определенной, когда все ее главные угловые миноры нечетного порядка отрицательны, четного – положительны;

в) неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда все миноры, образованные строками и столбцами исходной матрицы с одинаковыми номерами, неотрицательны;

г) неположительно определенной, когда все миноры, образованные строками и столбцами исходной матрицы с одинаковыми номерами, нечетного порядка неположительны, а четного – неотрицательны.

$B = U_\varepsilon(a) = \{x \in R^n \mid \|x - a\| \leq \varepsilon\}$ – шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $a \in R^n$.

$\{x^k\}_{k \in N}$ – последовательность точек x^1, x^2, \dots .

Говорят, что точка a является пределом последовательности $\{x^k\}_{k \in N}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $K \geq 1$ такое, что $x^k \in U_\varepsilon(a)$

для всех натуральных $k \geq K$, при этом пишут $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ или $x^k \rightarrow a$ при

$k \rightarrow \infty$.

$f: X \rightarrow Y$ – функция (отображение) с областью определения X и областью значений Y .

Говорят, что $a \in R^m$ является пределом (предельным значением) функции $f: X \rightarrow Y$ ($X \subset R^n, Y \subset R^m$) в точке $x_0 \in X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $f(x) \in U_\varepsilon(a)$ для всех $x \in U_\delta(x_0) \cap X$; при этом пишут: $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ или $f(x) \rightarrow a$ при $x \rightarrow x_0$.

Функция $f: X \rightarrow Y$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ и непрерывной на множестве $A \subset X$, если это равенство справедливо при всех $x_0 \in A$.

$\inf_{x \in X} f(x)$, $\sup_{x \in X} f(x)$ – точные нижняя и верхняя грани числовой функции f

на множестве X .

$\min_{x \in X} f(x)$, $\max_{x \in X} f(x)$ – минимальное и максимальное значения числовой

функции f на множестве X , то есть это величины $\inf_{x \in X} f(x)$ и $\sup_{x \in X} f(x)$ в

предположении, что они достигаются на некоторых элементах из X .

$\text{int } X = \{x \in R^n \mid \exists \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(x) \subset X\}$ – внутренность множества $X \subset R^n$;

элементы из $\text{int } X$ называются внутренними точками множества X ; множество X называется открытым, если $X = \text{int } X$.

$\bar{X} = \{x \in R^n \mid \forall \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(x) \cap X \neq \emptyset\}$ – замыкание множества $X \subset R^n$; элементы из \bar{X} называются предельными точками множества X ; множество X называется замкнутым, если $X = \bar{X}$.

$\partial X = \bar{X} \setminus \text{int } X$ – граница множества X ; элементы из ∂X называются граничными точками множества X .

Окрестностью точки x (множества X) называется любое множество, содержащее x (соответственно, X) в своей внутренности.

Множество X называется ограниченным, если существует число $R > 0$ такое, что $\|x\| < R$ при всех $x \in X$.

Множество $X \subset R^n$ называется компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Множество S называется всюду плотным в топологическом пространстве C , если в каждом открытом множестве C содержится хотя бы одна точка из S .

Ниже, говоря о дифференциальных характеристиках функции f в точке x^* , подразумеваем, что $x^* \in R^n$ и f – числовая функция, определенная в некоторой окрестности точки x^* .

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x^* + \alpha e^j) - f(x^*)}{\alpha} \text{ – частная производная функции } f \text{ в}$$

точке x^* по аргументу x_j .

$$f'(x^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \right) \text{ – градиент (вектор частных производных)}$$

функции f в точке x^* .

Функция f называется дифференцируемой в точке x^* , если градиент $f'(x)$ существует и при всех достаточно малых $h \in R^n$ справедлива формула $f(x^* + h) = f(x^*) + \langle f'(x^*), h \rangle + o(\|h\|)$.

Здесь, как и всюду далее, $o(\|h\|)$ – некоторая числовая функция числового аргумента, удовлетворяющая условию $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$.

Функция f называется непрерывно дифференцируемой в точке x^* , если градиент $f'(x)$ существует в некоторой окрестности точки x^* и непрерывен в самой точке x^* .

Говорят, что функция f дифференцируема (непрерывно дифференцируе-

ма) на множестве $X \subset R^n$, если она дифференцируема (непрерывно дифференцируема) в каждой точке из X . При этом, как следует из предыдущего, функция f фактически должна быть определена в некоторой окрестности множества X .

Если функция f дифференцируема на выпуклом множестве $X \subset R^n$, то для любых точек $x, x^* \in R^n$ справедлива формула Лагранжа $f(x) - f(x^*) = \langle f'(x^* + \alpha h), h \rangle$, где $h = x - x^*$, а $\alpha \in (0, 1)$.

Для любого вектора $h \in R^n$ используем обозначение $f'(x^*, h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{f(x^* + \alpha h) - f(x^*)}{\alpha}$, если $\|h\| = 1$, то величина $f'(x^*, h)$ называется производной функции f в точке $x, x^* \in R^n$ по направлению вектора h . Функция f называется дифференцируемой в точке x^* по направлению вектора h , если величина $f'(x^*, h)$ существует и конечна.

