Матроиды

пересечение матроидов

лекции 2 – 4

Системой подмножеств $S=(E,\Im)$ называется пара конечное множество E вместе с семейством $\Im$ подмножеств множества E, замкнутым относительно включения, т.е. если $A\in\Im$ и $A'\subseteq A$, то $A'\in\Im$.

Элементы семейства $\Im$ называются *независимыми*.

Подмножество $D\subseteq E$ не входящее в $\Im$, называется *зависимым*.

Комбинаторная задача оптимизации для системы подмножеств $(E,\Im)$*:*

Для каждого $e\in E$ *задан вес* $w(e)\geq 0$.

Требуется найти независимое подмножество, имеющее наибольший общий вес.

"Жадный" алгоритм для матроидов

```
begin
```

$I := \varnothing$;

while $E \neq \varnothing$ do

begin

пусть e - элемент из E с наибольшим весом;

удалить e из E;

if $(I + e) \in \Im$ then $I := I + e$

end

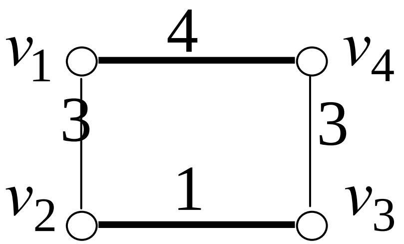
end;

Решает ли жадный алгоритм комбинаторную задачу оптимизации?

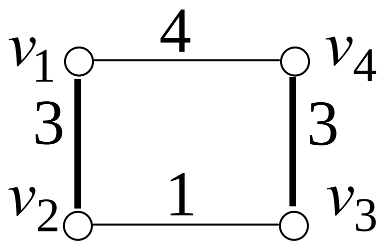
Пример 1.

Дано: граф $G=(V,E)$, веса $w(e)\geq 0, \forall e\in E$

Найти: максимальное взвешенное паросочетание, т.е. подмножество $B\subseteq A$ наибольшего веса так, чтобы никакие два ребра не имели общей вершины.



Решение жадного алгоритма



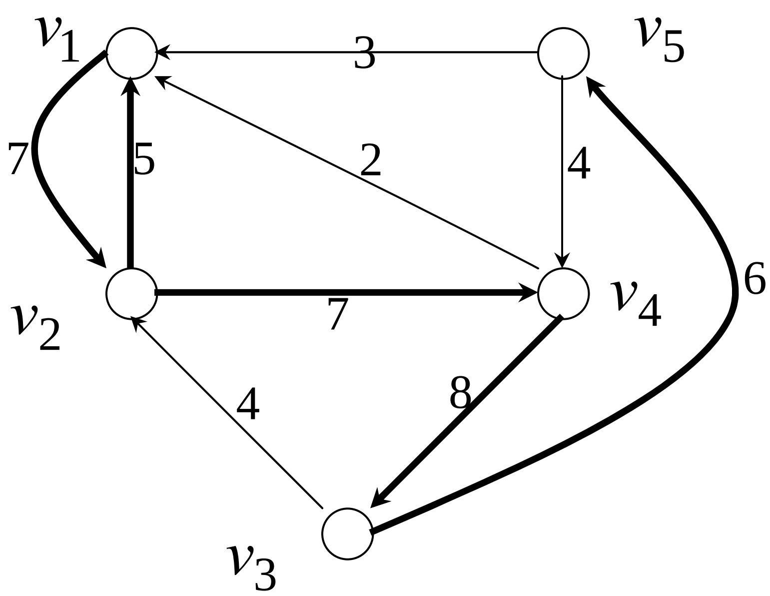
Оптимальное решение

Решает ли жадный алгоритм комбинаторную задачу оптимизации?

Пример 2.

Дано: орграф $D=(V,A)$, веса $w(a)\geq 0, \forall a\in A$

Найти: подмножество $B\subseteq A$ наибольшего веса так, чтобы никакие две дуги из B не имели общего конца.



Оптимальное решение, найденное жадным алгоритмом

Система подмножеств $M=(E,\mathfrak{I})$ называется M *матроидом*, если жадный алгоритм корректно решает любую индивидуальную комбинаторную задачу оптимизации для системы M.

