Аппроксимационные схемы

Определение Алгоритм A называется *ε-аппроксимационной схемой*, если для любого $\varepsilon \in]0,1[$ и любых исходных данных I задачи верно

$$z^A(I) \geq (1-\varepsilon) z^*(I)$$

Другими словами, алгоритм A является $(1-\varepsilon)$-приближенным алгоритмом для всех $\varepsilon \in]0,1[$.

Алгоритм H^ε

1. $l := \min\,\{\lceil 1/\varepsilon \rceil - 2,\, n\}, \quad z^A := 0$
2. Для всех подмножеств $L \subset J$, $|L| \leq l-1$

   if $(\sum_{j \in L} w_j \leq c)$ and $(\sum_{j \in L} p_j > z^A)$ then $z^A := \sum_{j \in L} p_j$

3. Для всех подмножеств $L \subset J, \ |L| = l$

if $(\sum_{j \in L} w_j \le c)$ then

- Применить алгоритм A^{MG} к задаче с множеством предметов $\{j \mid p_j \le \min \{p_i, i \in L\}\} \setminus L$ и вместимостью рюкзака $c - \sum_{j \in L} w_j$
- if $\sum_{j \in L} p_j + z^{MG} > z^A$ then $z^A := \sum_{j \in L} p_j + z^{MG}$.

Теорема Алгоритм H^{ε} является ε-аппроксимационной схемой.

Доказательство. Если оптимальное решение z^* содержит не более l предметов, то $z^A = z^*$ и утверждение верно.

Пусть в оптимальном решении более чем l предметов. Выберем в нем подмножество L^* из l предметов с наибольшими весами p_j. Рассмотрим подзадачу S с множеством предметов $\{ j \mid p_j \le \min \{p_i,\ i \in L^*\} \} \setminus L^*$ и вместимостью рюкзака $c - \sum_{j \in L^*} w_j$. Оптимальное решение этой подзадачи обозначим через z_S^*. Тогда $z^* = z_S^* + \sum_{j \in L^*} p_j$. Приближенное решение, полученное алгоритмом A^{MG}, обозначим через z_S^{MG}.

По определению $z^A \ge \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG}$ и, кроме того, $z_S^{MG} \ge \frac{1}{2} z_S^*$.

Рассмотрим два случая:

1. $\sum_{j\in L^*} p_j \ge \frac{l}{l+2} z^*$. Тогда $z^A \ge \sum_{j\in L^*} p_j + z_S^{MG} \ge \sum_{j\in L^*} p_j + \frac{1}{2} z_S^* =$

$$\sum_{j\in L^*} p_j + \tfrac{1}{2}\Big(z^* - \sum_{j\in L^*} p_j\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(z^* + \sum_{j\in L^*} p_j\Big) \ge \tfrac{1}{2}\Big(z^* + \tfrac{l}{l+2} z^*\Big) = \frac{l+1}{l+2} z^*$$

2. $\sum_{j\in L^*} p_j < \frac{l}{l+2} z^*$. Тогда в L^* найдется предмет с $p_j < \frac{1}{l+2} z^*$. По определению в подзадаче S все предметы имеют вес не более $\frac{1}{l+2} z^*$. Применяя свойство 2 для LP-релаксаций, получаем

$$z^* = \sum_{j\in L^*} p_j + z_S^* \le \sum_{j\in L^*} p_j + z_S^{MG} + \frac{1}{l+2} z^* \le z^A + \frac{1}{l+2} z^*.$$

Итак, в обоих случаях получаем $z^A \ge \frac{l+1}{l+2} z^*$. Величина $\frac{l+1}{l+2}$ растет с ростом l и $\dfrac{l+1}{l+2} \ge \dfrac{1/\varepsilon - 1}{1/\varepsilon} = 1 - \varepsilon$. ■

$$T = O(n\, n^l) = \mathrm{O}(n^{l+1}). \quad \Pi = O(n).$$

Пример Положим $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1,\ c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil M$ и

$$p_1 = 2, \quad p_2 = p_3 = \ldots = p_n = M,$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = w_3 = \ldots = w_n = M.$$

Оптимум $z^* = M(l+2),\ l = n - 3,\ z^A = (l+1)M + 2$ и

$$z^A / z^* \to (l+1)/(l+2) \quad \text{при} \quad \mathrm{M} \to \infty.$$

Определение ε-аппроксимационная схема A называется *полиномиальной*, если ее трудоемкость полиномиально зависит от длины записи исходных данных задачи.

