Задача размещения производства

Дано: $I = \{1,\ldots, m\}$ — множество районов (городов, областей), где можно открыть производство некоторой продукции;

$J = \{1,\ldots, n\}$ — множество потребителей этой продукции (клиентов);

$f_i \geq 0$ — затраты на организацию производства в пункте i.

$c_{ij} \geq 0$ — производственно–транспортные расходы на удовлетворение спроса j-го клиента i-м предприятием.

$p > 0$ — максимально возможное число предприятий.

Найти: подмножество предприятий $S \subset I$, $|S| \leq p$, которое позволяет удовлетворить спрос всех клиентов с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если открываем предприятие } i, \\ 0 \ \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если предприятие } i \text{ обслуживает клиента } j, \\ 0 \ \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in I} f_i x_i \right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$z_{ij}, x_i \in \{0,1\}, \ \ i \in I, j \in J.$$

Упражнение. Замена $z_{ij} \in \{0,1\}$ на $z_{ij} \geq 0$ не меняет минимума суммарных затрат.

Задача размещения с предпочтениями клиентов

Дано: $I = \{1,\dots, m\}$ — множество мест, где можно открыть производство некоторой продукции;

$J = \{1,\dots, n\}$ — множество потребителей этой продукции (клиентов);

$f_i \geq 0$ — затраты на организацию производства в пункте i.

$c_{ij} \geq 0$ — производственно–транспортные расходы на удовлетворение спроса j-го клиента i-м предприятием.

$p > 0$ — максимально возможное число предприятий.

$d_{ij} \geq 0$ — предпочтения j-го клиента на множестве предприятий:

$\min\limits_{i \in I} d_{ij}$ — наиболее желаемый поставщик;

$\max\limits_{i \in I} d_{ij}$ — наименее желаемый поставщик.

Найти: Подмножество $S \subset I$, $| S | \le p$, открываемых предприятий, которые позволили бы удовлетворить спрос всех клиентов с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если открываем предприятие } i, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если предприятие } i \text{ обслуживает клиента } j, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min\left\{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} z^*_{ij} + \sum_{i\in I} f_i x_i\right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I} x_i \le p;$$

$$x_i \in \{0,1\},\ \ i\in I,$$

где z^*_{ij} — оптимальное решение задачи потребителя:

$$\min \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} d_{ij} z_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I} z_{ij} = 1,\quad j\in J;$$

$$x_i \ge z_{ij},\quad i\in I,\quad j\in J;$$

$$z_{ij} \in \{0,1\},\ \ i\in I, j\in J.$$

Квадратичная задача о назначениях

Дано: $I = \{1,\ldots, n\}$ — множество зданий, где могут размещаться цеха;

$J = \{1,\ldots, n\}$ — множество производственных цехов;

a_{kl} — расстояние между зданиями $k, l \in I$;

b_{ij} — объем продукции, транспортируемый из цеха i в цех j, где $i, j \in J$.

Найти: Размещение цехов по зданиям, при котором суммарный объем перевозок продукции был бы минимальным.

Переменные задачи:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, \text{если цех } i \text{ размещается в здании } k, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{l \in I} \sum_{k \in I} a_{kl} b_{ij} x_{ik} x_{jl}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in J} x_{ik} = 1, \text{ для всех } k \in I;$$

$$\sum_{k \in I} x_{ik} = 1, \text{ для всех } i \in J;$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, \ i \in J, \ k \in I.$$

Генетический алгоритм для задач размещения

Идея заимствована у живой природы и состоит в организации эволюции, целью которой является получение оптимального решения в сложной комбинаторной задаче:

$$\min\{\, f(S),\ S \in Sol \}.$$

Начальная популяция $P = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — набор допустимых решений исходной задачи.

Шаг эволюции: выбираем из популяции два решения, скрещиваем их, применяем мутацию, локальную перестройку и добавляем в популяцию, затем наихудшее решение удаляем из популяции.

Общая схема алгоритма

1. Выбрать начальную популяцию P и запомнить рекорд $F^* = \min_{i=1,\dots,k} f(S_i)$.
2. Пока не выполнен критерий остановки делать следующее:
   2.1. Выбрать "родителей" S_{i_1}, S_{i_2} из популяции.
   2.2. Применить к S_{i_1}, S_{i_2} оператор скрещивания и получить новое решение S'.
   2.3. Применить к S' оператор мутации и получить новое решение S''.
   2.4. Применить к S'' оператор локального улучшения и получить новое решение S'''.
   2.5. Если $f(S''') < F^*$, то сменить рекорд $F^* := f(S''')$.
   2.6. Добавить S''' к популяции и удалить из нее наихудшее решение.