Теорема 1.

Пусть $M=(E,\mathfrak{I})$ — система подмножеств. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) M — матроид;

(2) если I_p, $I_{p+1}\in\mathfrak{I}$, где $|I_p|=p$ и $|I_{p+1}|=p+1$, то существует такой элемент $e\in I_{p+1}\setminus I_p$, что $I_p\cup e\in\mathfrak{I}$;

(3) если $A\subseteq E$ и I, I' — максимальные по включению подмножества множества A, $|I|=|I'|$.

Доказательство. (1)⇒(2): пусть (2) не выполняется,

т.е. $\exists$ множества I_p, $I_{p+1} \in \Im \,|\, |I_p| = p$ и $|I_{p+1}| = p+1$, и ни для какого $e \in I_{p+1} \setminus I_p$ подмножество $I_p \cup e \notin \Im$.

Выберем следующие веса на E: $w(e) = \begin{cases} p+2, e \in I_p, \\ p+1, e \in I_{p+1} \setminus I_p, \\ 0, e \notin I_{p+1} \cup I_p. \end{cases}$

Заметим, что I_p не оптимально, т.к. $w(I_{p+1}) \geq (p+1)^2 > p(p+2) = w(I_p)$.

Жадный алгоритм дает неоптимальное решение I_p, т.к. он выберет сначала все элементы I_p, а далее не сможет улучшить вес, т.к. для остальных элементов $I_p \cup e \notin \Im$, либо $w(e) = 0$. Следовательно, M — не матроид, противоречие.

(2)$\Rightarrow$(3): пусть (2) выполняется, пусть I, I' — два максимальных независимых подмножества множества $A \subseteq E$.

Пусть $|I|<|I'|$. Получим отбрасыванием ($|I'|$-$|I|$-1) элементов такое множество $I'' \subseteq I'$, что $|I''|=|I|+1$. По (2) можно найти элемент $e \in I''\backslash I \mid I \cup e \in \Im$. Следовательно, I не максимальное по включению независимое подмножество множества A. Противоречие.

(3)$\Rightarrow$(1): пусть (3) выполняется для M. Покажем, что жадный алгоритм решает M. Предположим противное: для весов $w(e)$, $e \in E$ решение жадного алгоритма: $I = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$, но $\exists J = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_j\} \in \Im \mid w(J) > w(I)$. Пусть $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_i)$ и $w(e'_1) \geq w(e'_2) \geq \ldots \geq w(e'_i)$.

J — максимальное по включению независимое подмножество в E.

I — максимальное по включению независимое подмножество в E (по построению). По св-ву (3) $i = j$.

Покажем, что $w(e_m) \geq w(e'_m)$, чтобы получить противоречие с предположением, что $w(I) > w(J)$.

Индукция. Для $m = 1$ верно.

Пусть $w(e_m) < w(e'_m)$ для некоторого $m > 1$ и $w(e_s) \geq w(e'_s)$ для $s = 1,...,(m-1)$. Рассмотрим $A = \{e \in E : w(e) \geq w(e'_m)\}$. Множество $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}\}$ - максимальное по включению независимое подмножество в A, т.к. если $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}, e\} \in \mathfrak{I}$ и $w(e) \geq w(e'_m) > w(e_m)$, то жадный алгоритм должен был бы вместо e_m выбрать e в качестве следующего элемента множества $\in \mathfrak{I}$, это противоречит (3) т.к. $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ — другое независимое подмножество в A. Доказали.

Пусть $M = (E, \mathfrak{I})$ – матроид и $A \subseteq E$.

Ранг $r(A)$ *множества* A *в* M – мощность максимальных по включению независимых подмножеств множества A.

База – максимальные по включению независимые подмножества множества E.

Цикл – минимальное по включению зависимое подмножество C в E.

Оболочкой множества A – максимальное по включению множество S, содержащее A и удовлетворяющее условию $r(S) = r(A)$.

Вопросы:

$\varnothing \in \mathfrak{I}$?

Пусть B_1, B_2 - базы матроида, что можно сказать про их мощность?

