Задачи о покрытии

Дано: Сеть дорог и конечное множество пунктов для размещения постов ГАИ. Каждый пункт может контролировать дорогу на заданном расстоянии от него. Известно множество опасных участков на дорогах.

Найти: минимальное число постов для контроля всех опасных участков.

Обозначения:

$I = \{1, \ldots, m\}$ — множество всех возможных пунктов для размещения постов ГАИ;

$J = \{1, \ldots, n\}$ — множество опасных участков;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если из пункта } i \text{ можно контролировать участок } j \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если в пункте } i \text{ устанавливается пост ГАИ} \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in I} x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \in \{0,1\} \ i \in I.$$

Пусть $c_i \geq 0$ — стоимость создания поста в пункте i и число постов не превосходит $p>0$. Требуется минимизировать суммарную стоимость:

$$\min \sum_{i \in I} c_i x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i \in \{0,1\} \ i \in I.$$

Предположим, что имеется возможность открыть не более p постов и их не хватит для контроля всех опасных участков.

Требуется при данном ограничении найти размещение постов для контроля максимального числа опасных участков.

Переменные задачи:

$$y_j = \begin{cases} 1, \text{если опасный участок } j \text{ под контролем} \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если в пункте } i \text{ устанавливается пост ГАИ} \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\max \sum_{j \in J} y_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq y_j, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i, y_j \in \{0,1\}, \quad i \in I, \ j \in J.$$

Упражнение. Показать, что эта модель не эквивалентна нижеследующей модели:

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij} x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I.$$

Если опасные участки опасны в разной степени и величина b_j задает, например, число аварий на участке j за год, то задача предотвращения максимального числа аварий записывается следующим образом:

$$\max \sum_{j \in J} b_j y_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq y_j, \quad j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i, y_j \in \{0,1\}, \quad i \in I, \ j \in J.$$

Жадный алгоритм

Рассмотрим взвешенную задачу о покрытии

$$\min\left\{\sum_{i\in I} c_i x_i \,\middle|\, \sum_{i\in I} a_{ij} x_i \ge 1,\ j\in J,\ x_i\in\{0,1\}\right\}$$

Алгоритм

1. Положить $X^0 := \varnothing$, $k := 0$, $J_i^k := \{j\in J \mid a_{ij} = 1\}$, $i\in I$, $J^0 := \varnothing$;

2. Пока $J^0 \ne J$ выполнять:

   2.1. Найти $i_0 \in I \setminus X^k$ такой, что $J_{i_0}^k \ne \varnothing$ и $\dfrac{c_{i_0}}{|J_{i_0}^k|} = \min\limits_{i\in I\setminus X^k}\left\{\dfrac{c_i}{|J_i^k|} \,\middle|\, |J_i^k| \ne \varnothing\right\}$;

   2.2. Положить $k := k+1$, $X^k := X^{k-1}\cup\{i_0\}$, $J^0 := J^0 \cup J_{i_0}^{k-1}$

   и $J_i^k := J_i^{k-1} \setminus J_{i_0}^{k-1}$ для всех $i\in I\setminus X^k$.

Пример

$I = \{1,\ldots, n + 1\}, J = \{1,\ldots, n\}$

$$
\begin{array}{cc}
\text{вектор } (c_i) & \text{матрица } (a_{ij}) \\
\begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & 0 & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Оптимальное решение $X^* =\{n + 1\}$ и его значение $(1 + \varepsilon)$. Жадный алгоритм сначала возьмет $i = 1$, затем $i = 2, \ldots, i = n$, и получит значение

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\le 1+\log n .$$

Трудоемкость алгоритма $T \sim O(mn)$ при правильном хранении множеств J_i^k, $i \in I$.

Без ограничения общности будем считать, что $X^k = \{1, 2, \ldots, k\}$ для $k = 1, \ldots, K$ и алгоритм получил покрытие после K итераций.