Оператор скрещивания

Пусть S_1, S_2 — два решения, задаваемые векторами $X^1, X^2 \in \{0,1\}^n$.

Одноточечный оператор скрещивания: выбираем случайным образом координату $1 \le l \le n$ и новый вектор X' получает первые l координат от вектора X^1, а остальные от вектора X^2.

$$\begin{array}{ll} X^1: & (0\ 1\ 0\ 0 \mid 1\ .\ .\ .\ 0\ 1\ 1\ ) \\ X^2: & (1\ 1\ 0\ 1 \mid 0\ .\ .\ .\ 1\ 1\ 1\ ) \\ X': & (\underbrace{0\ 1\ 0\ 0}_{l} \mid 0\ .\ .\ .\ 1\ 1\ 1\ ) \end{array}$$

Аналогично определяется двухточечный, трехточечный и т.д. операторы.

Равномерный оператор скрещивания: новое решение X' в каждой координате получает с вероятностью 0.5 значение одного из родителей.

Выбор родителей

Турнирная селекция: из популяции P случайным образом выбирается некоторое подмножество $P' \subseteq P$ и родителем назначается наилучшее решение в P':

$$S_i = \min_{S \in P'} f(S).$$

Пропорциональная селекция: из популяции P случайным образом выбираются два родителя. Для решения S_i вероятность быть выбранным обратно пропорциональна значению целевой функции $f(S_i)$.

Варианты: Лучший в популяции + случайно выбранный.

Случайно выбранный + наиболее удаленный от него и др.

Оператор мутации

Вероятностный оператор мутации случайным образом вносит изменения в допустимое решение задачи. Например, с малой вероятностью $q < \frac{1}{n}$ в каждой координате значение $X_i \in \{0,1\}$ заменяется на противоположное $1 - X_i$. Если в решении требуется сохранить $\sum\limits_{i \in I} x_i = p$, то случайным образом выбирается координата i_1 такая, что $X_{i_1} = 1$ и координата i_2 такая, что $X_{i_2} = 0$ и производится замена $X_{i_1} := 0$, $X_{i_2} := 1$.

$$
\begin{array}{rccccccccc}
X' = & (0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1\,) \\
X'' = & (1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1\,) \\
 & i_1 & & & i_2 & & & & &
\end{array}
$$

Локальное улучшение

Для решения S обозначим через $N(S)$ его окрестность, например, множество всех решений S', находящихся от S на расстоянии не более 2 (3, 4, 5…)

Алгоритм локального спуска

1. Положить $S := S''$;
2. Найти в окрестности решения S наилучшего соседа $\bar{S}$

$$f(\bar{S}) = \min\{f(\tilde{S}),\ \tilde{S} \in N(S)\};$$

3. Если $f(\bar{S}) < f(S)$, то положить $S := \bar{S}$ и вернуться на шаг 2, иначе STOP, получен локальный минимум.

Задача размещения в условиях конкуренции

$I = \{1,\dots, m\}$ — множество пунктов размещения;

$J = \{1,\dots, n\}$ — множество клиентов;

c_{ij} — расстояние от пункта i до клиента j;

p — число предприятий, открываемых ЛПР$_1$;

r — число предприятий, открываемых ЛПР$_2$;

d_j — доход от обслуживания клиента j;

Сначала ЛПР$_1$ принимает решение об открытии своих предприятий. Затем, зная это решение, ЛПР$_2$ открывает свои предприятия так, чтобы получить максимальный доход. Клиент знает оба решения и выбирает ближайшее к себе предприятие. Задача состоит в том, чтобы найти решение для ЛПР$_1$ с максимальных доходом.

Переменные задачи

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если ЛПР}_1 \text{ открыл предприятие в пункте } i \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ если ЛПР}_2 \text{ открыл предприятие в пункте } i \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1, \text{ если клиент } j \text{ обслуживается ЛПР}_1 \\ 0, \text{ если клиент } j \text{ обслуживается ЛПР}_2 \end{cases}$$

Для вектора x положим

$I_j(x) = \{i \in I \mid c_{ij} < \min(c_{kj} \mid x_k = 1)\}$ — множество пунктов размещения, которые находятся ближе к клиенту j, чем ближайшее открытое предприятие ЛПР$_1$.