Правда ли, что любое максимальное по включению независимое множество в матроиде является также максимальным по числу элементов?

Примеры.

Графический матроид.

Граф $G=(V,E)$. $\mathcal{F}$ – множество лесов графа. $M_G=(E,\mathcal{F})$ – графический матроид. $E'\subseteq E$

Ранг $r(E')=|V|-c(E')$, $c(E')$ – число связных компонент графа $G'=(V,E')$

Циклы в M_G – это циклы графа G

Оболочка $sp(E')=\{[v,u]\in E: v$ и u лежат в одной и той же компоненте графа $G'=(V,E')\}$

Матроид разбиения

E – конечное множество,

$\Pi = \{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$ – разбиение $E \mid \bigcup_{i=1,\ldots,p} E_i = E$ и $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall i, j, i \neq j$.

$I \subseteq E$, $I \in \mathfrak{I} \Leftrightarrow |I \cap E_j| \leq 1,\ j = 1,2,\ldots,p$

$M_\Pi = (E, \mathfrak{I})$ – матроид разбиения

Ранг $r(A) = |J(A)|$, где $J(A) = \{j \leq p : E_j \cap A \neq \varnothing\}$

Цикл в M_Π – любое множество, состоящее из двух элементов одного и того же E_j

Оболочка $sp(A) = \bigcup_{j \in J(A)} E_j$

Матричный матроид

E – множество столбцов некоторой $(n \times |E|)$ - матрицы A.

Элементы матрицы A - элементы любого поля K.

$\Im$ – множество линейно независимых подмножеств множества E.

$M_A = (E, \Im)$ – матричный матроид (почему?)

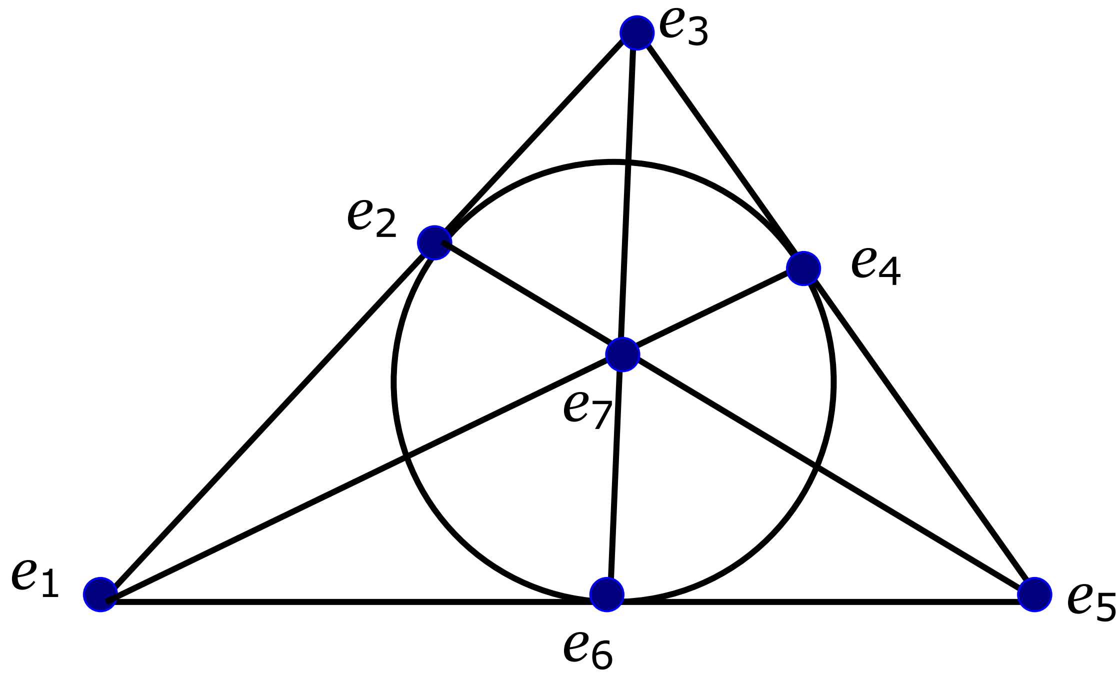
Матроид Фано. Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_7\}$ — множество элементов проективной плоскости порядка 2.