$T_H = O(n^{l+1}) = O(n^{1/\varepsilon - 1})$ — полиномиальная зависимость при заданном ε. Если $\varepsilon = 0.1$, то $T_H = O(n^9)$, то есть алгоритм H^ε является полиномиальной ε-аппроксимационной схемой для задачи о рюкзаке.

Определение ε-аппроксимационная схема A называется *полностью полиномиальной*, если ее трудоемкость полиномиально зависит от длины записи исходных данных задачи и величины $1/\varepsilon$.

Теорема Для задачи о рюкзаке существует полностью полиномиальная ε-аппроксимационная схема.

Доказательство Для примера $I = \{p_1,\ldots, p_n, w_1,\ldots, w_n, c\}$ построим новый пример $\bar{I}$, в котором $\bar{c} = c, \bar{w}_j = w_j, \bar{p}_j = \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor$ для некоторой константы $K > 0$, которую определим позже. Для примера $\bar{I}$ применим алгоритм ДП и найдем оптимальный набор предметов $\bar{X}$. Скорее всего он будет отличаться от оптимального набора X^* для примера I. Оценим разность между полученным значением z^A и оптимальным z^*:

$$z^A = \sum_{j\in\bar{X}} p_j \geq \sum_{j\in\bar{X}} K\left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq K \sum_{j\in X^*} \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq \sum_{j\in X^*} K\left(\frac{p_j}{K} - 1\right) =$$

$$= \sum_{j\in X^*} (p_j - K) = z^* - |X^*|K.$$

Второе неравенство в этой цепочке следует из оптимальности $\bar{X}$ для $\bar{I}$.

Мы хотим получить $\dfrac{z^* - z^A}{z^*} \le \dfrac{|X^*|K}{z^*} \le \varepsilon.$

Следовательно, $K \le \dfrac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|}$. Так как $n \ge |X^*|$ и $z^* \ge p_{\max}$, то

$$\frac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|} \ge \frac{\varepsilon \cdot z^*}{n} \ge \frac{\varepsilon \cdot p_{\max}}{n}$$

и, полагая $K = \varepsilon \cdot p_{\max} / n$, получим нужное значение для параметра K.

Трудоемкость алгоритма определяется трудоемкостью ДП. Если вместо исходной задачи решать обратную к ней, то $T = O(Un)$, где U — верхняя оценка на оптимальное значение целевой функции $\bar{z}^* = \sum_{j \in \bar{X}} \bar{p}_j$.

Очевидно, что $\bar{z}^* \le n\bar{p}_{\max}$, но $\bar{p}_{\max} \le \frac{p_{\max}}{K} = \frac{n}{\varepsilon}$, то есть $\bar{z}^* \le n^2 / \varepsilon$.

Полагая $U = n^2/\varepsilon$, получаем $T = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$, $\Pi = O(Un) = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$. ■

Задача о ближайшем соседе

Дано: функция $f(x, y) \geq 0$ — затраты на обслуживание отрезка дороги от x до y, $0 \leq x \leq y \leq M$, x, y — целочисленные точки, n — число отрезков.

Найти: оптимальное разбиение сегмента $[0, M]$ на n отрезков.

Математическая модель:

$$\min \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, x_k)$$

$$0 = x_0 \leq \ldots \leq x_n = M$$

Алгоритм динамического программирования

$S_k(y)$ — минимальные затраты на обслуживание k отрезков для сегмента $[0, y]$.

Рекуррентные соотношения:

$$S_1(y) = f(0,y), \quad y = 1,\ldots, M$$

$$S_k(y) = \min_{1\le x\le y} \{S_{k-1}(x) + f(x, y)\}, \quad y = 1,\ldots, M, \quad k = 2,\ldots, n.$$

$$T = O(nM^2) \qquad \Pi = O(nM)$$

Оптимизация числа отрезков

Для каждого $n = 1,\ldots, M$ найти $S_n(M)$ и выбрать наименьшее значение

$T = O(M^3)$, $\Pi = O(M^2)$.

Модифицированный вариант

$\widetilde{S}(y)$ — минимальные затраты на обслуживание сегмента $[0, y]$.