Математическая модель двухуровневого программирования

$$\max_{x} \sum_{j \in J} d_j z_j^*(x)$$

при ограничениях $$\sum_{i \in I} x_i = p, \ \ x_i \in \{0,1\}, \ i \in I$$

где z_j^* — оптимальное решение задачи ЛПР$_2$:

$$\max_{z,y} \sum_{j \in J} d_j (1 - z_j)$$

при ограничениях $$1 - z_j \le \sum_{i \in I_j(x)} y_i, \quad j \in J$$

$$\sum_{i \in I} y_i = r$$

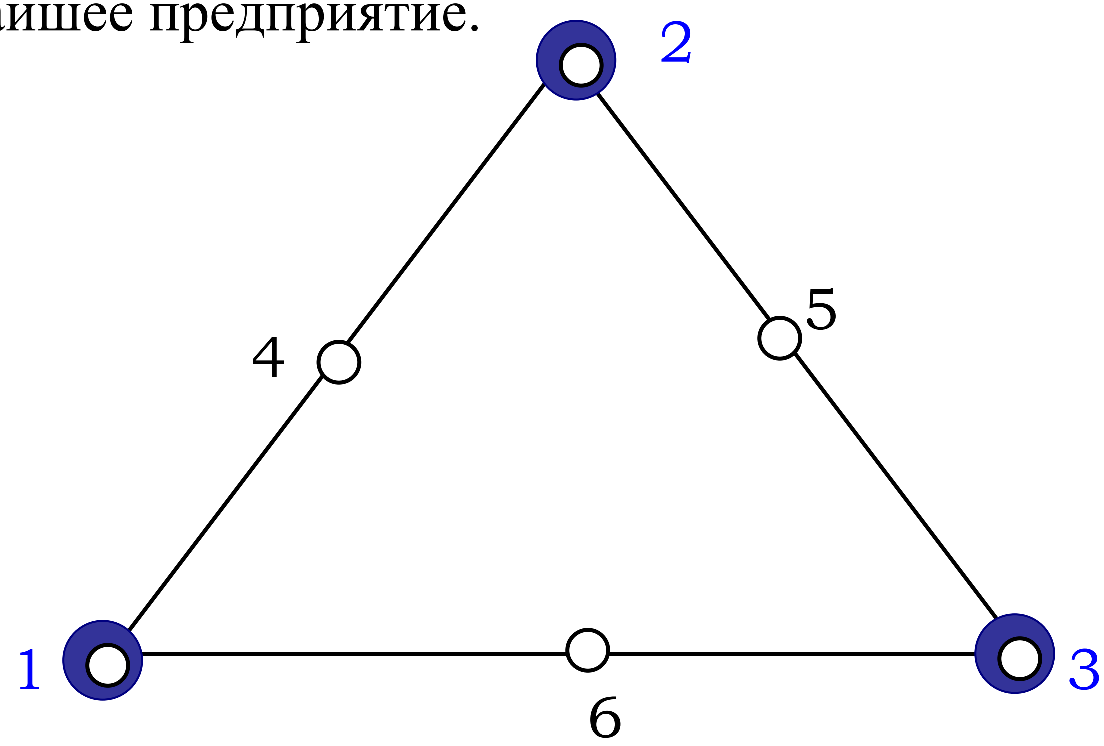
$$x_i + y_i \le 1, \quad i \in I, \quad y_i, z_j \in \{0,1\}$$

«Безнадежный» пример

$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — места размещения предприятий;