$|E| = n^2 + n + 1$, где n — простое число или степень простого числа.

- Каждые две прямые имеют ровно одну точку пересечения.
- Через любые две точки проходит ровно одна прямая.

Матроид Фано: $A \subset E$ — независимое множество, если $|A| \leq 2$ или $|A| = 3$ и A не является прямой.

Прямые: $\{e_1, e_2, e_3\}$,
$\{e_3, e_4, e_5\}$, $\{e_5, e_6, e_1\}$,
$\{e_1, e_7, e_4\}$, $\{e_3, e_7, e_6\}$,
$\{e_2, e_7, e_5\}$, $\{e_2, e_4, e_6\}$



Свойства матроидов

Теорема 2.

Пусть $I \in \mathfrak{I}$ и $e \in E$. Тогда либо $(I \cup e) \in \mathfrak{I}$, либо $(I \cup e)$ содержит единственный цикл.

Доказательство.

Предположим, что $(I \cup e) \notin \mathfrak{I}$. Пусть $C = \{c : (I \cup e) \setminus c \in \mathfrak{I}\}$. $C \subseteq I \cup e$.

C - цикл, т.к. C - зависимое подмножество, иначе его можно было бы увеличить до базиса в $(I \cup e)$, мощностью $|I|$ и имел бы вид $I \cup e \setminus d$, но тогда $d \in C$;

C - минимально, т.к. при удалении любого его элемента c, получается подмножество $C \setminus c$, содержащееся в независимом подмножестве $I \cup e \setminus c$.

Единственность. Пусть D - другой цикл в $(I \cup e)$ и в $C \setminus D$ имеется некоторый элемент c. Тогда D подмножество $I \cup e \setminus c$, и следовательно, независимо, противоречие.

Теорема 3.

Любое подмножество $A \subseteq E$ *имеет единственную оболочку* $sp(A) = \{e : r(A \cup e) = r(A)\}$.

Доказательство.

Если S – оболочка подмножества A и $e \in S$, то $r(A \cup e) = r(A)$. Иначе если $r(A \cup e) > r(A)$, то $r(S) \geq r(A \cup e) > r(A)$, противоречие. Следовательно, $S \subseteq sp(A)$. Покажем, что $r(sp(A)) = r(A)$. Общий базис двух множеств является базисом их объединения, поэтому базис множества A - базис в $sp(A)$, т.к. он - базис в $(A \cup e)$ для каждого $e \in sp(A)$.

Следствие 1.

$sp(A)$ является объединением A и всех циклов, все элементы которых, кроме одного, содержатся в A.

Следствие 2.

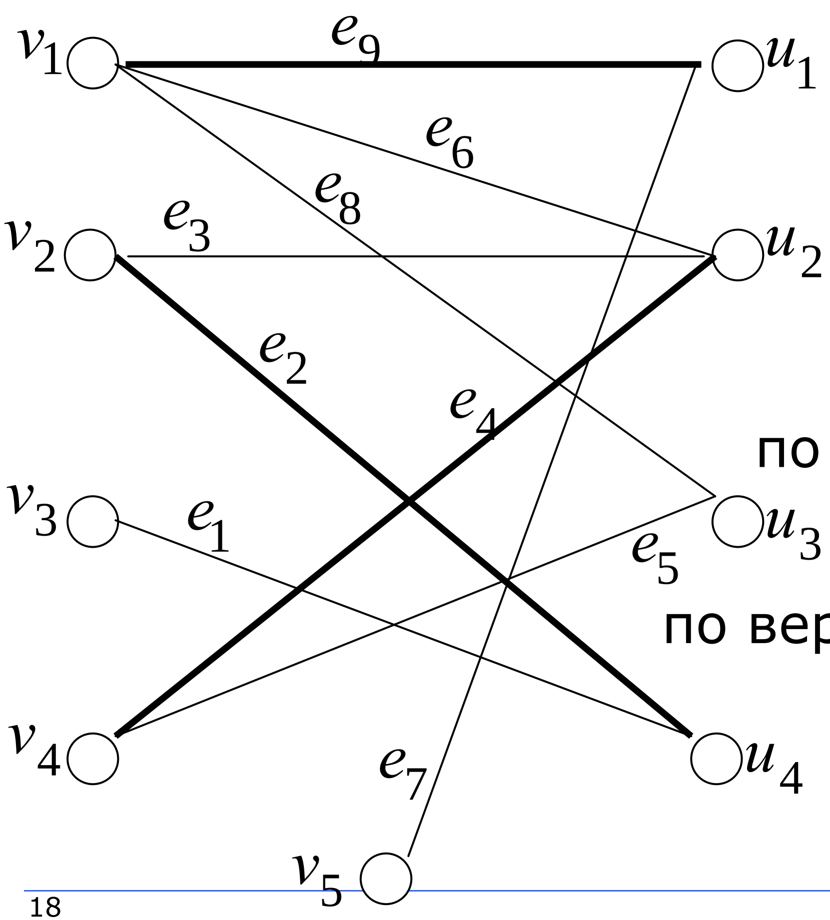
Если $I \in \mathfrak{I}$, $(I \cup e) \notin \mathfrak{I}$ и c принадлежит циклу в $(I \cup e)$, то $sp(I) = sp((I \cup e) \setminus c)$.