Обозначим $q_i^k = |J_i^k|$, $i \in I$, $k = 1, \ldots, K$ и заметим, что

$$c_k / q_k^k \le c_i / q_i^k, \quad i \in I,$$

$$J_i^{k+1} \subseteq J_i^k \quad \text{и} \quad J_i^0 \cap J_k^k = J_i^k \setminus J_i^{k+1},$$

$$J = \bigcup_{k=1}^{K} J_k^k, \quad J_{k_1}^{k_1} \cap J_{k_2}^{k_2} = \varnothing, \text{ при } k_1 \ne k_2.$$

Рассмотрим функцию $H(p) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i}, \quad p = 1, 2, \ldots$

Теорема Чватала. Пусть X^* — оптимальное решение взвешенной задачи о покрытии, а X^K — решение жадного алгоритма. Тогда

$$\sum_{i \in X^K} c_i \le H\left(\max_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}\right) \sum_{i \in X^*} c_i.$$

Доказательство: Наряду с исходной задачей рассмотрим задачу с новой целевой функцией и непрерывными переменными:

$$\min\left\{\sum_{i \in I} c_i H\left(\sum_{j \in J} a_{ij}\right) x_i \;\middle|\; \sum_{i \in I} a_{ij} x_i \ge 1, j \in J, x_i \ge 0\right\}.$$

Двойственная к ней имеет вид

$$\max\left\{\sum_{j \in J} u_j \;\middle|\; \sum_{j \in J} a_{ij} u_j \le c_i H\left(\sum_{j \in J} a_{ij}\right), i \in I, u_j \ge 0\right\}.$$

Так как множества J_k^k образуют разбиение множества J, то положим

$$u_j = c_k / q_k^k, \quad j \in J_k^k, \quad k = 1,\dots,K.$$

Покажем, что u_j —допустимое решение двойственной задачи. Для любого $i \in I$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}u_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in J_k^k} a_{ij}u_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in J_i^0 \cap J_k^k} u_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in J_i^k \setminus J_i^{k+1}} c_k \Big/ q_k^k = \sum_{k=1}^{K} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_k \Big/ q_k^k.$$

Пусть для рассматриваемого $i \in I$ номер k_0 — наибольший номер k, $1 \le k \le K$ такой, что $J_i^k \neq \varnothing$. Тогда, продолжая приведенные выше неравенства, получаем

$$\sum_{j\in J} a_{ij}u_j = \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_k \Big/ q_k^k \le \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_i \Big/ q_i^k =$$

$$c_i \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) \Big/ q_i^k \le c_i \sum_{k=1}^{k_0} \left(H(q_i^k) - H(q_i^{k+1}) \right) \le c_i H(q_i^1) = c_i H\left(\sum_{j\in J} a_{ij} \right).$$

Итак, построенное решение является допустимым в двойственной задаче. Кроме того,

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in J_k^k} c_k \Big/ q_k^k = \sum_{k=1}^{K} q_k^k c_k \Big/ q_k^k = \sum_{k=1}^{K} c_k = \sum_{k\in X^K} c_k .$$

Но по теореме двойственности

$\sum_{j\in J} u_j \le H(\max_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{ij}) \sum_{i\in X^*} c_i$ откуда и вытекает требуемая оценка. ■

Плохая новость.

Существует константа $0 < \gamma < 1$ такая, что наличие полиномиального приближенного алгоритма с оценкой относительной погрешности $\gamma H(\max_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{ij})$

влечет P=NP.

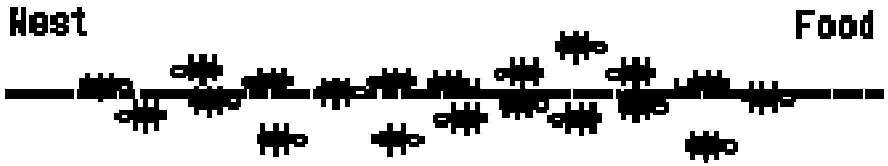
Алгоритм муравьиной колонии

Предложен в начале 90-х годов прошлого века M. Dorigo и V. Maniezzo

Муравьи ориентируются по запаху.