Рекуррентные соотношения:

$$\widetilde{S}(0) = 0,$$

$$\widetilde{S}(y) = \min_{0 \le x \le y-1} \{\widetilde{S}(x) + f(x, y)\}, \quad y = 1,\ldots, M.$$

$$T = O(M^2), \quad \Pi = O(M).$$

Замена оборудования

Дано: g — начальная стоимость оборудования,

$\varphi(t)$ — относительная остаточная стоимость на год t

$\psi(t)$ — эксплуатационные затраты за все года от 0 до t.

$S(t) = g(1 - \varphi(t)) + \psi(t)$ — суммарные затраты за все года от 0 до t.

$\sigma(t) = S(t)/t$ — удельные затраты

Критерий оптимизации

$$\sigma(t^*) = \min_{t>0} \sigma(t)$$

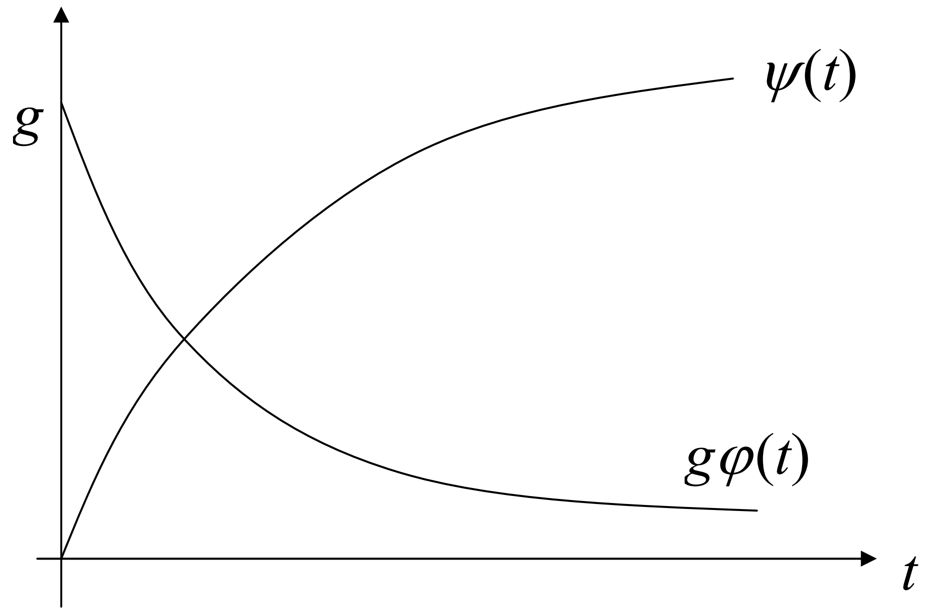
Будем менять оборудование через каждые t^* лет.

Случай 1 $S(t)$ — вогнутая растущая функция.

Пусть $\varphi(t)$ — выпуклая убывающая функция $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) \geq 0$;

$\psi(t)$ — вогнутая растущая функция $\psi(0) = 0$.

Покажем, что $\sigma(t)$ убывает с ростом t.



Так как $S(t)$ — вогнутая функция, то

для любого $\alpha \in [0,1]$ и $t_0 < t_2$ имеем

$(1-\alpha)S(t_0) + \alpha S(t_2) \leq S((1-\alpha)t_0+\alpha\, t_2)$.

Для $t_1 < t_2$ положим $\alpha = t_1/t_2$, $t_0 = 0$.

Тогда $S(t_0)=0$ и $t_1 S(t_2) \leq t_2 S(t_1)$,

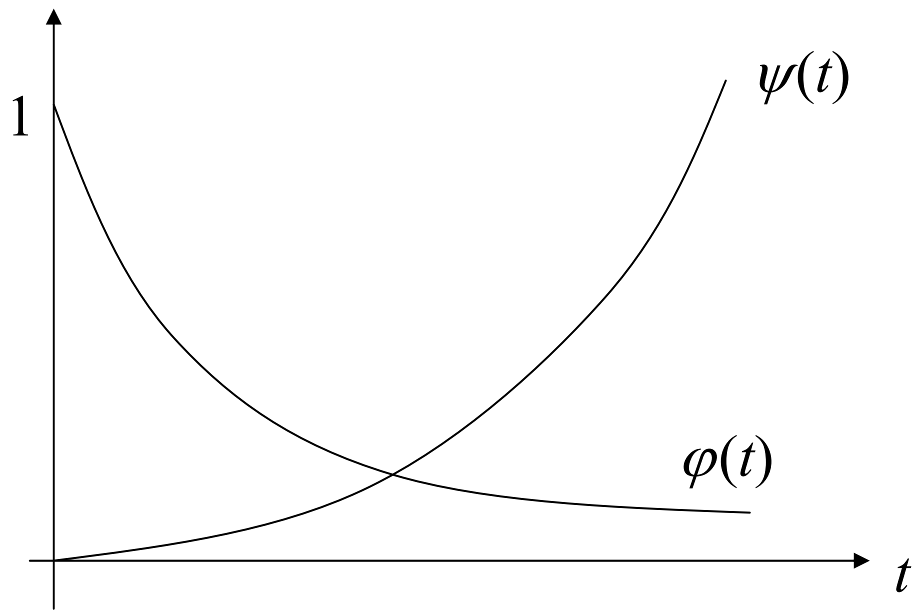
то есть $\sigma(t_1) \geq \sigma(t_2)$. Следовательно, оборудование выгодно эксплуатировать как можно дольше.