Пересечение двух матроидов

Пример

Двудольный граф $B=(V,U,E)$. Множество $\mathcal{M}$ паросочетаний в B.

Пара $(E,\mathcal{M})$ не является матроидом. (почему?)



Но является пересечением матроидов: $M=(E,\mathfrak{I})$ и $N=(E,\mathcal{K})$

Матроиды M и N определяются разбиением элементов E

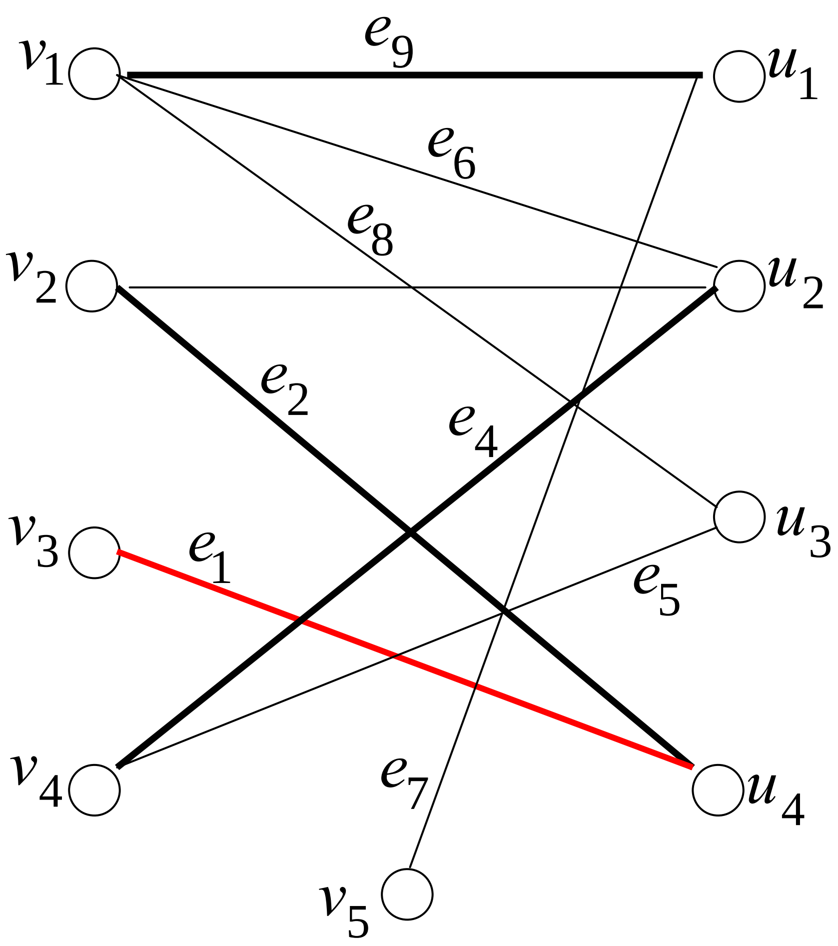
$$\Pi_V=\{\{e_9,e_6,e_8\},\{e_3,e_2\},\{e_1\},\{e_4,e_5\},\{e_7\}\}$$