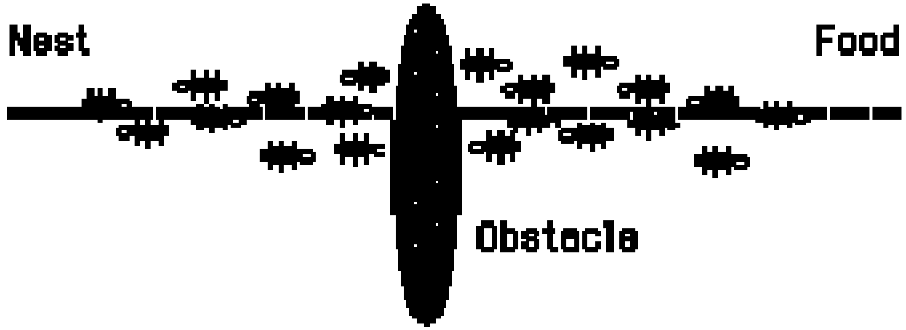
Каждый муравей оставляет после себя сильно пахнущее вещество — *феромен*.

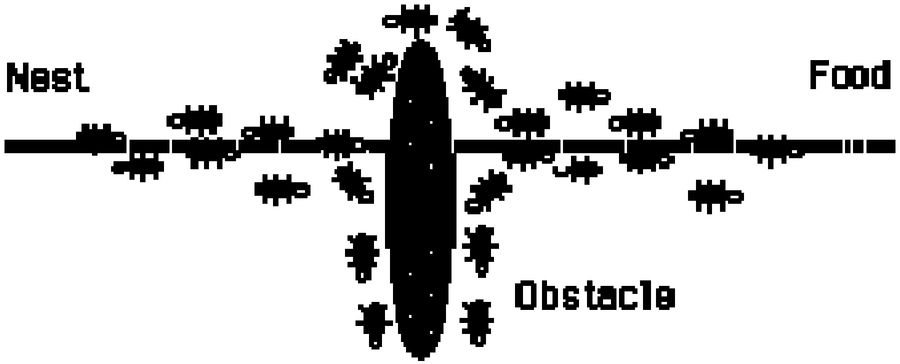
При выборе направления домой с большей вероятностью выбирается направление с более сильным запахом.



← Кратчайший путь

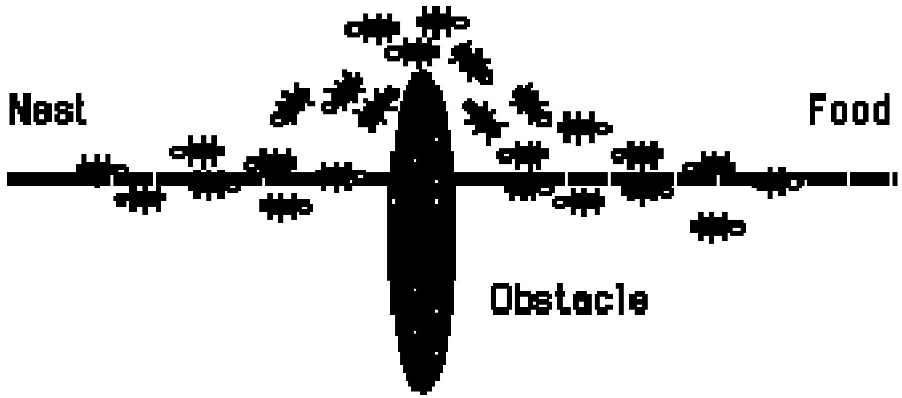
Появилось препятствие →





← Обход препятствия

Новый кратчайший путь →



Вероятностный жадный алгоритм

Пусть $X \subset I$, $J(X) = \{ j \in J \mid \sum_{i \in X} a_{ij} \geq 1 \}$ — множество “покрытых” столбцов,