Случай 2

$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \psi(t) = k(\mathrm{e}^{\mu t} - 1), \quad \lambda > 0, k > 0, \mu > 0.$

Тогда $\sigma(t) = [g(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) + k(\mathrm{e}^{\mu t} - 1)]/t$ — выпуклая функция.

и t^* можно найти методом дихотомии за $O(\log(T/\varepsilon))$ операций, где ε — требуемая точность, T — оценка сверху на t^*.



Задача замены оборудования с учетом дисконтирования затрат

Приведение затрат к начальному моменту

Пусть χ — банковский процент, или коэффициент эффективности капиталовложений (годовая норма дисконта).

Если S_1 — капитал в начальный год, то по истечении года эта сумма станет равной $S_2 = S_1 \cdot (1 + \chi)$, а в конце t-го года $S_t = S_1 \cdot (1 + \chi)^{t-1}$.

Если в год t хотим потратить сумму S_t, то в начальный год должны иметь $S_1 = \dfrac{S_t}{(1+\chi)^{t-1}}$. Затраты S_t в год t, будучи приведенными к начальному моменту $t = 1$, равны

$$\widetilde{S} = \alpha^{t-1} \cdot S_t,$$

где $\alpha = \frac{1}{1+\chi}$ — *коэффициент дисконтирования*, $0 < \alpha \le 1$.

Если в течении T лет производились траты $S_1, S_2, \ldots, S_t$ то суммарные приведенные затраты вычисляются по формуле:

$$\tilde{S} = \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1} S_t .$$

Пример Рассмотрим распределение капитала в 8 млн. руб. в течение 8 лет при банковском проценте $\chi = 0.1$ $(\alpha = 0.91)$ и трех стратегиях:

1) все траты в 1-й год;
2) равномерные траты;
3) все траты в последний год.

Стратегия	Год								Суммарные приведенные затраты
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	8	–	–	–	–	–	–	–	8.0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	5.9
3	–	–	–	–	–	–	–	8	4.2

Постановка задачи

g — начальная стоимость оборудования;

c_t — стоимость эксплуатации оборудования в t год, $c_{t+1} \geq c_t$;

Система функционирует бесконечно, оборудование периодически заменяется.

T — период замены оборудования;

S_T — суммарные затраты при фиксированном периоде замены T:

$$S_T = \underbrace{g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1} c_t}_{\text{за первые } T \text{ лет}} + \underbrace{\alpha^T g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{T+t-1} c_t}_{\text{за вторые } T \text{ лет}} + \underbrace{\alpha^{2T} g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{2T+t-1} c_t}_{\ldots\ldots\ldots\ldots} + \ldots .$$

Благодаря дисконтированию затрат ($\alpha < 1$) величина S_T конечна:

$$S_T = (g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1} c_t)(1 + \alpha^T + \alpha^{2T} + \ldots) = (g + \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1} c_t)/(1 - \alpha^T) < \infty .$$

Задача отыскания оптимального периода замены оборудования: $S_T \to \min_{T>0}$

Теорема Если эксплуатационные затраты c_t не убывают со временем, то оптимальный период замены T^*, если он существует, определяется следующим соотношением

$$T^* = \min \{T \mid c_{T+1} > (1-\alpha)S_T,\ T > 0, \text{ целое}\}.$$

Оборудование не рекомендуется заменять до тех пор, пока эксплуатационные расходы следующего года не превысят средневзвешенную сумму уже произведенных затрат.