по вершинам из V;

$$\Pi_U=\{\{e_9,e_7\},\{e_6,e_3,e_4\},\{e_8,e_5\},\{e_1,e_2\}\}$$

по вершинам из U;

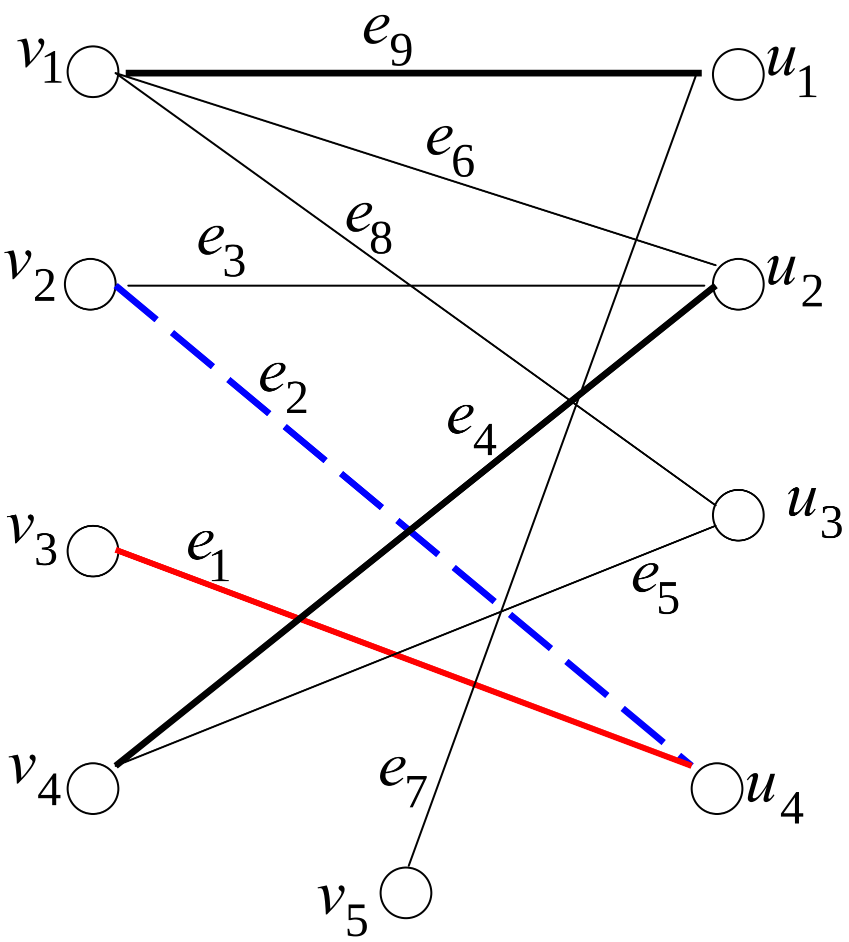
Поиск увеличивающего пути для нахождения паросочетания максимального веса