$q_i(X)$ — мощность множества $J_i(X) = \{j \in J \mid a_{ij} = 1\} \setminus J(X)$, $i \in I \setminus X$,

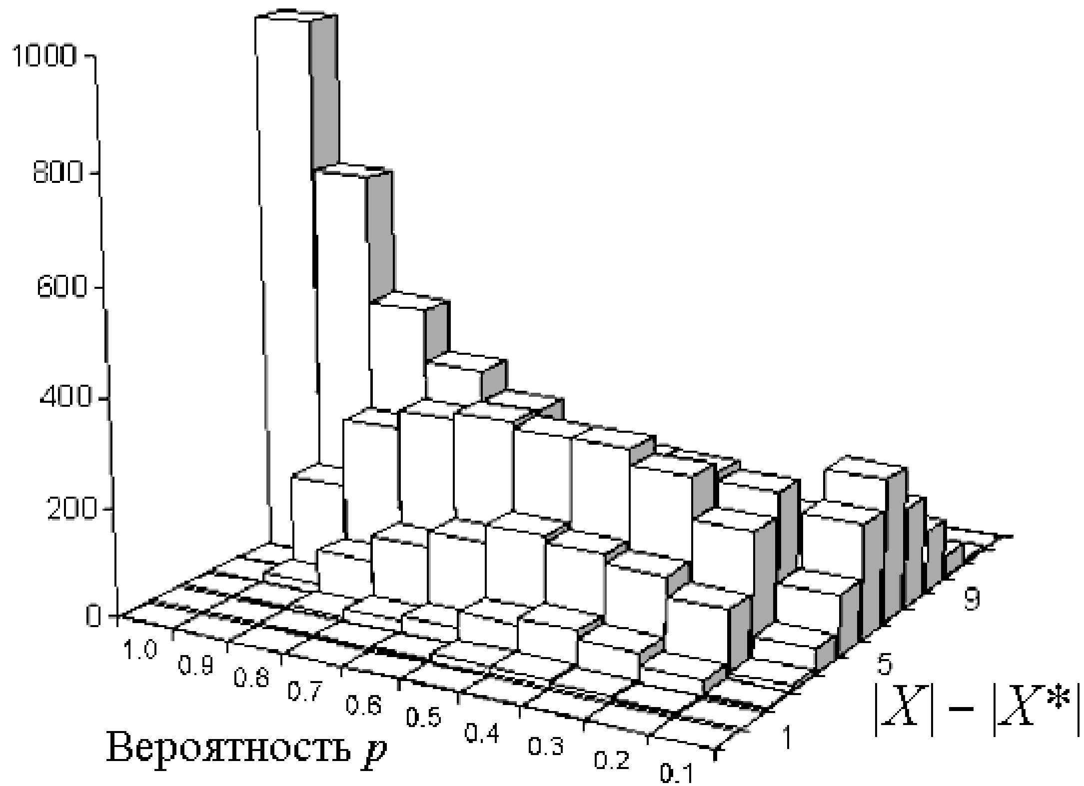
$\rho_i = c_i / q_i(X)$, $i \in I \setminus X$ — удельные приращения целевой функции,

$L(p)$ — случайное подмножество множества $I \setminus X$; элемент $i \in I \setminus X$ включается в множество $L(p)$ с вероятностью p независимо от других элементов.

Вероятностный жадный алгоритм

1. Положить $X := \varnothing$, $J^0 := \varnothing$.
2. Пока $J^0 \neq J$ выполнять:
   - 2.1. Сформировать подмножество $L(p) \subseteq I \setminus X$;
   - 2.2. Найти $i_0 \in L(p)$ с ненулевым значением $q_{i_0}(X)$ и минимальным удельным приращением ρ_i .
   - 2.3. Положить $X := X \cup \{i_0\}$; $J^0 := J^0 \cup J_{i_0}(X)$.