Если функция f дифференцируема в точке x^* , то f дифференцируема в x^* по направлению любого вектора h , причем $f'(x^*, h) = \langle f'(x^*), h \rangle$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)$ – вторая частная производная функции f в точке $x^* \in R^n$ по аргументам x_i, x_j , то есть частная производная функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ в точке x^* по аргументу x_j .

Функция f называется дважды дифференцируемой в точке x^* , если матрица $f''(x)$ существует, является симметрической матрицей и при всех достаточно малых $h \in R^n$ справедлива формула $f(x^* + h) = f(x^*) + \langle f'(x^*), h \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(x^*)h, h \rangle + o(\|h\|^2)$.

Функция f называется дважды непрерывно дифференцируемой в точке $x^* \in R^n$, если матрица $f''(x)$ существует в некоторой окрестности точки x^* и непрерывна в самой точке x^* .

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема в точке x^* , то она дважды дифференцируема в этой точке.

$C^k(T)$ – пространство непрерывных на компакте T n -мерных вектор-функций в равномерной метрике: $\|x(\cdot)\| = \|x(\cdot)\|_C = \max_{t \in T} |x(t)|$.

$C_m^n([t_0, t_1])$ – пространство m раз непрерывно-дифференцируемых отобра-

жений отрезка $[t_0, t_1]$ в R^n . Норма в пространстве C_m^n задается равенством $\|x(\cdot)\|_{C_m^n} = \max_{0 \leq i \leq m} \|x^{(i)}(\cdot)\|_{C^n}$.

$W_{P,m}^n([t_0, t_1])$ – банахово пространство абсолютно непрерывных вместе со своими производными до порядка $(m-1)$ включительно отображений отрезка $[t_0, t_1]$ в R^n , производная порядка m принадлежит L_P^n . Норма в про-

странстве $W_{P,m}^n$ задается равенством $\|x(\cdot)\|_{W_{P,m}^n} = \sum_{i=0}^m \|x^{(i)}(\cdot)\|_P$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.:Наука, 1969.
- [2] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
- [3] Глебов Н. И., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В. Методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2000.
- [4] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [5] Ларин Р. М., Плясунов А. В., Пяткин А. В. Методы оптимизации. Примеры и задачи. Новосибирск: НГУ, 2003.
- [6] Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.
- [7] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.
- [8] Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
- [9] Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005.
- [10] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.
- [11] Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.
- [12] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.:Наука, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Г л а в а 1. Основные определения и обозначения	5
§1. Экстремальные задачи. Определения	5
§2. Элементы выпуклого анализа.....	8
§3. Начальные сведения о численных методах оптимизации.....	12
§4. Сходимость методов оптимизации.....	14
Г л а в а 2. Численные методы безусловной оптимизации	20
§1. Метод покоординатного спуска.....	20
§2. Методы случайного поиска	23
§3. Градиентные методы	25
§4. Метод Ньютона	28
Г л а в а 3. Численные методы решения задач линейного Программирования	31
§1. Прямой симплекс-метод	32
1.1. Базис и базисное решение	32
1.2. Элементарные преобразования. Симплекс-таблицы.....	35
1.3. Алгоритм симплекс-метода	44
§2. Модифицированный симплекс-метод	47
§3. Лексикографический прямой симплекс-метод.....	48
§4. Метод искусственного базиса.....	53
§5. Двойственный симплекс-метод	58
§6. Лексикографический двойственный симплекс-метод.....	61
§7. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования.....	63
§8. Геометрическая интерпретация прямого симплекс-метода.....	67
Г л а в а 4. Численные методы условной оптимизации	69
§1. Метод возможных направлений	69
§2. Метод Келли или метод секущих плоскостей	75
§3. Первый (или циклический) алгоритм Гомори.....	77
3.1. Задача ЦЛП, отсечение Гомори	78
3.2. Первый алгоритм Гомори	79
3.3. Обоснование конечности алгоритма Гомори	81
§4. Метод ветвей и границ.....	83
4.1. Схема метода	84
§5. Метод ветвей и границ для решения задач нелинейного программирования.....	86
§6. Методы штрафа	88
6.1 Метод внешних штрафов	89
6.2 Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций.....	92

Глава 5. Задачи классического вариационного исчисления	95
§1. Постановка задачи классического вариационного исчисления.....	95
§2. Сильный и слабый экстремум в задачах классического вариационного исчисления.....	98
§3. Допустимые управления и управляемые процессы в задачах оптимального управления. Оптимальные процессы	99
§4. Элементарный вывод необходимых условий экстремума для простейших задач классического вариационного исчисления.....	100
Глава 6. Задачи оптимального управления	106
§1. Постановка задачи оптимального управления	106
§2. Формулировка принципа максимума для линейной задачи Быстродействия	108
§3. Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия.....	112
§4. Достаточность принципа максимума	115
Приложение	120
Литература	126