$$I = \{e_2, e_4, e_9\},\ S = \{e_1\},$$

$$I \cup e_1$$

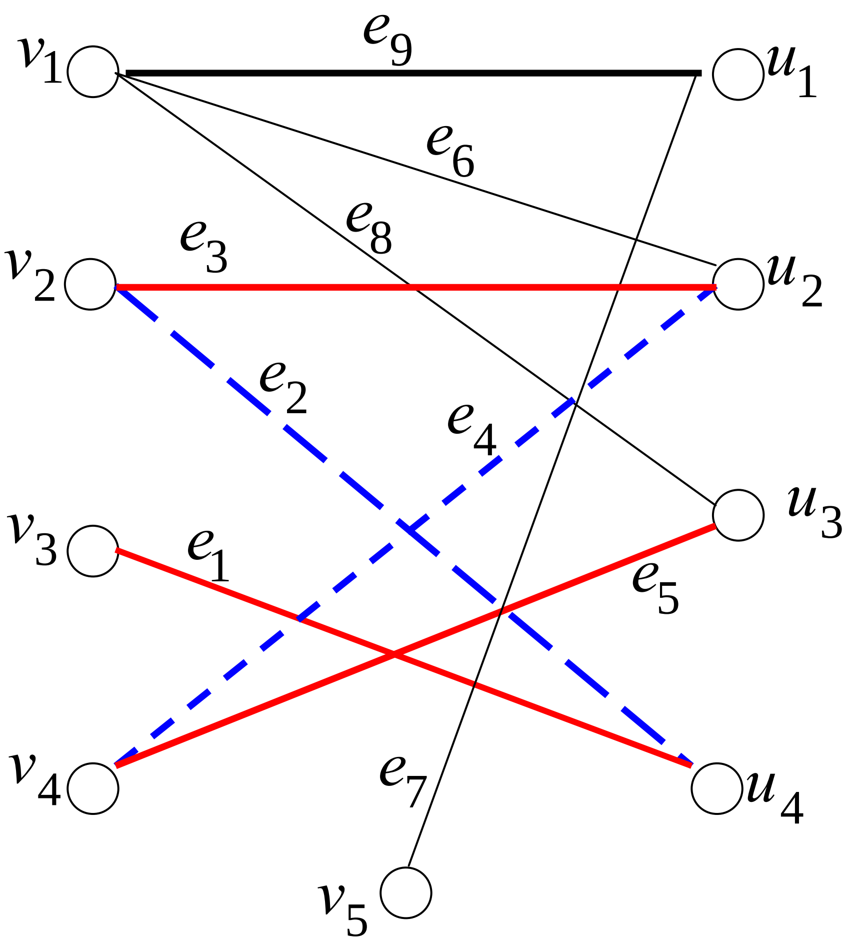
Поиск увеличивающего пути для нахождения паросочетания максимального веса



$$I = \{e_2, e_4, e_9\},\ S = \{e_1, e_2\},$$

$$I \cup e_1 \setminus e_2$$

Поиск увеличивающего пути для нахождения паросочетания максимального веса



$$I = \{e_2, e_4, e_9\},\ S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},$$

$$I \oplus S = I \cup e_1 \setminus e_2 \cup e_3 \setminus e_4 \cup e_5$$

Пусть $S=[e_1,\ldots,e_m]$, $S_{ij}=[e_i,\ldots,e_j]$, $(i\le j)$.

$M=(E,\mathfrak{I})$ и $N=(E,\mathcal{K})$ – пара матроидов.

$sp_M(A)$ $(sp_N(A))$ – оболочка множества $A\subseteq E$ относительно матроида M (соответственно N). Аналогичные обозначения для ранга.

Последовательность $S=[e_1,\ldots,e_m]$ называется *чередующейся* относительно $I\in\mathfrak{I}\cap\mathcal{K}$, если выполнены условия

Чер1. $I\cup e_1\in\mathfrak{I}$ и $e_1\notin I$

Чер2. Для любого четного i, $2\le i\le m$, справедливо $e_i\in I$ и $sp_N(I\oplus S_{1i})=sp_N(I)$

Чер3. Для любого нечетного i, $3\le i\le m$, справедливо $e_i\notin I$ и $sp_M(I\oplus S_{1i})=sp_M(I\cup e_1)$

Если m нечетно и $I\oplus S\in\mathcal{K}$, то S *увеличивающая последовательность*.

Лемма. Пусть S чередующаяся последовательность, тогда

1. $I \oplus S_{1i} \in \mathcal{K}$ для четных i;

2. $I \oplus S_{1i} \in \mathfrak{I}$ для нечетных i.

Доказательство.

1. т.к. $e_i \notin I$ для нечетных i, то $I \oplus S_{1i} \neq I$ для четных i. Т.к. $sp_N(I \oplus S_{1i}) = sp_N(I)$, то I и $I \oplus S_{1i}$ имеют одинаковый ранг в N. Т.к. I – независимо, т.е. имеет полный ранг в N, то $I \oplus S_{1i}$ – независимо. Случай нечетного i – аналогично.