Влияние рандомизации на погрешность, случай $c_i = 1,\ i \in I$.



При фиксированном значении $p>0$ проводилось 1000 испытаний алгоритма. Число решений с одинаковым значением представлено на графике столбиком.

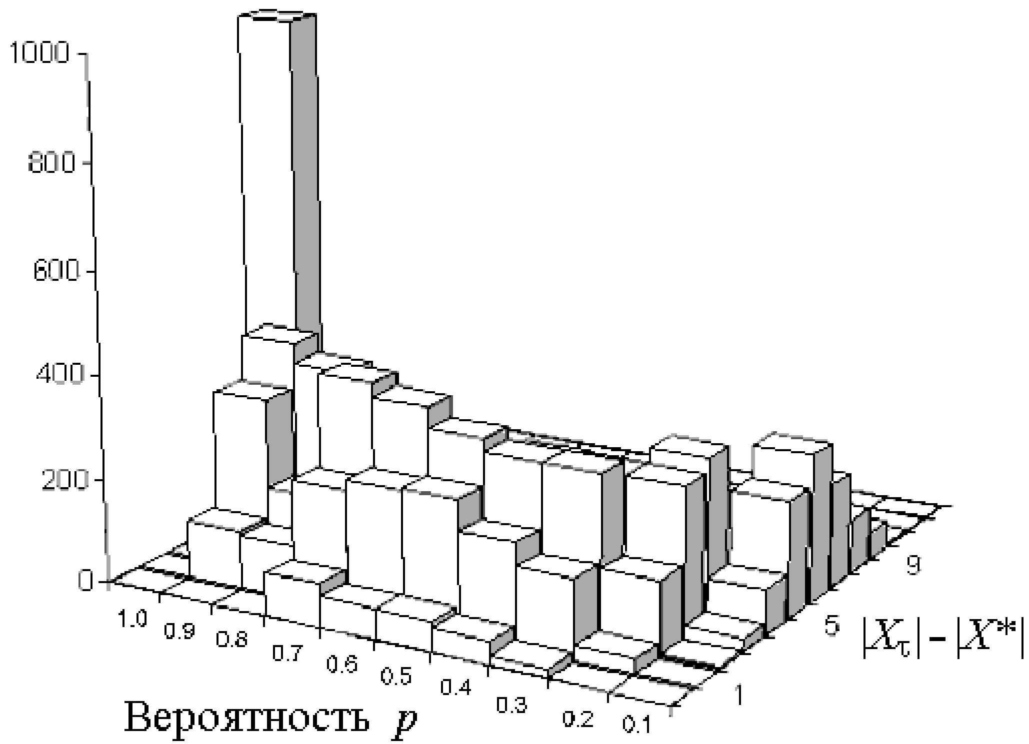
Алгоритм муравьиной колонии

Пусть вектор τ_i, $i \in I$ задает статистическую информацию о частоте появления элемента, $i \in I$ в решении $X \subseteq I$. Положим $\rho_i = c_i / q_i(X) + \alpha / \tau_i$, $i \in I \setminus X$, где параметр α определяет важность статистической информации.