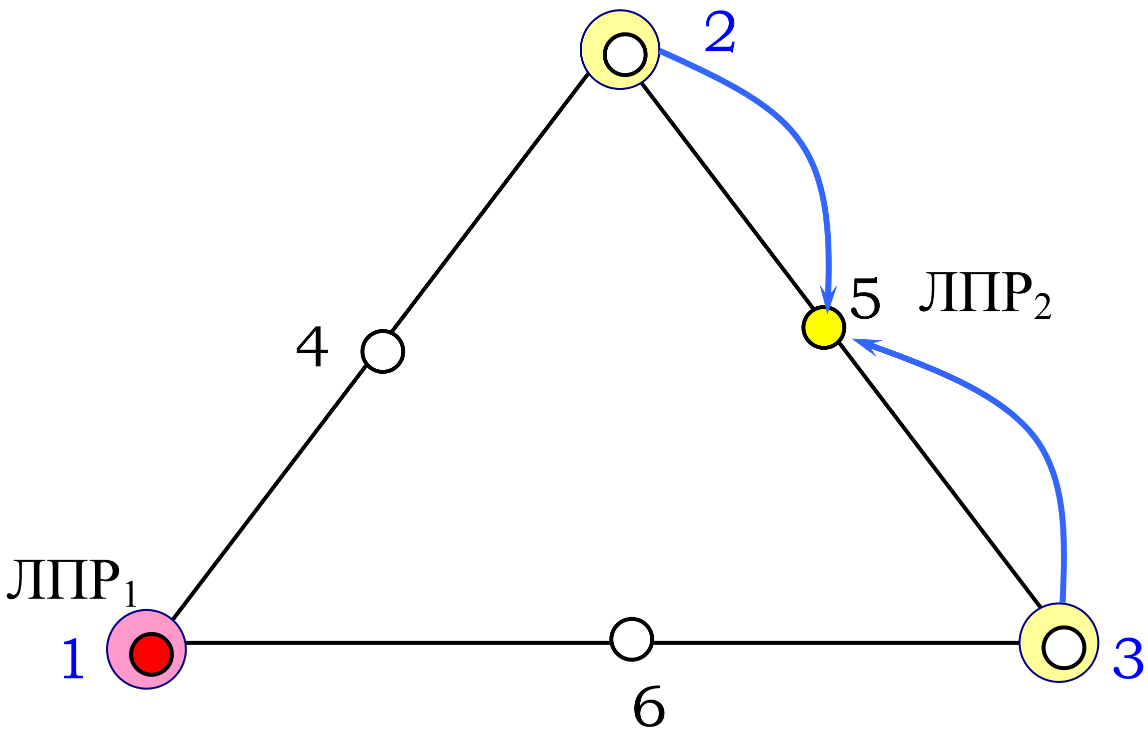
$J = \{1, 2, 3\}$ — клиенты.

Клиенты выбирают ближайшее предприятие.

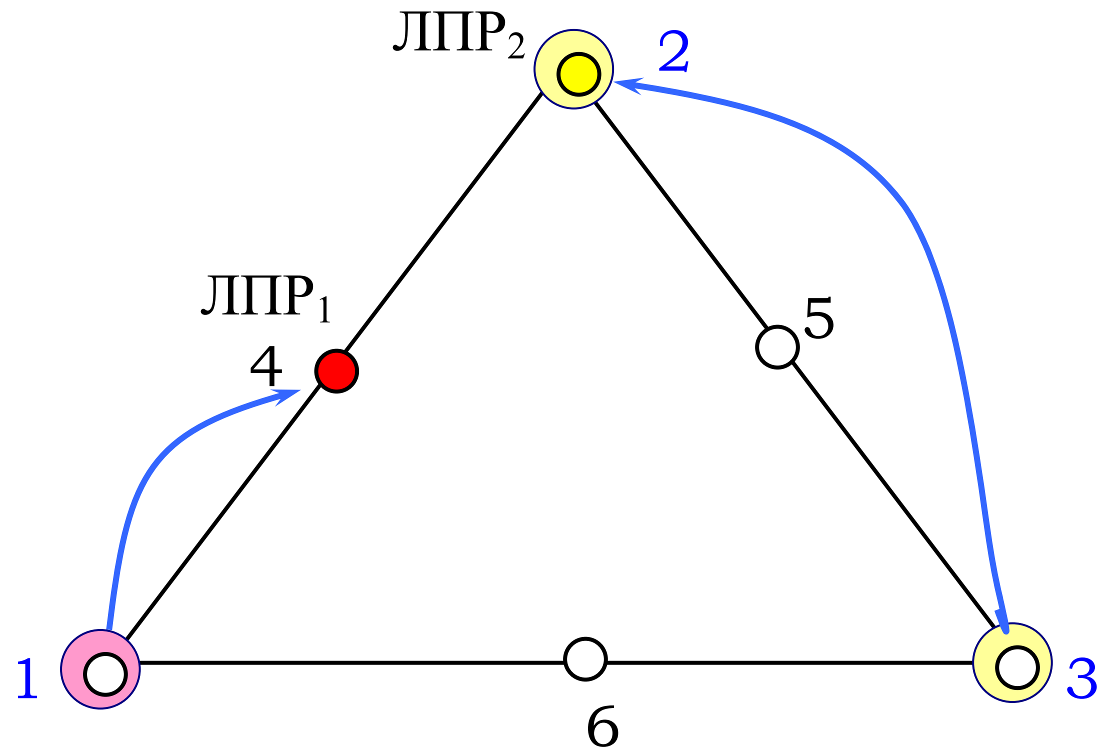


При $p = r = 1$ ЛПР$_1$ всегда проигрывает!