Пусть $I \in \mathfrak{I} \cap \mathcal{K}$ и $(I \cup e_i) \notin \mathfrak{I}$. C_i – M-цикл в $(I \cup e_i)$. Если $(I \cup e_i) \notin \mathcal{K}$, то D_i – соответствующий N-цикл.

Последовательность $S = [e_1, \ldots, e_m]$ называется *правильной* относительно $I \in \mathfrak{I} \cap \mathcal{K}$, если выполнены условия

Пр1. $I \cup e_1 \in \mathfrak{I}$ и $e_1 \notin I$

Пр2. Для любого четного i, $2 \le i \le m$, справедливо $e_i \in I$ и $e_i \in D_{i-1}$. Кроме того, $e_i \notin D_{k-1}$ для любого четного $k < i$.

Пр3. Для всех нечетных i, $3 \le i \le m$, справедливо $e_i \notin I$ и $e_{i-1} \in C_i$. Кроме того, $e_{k-1} \notin C_i$ для любого нечетного $k < i$.

Если m нечетно и $I \oplus S \in \mathcal{K}$, то S *правильной увеличивающей последовательностью*.

Лемма. Правильные последовательности являются чередующимися.

Доказательство. *Пр.3⇒Чер.3.* $I \oplus S_{1i} = I \cup e_1 \cup (e_3 \setminus e_2) \cup \ldots \cup (e_i \setminus e_{i-1})$ для нечетного i. Слагаемым $(e_j \setminus e_{j-1})$ соответствует добавление некоторого элемента к $I \oplus S_{1j-2}$, получается цикл C_j, т.к. $e_{k-1} \notin C_j$ для нечетных $k < j$ и удаление некоторого элемента из этого цикла. По следствию 2 оболочка не изменится, следовательно, $sp_M(I \oplus S_{1i}) = sp_M(I \cup e_1)$.

Пр.2⇒Чер.2. $I \oplus S_{1i} = I \cup (e_{i-1} \setminus e_i) \cup (e_{i-3} \setminus e_{i-2}) \ldots \cup (e_1 \setminus e_2)$ для четного i. Слагаемым $(e_{j-1} \setminus e_j)$ соответствует добавление некоторого элемента e_{j-1} к $I \oplus S_{1j+1}$, получается цикл D_{j-1}, т.к. $e_k \notin D_{j-1}$ для четных $k > j$ и удаление некоторого элемента e_j из D_{j-1}. По следствию 2 оболочка не изменится, следовательно, $sp_N(I \oplus S_{1i}) = sp_N(I)$.

Алгоритм для задачи о пересечении матроидов

Вход: $M = (E, \mathfrak{I})$ и $N = (E, \mathcal{K})$ – пара матроидов.

Выход: множество $I \in \mathfrak{I} \cap \mathcal{K}$ максимальной мощности

Begin $I := \varnothing$

label: $A := \varnothing$; $Q := \varnothing$; $T := \varnothing$;

for all $e_i \in E \setminus I$ do

begin if $I \cup e_i \in \mathfrak{I}, \mathcal{K}$ then $I := I \cup e_i$ go to label;

if $I \cup e_i \in \mathfrak{I}$ then $Q := Q \cup e_i$ пометка[e_i]:=0

else for all $e_j \in D_i \setminus \{e_i\}$ do $A := A \cup \{(e_i, e_j)\}$

end;

while $Q \neq \varnothing$ do

```
            begin  пусть e ∈ Q:
                  удалить e из Q
                  for all непомеченных e' ∈ E | (e,e') ∈ A do
                  begin  пометка[e']:=e, Q := Q ∪ {e'};
                         if e' ∈ T then I := I ⊕ путь(e') go to label
                  end;
            end
End;
Procedure путь(e)
   If пометка[e]=0 then return [e]
   Else return путь(пометка[e])
```

Теорема 4 предложенный алгоритм корректно решает задачу о пересечении матроидов за время $O(|E|^3 C(|E|))$, где $C(|E|)$ - верхняя оценка сложности алгоритмов, задающих матроиды M и N.

Рекомендуемая литература:

Х., Пападимитриу, К. Стайглиц. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М. Мир, 1985