Лемма 1. $\Delta S_{T+1} = S_{T+1} - S_T = K_{T,\alpha}(c_{T+1} - (1-\alpha)S_T),$

где $K_{T,\alpha} = \alpha^T/(1-\alpha^{T+1}), \quad T \geq 1.$

Доказательство. $\Delta S_{T+1} = (g + \sum_{t=1}^{T+1} \alpha^{t-1} c_t)/(1-\alpha^{T+1}) - S_T =$

$$\frac{S_T(1-\alpha^T) + \alpha^T c_{T+1} - S_T(1-\alpha^{T+1})}{1-\alpha^{T+1}} = \frac{\alpha^T}{1-\alpha^{T+1}}(c_{T+1} - (1-\alpha)S_T). \quad \blacksquare$$

Следствие 1. При $T > 0$

$$\Delta S_{T+1} > 0 \Leftrightarrow c_{T+1} > (1-\alpha)S_T.$$

Лемма 2. Пусть существует $T^* = \min\ \{T \mid \Delta S_{T+1} > 0\}$. Тогда последовательность $\{S_T\}$, $T = T^*, T^*+1, T^*+2, \ldots$ — монотонно возрастающая.

Доказательство проведем индукцией по T.

При $T = T^*$ имеем $\Delta S_{T*+1} > 0$ и $S_{T*} < S_{T*+1}$. Пусть $S_{T*} < S_{T*+1} < \ldots < S_T$, $T > T^*$.

Покажем, что $S_T < S_{T+1}$.

Учитывая неубывание последовательности $\{c_t\}$ и положительность ΔS_T, по лемме 1 имеем

$$S_{T+1} - S_T = K_{T,\alpha}(c_{T+1} - (1-\alpha)S_T) \geq K_{T,\alpha}(c_T - (1-\alpha)S_T) =$$

$$= K_{T,\alpha}(c_T - (1-\alpha)S_{T-1} - (1-\alpha)\Delta S_T) = K_{T,\alpha}\left(\Delta S_T / (K_{T-1,\alpha}) - (1-\alpha)\Delta S_T\right) =$$

$$= \frac{\alpha(1-\alpha^{T-1})}{1-\alpha^{T+1}} \Delta S_T > 0. \ ■$$

Утверждение теоремы вытекает из следствий 1 и леммы 2. Если T^* не существует, то затраты S_T — невозрастающая функция и оборудование заменять не следует. ■

Применение динамического программирования

Рассмотрим систему, функционирующую в течение T лет, причем решение о замене оборудования принимается каждый год.

Дано: $\{1,\ldots, m\}$ — набор типов оборудования;

g_t^i — стоимость оборудования i-го типа, купленного в год t;

$c_t^i(\tau)$ — стоимость годовых эксплуатационных затрат на оборудование i-го типа, купленного в год t и проработавшего τ лет;

$\Phi_t^i(\tau)$ — остаточная стоимость оборудования i-го типа возраста τ, купленного в год t;

n — максимально допустимый возраст оборудования;

i_0, τ_0 — тип и возраст оборудования в начале функционирования;

Пусть $S_t^i(\tau)$ — минимальные суммарные затраты в интервале $[t, T]$, приведенные к началу t-го года, при условии, что в начале t-го года было оборудование типа i возраста τ. Требуется найти $S_1^{i_0}(\tau_0)$.

Рекуррентные соотношения:

$$S_T^i(\tau) = \min \begin{cases} c_{T-\tau}^i(\tau+1) - \alpha \Phi_{T-\tau}^i(\tau+1), & \text{если замены нет,} \\ \min\limits_{1 \le k \le m} [g_T^k + c_T^k(1) - \alpha \Phi_T^k(1)] - \Phi_{T-\tau}^i(\tau), & \text{в случае замены,} \end{cases}$$

$$1 \le \tau \le n, \quad 1 \le i \le m,$$

$$S_t^i(\tau) = \min \begin{cases} c_{t-\tau}^i(\tau+1) + \alpha S_{t+1}^i(\tau+1), & \text{если продолжаем эксплуатировать оборудование} \\ \min\limits_{1 \le k \le m} [g_t^k + c_t^k(1) + \alpha S_{t+1}^k(1)] - \Phi_{t-\tau}^i(\tau), & \text{если заменяем оборудование} \end{cases}$$

$$1 \le \tau \le n, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le t < T.$$

Алгоритм может быть реализован с трудоемкостью Т = $O(m^2 nT)$, и памятью П = $O(mnT)$.