Если ЛПР$_1$ ставит предприятие в вершине треугольника, то ЛПР$_2$ ставит свое предприятие на противоположной стороне треугольника и захватывает двух клиентов, в то время как ЛПР$_1$ получает только одного.



Если ЛПР$_1$ ставит предприятие на стороне треугольника, то ЛПР$_2$ ставит свое предприятие в соседней вершине треугольника и тоже захватывает двух клиентов, в то время как ЛПР$_1$ получает только одного



Численные методы

При заданном решении x для ЛПР$_1$ задача ЛПР$_2$ является NP-трудной задачей целочисленного линейного программирования.

Зная ее оптимальное решение, можно вычислить доход ЛПР$_2$ и ЛПР$_1$.

- Генетический локальный поиск в пространстве переменных x для ЛПР$_1$.
- Имитация отжига в пространстве переменных x для ЛПР$_1$.
- Поиск с чередующимися окрестностями в пространстве переменных x для ЛПР$_1$.

Точный метод

Пусть $\mathcal{F}$ — непустое семейство решений ЛПР$_2$.

Для $y \in \mathcal{F}$ положим

$$I_j(y) = \{i \in I \mid c_{ij} \le \min_{l \in I} c_{lj} \mid y_l = 1\}$$

Это множество предприятий, позволяющих ЛПР$_1$ удержать клиента j, если ЛПР$_2$ использует решение y.

Дополнительные переменные:

D — доход ЛПР$_1$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ ЛПР}_1 \text{ ближайшее для клиента } j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Переформулировка задачи:

$$\max D \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j(y)} d_j z_{ij} \ge D, \quad \forall y \in \mathcal{F}, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1, \quad j \in J, \tag{3}$$

$$x_i \ge z_{ij}, \quad i \in I, j \in J, \tag{4}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = p. \tag{5}$$

Если $\mathcal{F}$ — все решения ЛПР$_2$, то получаем эквивалентную переформулировку.

Пусть $\mathscr{F}$ — некоторое семейство решений ЛПР$_2$.

Тогда $D(\mathscr{F})$ — верхняя оценка максимального дохода ЛПР$_1$.

Пусть $x(\mathscr{F})$ — оптимальное решение для заданного $\mathscr{F}$ и $D'(x(\mathscr{F}))$ — доход ЛПР$_1$ на решении $x(\mathscr{F})$. $D'(x(\mathscr{F}))$ — нижняя оценка оптимума для ЛПР$_1$.

Итерационный метод:

0. Выбрать начальное семейство $\mathscr{F}$ и положить $D^* := 0$
1. Решить задачу (1)–(5), найти $D(\mathscr{F})$ и $x(\mathscr{F})$
2. Решить задачу ЛПР$_2$, вычислить $y(x(\mathscr{F}))$ и $D'(x(\mathscr{F}))$
3. Если $D^* < D'(x(\mathscr{F}))$, то $D^* := D'(x(\mathscr{F}))$
4. Если $D(\mathscr{F}) = D^*$, то STOP
5. Добавить $y(x(\mathscr{F}))$ в семейство $\mathscr{F}$ и вернуться на шаг 1.

Теорема. Итерационный метод является конечным и дает точное решение задачи (1)–(5).

Доказательство. Метод останавливается, когда верхняя оценка оптимума совпадает с нижней оценкой. Значит решение точное. Так как возможных решений ЛПР$_2$ не более C_n^r, то для конечности метода требуется, чтобы решения $y(x(\mathscr{F}))$ на шаге 5 не повторялись.

Предположим противное. Пусть решение $y(x(\mathscr{F}))$ уже содержится в $\mathscr{F}$. Тогда согласно ограничению (2) верхняя оценка $D(\mathscr{F})$ не должна превосходить дохода ЛПР$_1$ при ответном ходе $y(x(\mathscr{F}))$ ЛПР$_2$. Но $y(x(\mathscr{F}))$ — оптимальное решение ЛПР$_2$ для $x(\mathscr{F})$. Значит $D(\mathscr{F})$ не превосходит нижней оценки $D'(x(\mathscr{F}))$, и метод должен был остановиться на шаге 4, не попадая на шаг 5. Противоречие. ■

Доля рынка ЛПР$_1$