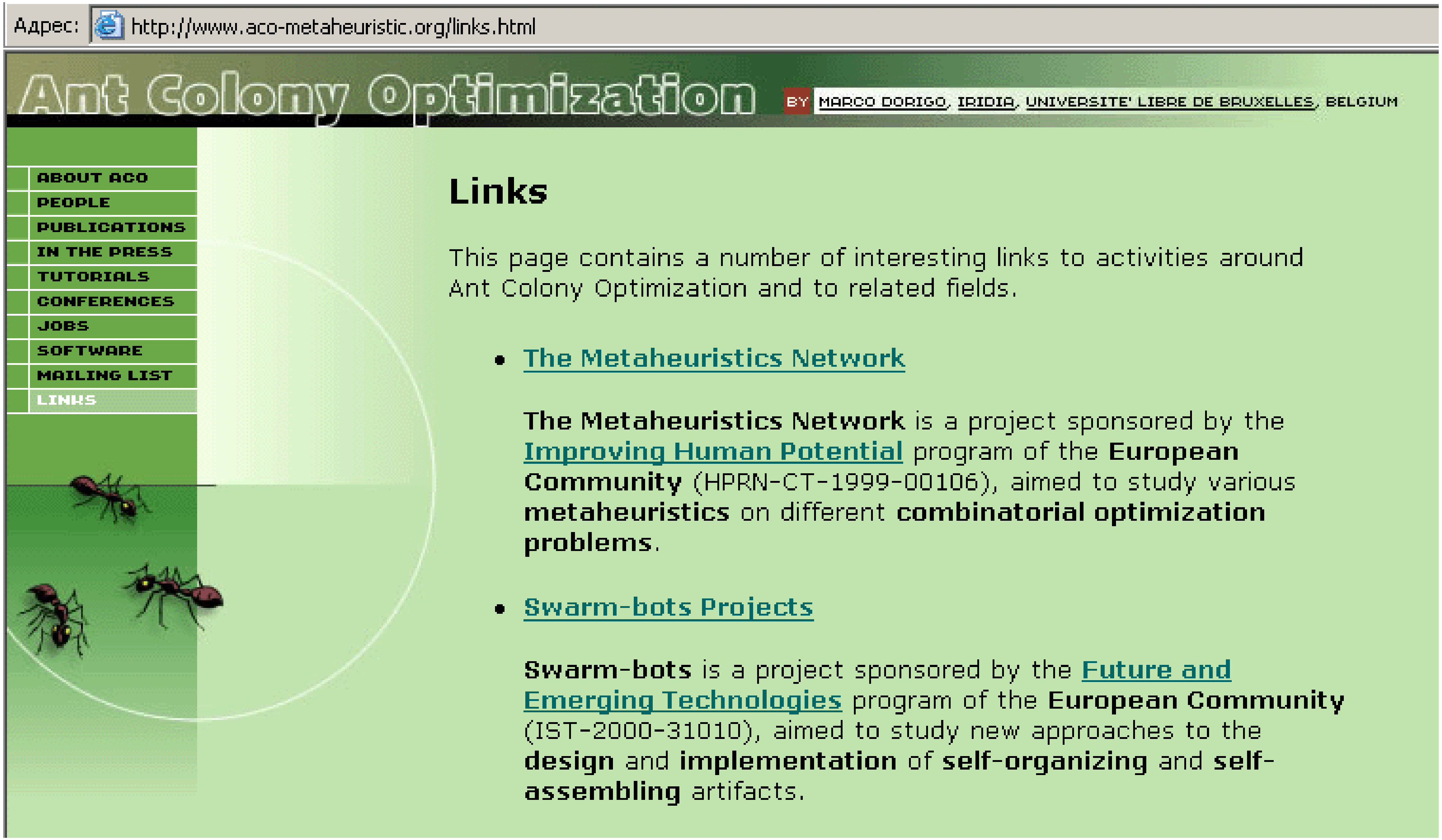
Алгоритм МК

1. Положить $\tau_i := 1$, $i \in I$, $X^{\text{МК}} := I$, $t := 0$.
2. Пока $t \le T_{\max}$ выполнять:
   2.1. Построить решения X_τ, $\tau = 1,\dots, T$ вероятностным жадным алгоритмом
   2.2. Выбрать часть наилучших решений X_τ, $\tau = 1,\dots, T'$, $T' \le T$
   2.3. По решениям X_τ, $\tau = 1,\dots, T'$, обновить статистическую информацию τ_i, $i \in I$ и положить $t := t + 1$
   2.4. Сменить рекорд $X^{\text{МК}}$, если найдено лучшее решение.

Влияние статистической информации, случай $c_i = 1,\ i \in I.$



Большое число оптимальных решений получено при $0{,}3 \le p \le 0{,}7$.



Адрес: http://www.aco-metaheuristic.org/links.html

Ant Colony Optimization BY MARCO DORIGO, IRIDIA, UNIVERSITE' LIBRE DE BRUXELLES, BELGIUM

ABOUT ACO
PEOPLE
PUBLICATIONS
IN THE PRESS
TUTORIALS
CONFERENCES
JOBS
SOFTWARE
MAILING LIST
LINKS

Links

This page contains a number of interesting links to activities around Ant Colony Optimization and to related fields.

- The Metaheuristics Network

  The Metaheuristics Network is a project sponsored by the Improving Human Potential program of the **European Community** (HPRN-CT-1999-00106), aimed to study various **metaheuristics** on different **combinatorial optimization problems**.

- Swarm-bots Projects

  Swarm-bots is a project sponsored by the Future and Emerging Technologies program of the **European Community** (IST-2000-31010), aimed to study new approaches to the **design** and **implementation** of **self-organizing** and **self-assembling** artifacts.

Задача о *p*-центрах

Предположим, что p постов ГАИ уже выбрано, и каждый опасный участок прикреплен к ближайшему посту. Обозначим через d_{ij} расстояние между участком j и постом i. Для выбранного набора постов $S \subset I, |S| = p$ обозначим через D максимальное расстояние между постом и участками

$$D = \max_{j \in J} \min_{i \in S} d_{ij}.$$

Величина D связана с задержкой при выезде из поста i на участок j. Задача минимизации этой задержки называется задачей о p-центрах:

$$\max_{j \in J} \min_{i \in S} d_{ij} \to \min_{S \subset I, |S| = p}.$$

Задача о p-центрах сводится к решению не более $m \cdot n$ задач о минимальном покрытии (как?).

Задача о многократных покрытиях

Пусть величина D задает радиус ответственности поста, т. е. все участки на расстоянии D от поста находятся в зоне его ответственности. Зоны могут пересекаться. Пусть $r_j \geq 1$ — минимальное число постов, которые должны контролировать участок j, $b_j > 0$ — среднее число аварий на участке j.

Требуется выбрать p постов так, чтобы каждый участок контролировался не менее r_j постами, и число предотвращенных аварий было бы максимальным:

$$\max \sum_{j \in J} b_j \sum_{i \in I} a_{ij} x_i$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p,$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq r_j, \ j \in J,$$

$$x_i \in \{0,1\}, \ \ i \in I.$$

Вероятностная постановка задачи

Вызовы с участков происходят случайным образом и независимо друг от друга,

$q > 0$ — вероятность того, что пост не может откликнуться на вызов;

$p_k = 1 - q^k$ — вероятность того, что хотя бы один из k постов откликнется;

$p_k - p_{k-1} = (1 - q^k) - (1 - q^{k\text{-}1}) = (1 - q)\ q^{k\text{-}1}$ — прирост вероятности при добавлении одного пункта.

Переменные:

$$y_{jk} = \begin{cases} 1, \text{если участок } j \text{ контролируется как минимум } k \text{ постами,} \\ 0 \ \ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель:

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{n_j} b_j (1-q) q^{k-1} y_{jk}$$

при ограничениях
$$\sum_{k=1}^{n_j} y_{jk} \le \sum_{i \in I} a_{ij} x_i, \quad j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \le p,$$

$$x_i, y_{jk} \in \{0,1\},$$

где $n_j = \sum_{i \in I} a_{ij}, \quad j \in J, \quad i \in I.$

Замечание. В оптимальном решении

$y_{jk} \le y_{jk-1}$ для всех $j \in J$, $1 < k \le n_j$.