

## Аппроксимационные схемы

**Определение** Алгоритм  $A$  называется  $\varepsilon$ -аппроксимационной схемой, если для любого  $\varepsilon \in ]0,1[$  и любых исходных данных  $I$  задачи верно

$$z^A(I) \geq (1 - \varepsilon)z^*(I)$$

Другими словами, алгоритм  $A$  является  $(1-\varepsilon)$ -приближенным алгоритмом для всех  $\varepsilon \in ]0,1[$ .

### Алгоритм $H^\varepsilon$

1.  $l := \min \{ \lceil 1/\varepsilon \rceil - 2, n \}$ ,  $z^A := 0$

2. Для всех подмножеств  $L \subset J$ ,  $|L| \leq l-1$

$$\text{if } \left( \sum_{j \in L} w_j \leq c \right) \text{ and } \left( \sum_{j \in L} p_j > z^A \right) \text{ then } z^A := \sum_{j \in L} p_j$$

3. Для всех подмножеств  $L \subset J$ ,  $|L| = l$

if  $(\sum_{j \in L} w_j \leq c)$  then

- Применить алгоритм  $A^{MG}$  к задаче с множеством предметов  $\{j \mid p_j \leq \min \{p_i, i \in L\}\} \setminus L$  и вместимостью рюкзака  $c - \sum_{j \in L} w_j$
- if  $\sum_{j \in L} p_j + z^{MG} > z^A$  then  $z^A := \sum_{j \in L} p_j + z^{MG}$ .

**Теорема.** Алгоритм  $H^\varepsilon$  является  $\varepsilon$ -аппроксимационной схемой.

**Доказательство.** Если оптимальное решение  $z^*$  содержит не более  $l$  предметов, то  $z^A = z^*$  и утверждение верно.

Пусть в оптимальном решении более чем  $l$  предметов. Выберем в нем подмножество  $L^*$  из  $l$  предметов с наибольшими весами  $p_j$ . Рассмотрим подзадачу  $S$  с множеством предметов  $\{j \mid p_j \leq \min \{p_i, i \in L^*\}\} \setminus L^*$  и вместимостью рюкзака  $c - \sum_{j \in L^*} w_j$ . Оптимальное решение этой подзадачи

обозначим через  $z_S^*$ . Тогда  $z^* = z_S^* + \sum_{j \in L^*} p_j$ . Приближенное решение,

полученное алгоритмом  $A^{MG}$ , обозначим через  $z_S^{MG}$ .

По определению  $z^A \geq \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG}$  и, кроме того,  $z_S^{MG} \geq \frac{1}{2} z_S^*$ .

Рассмотрим два случая:

$$1. \sum_{j \in L^*} p_j \geq \frac{l}{l+2} z^*. \text{ Тогда } z^A \geq \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG} \geq \sum_{j \in L^*} p_j + \frac{1}{2} z_S^* =$$

$$\sum_{j \in L^*} p_j + \frac{1}{2} (z^* - \sum_{j \in L^*} p_j) = \frac{1}{2} (z^* + \sum_{j \in L^*} p_j) \geq \frac{1}{2} (z^* + \frac{l}{l+2} z^*) = \frac{l+1}{l+2} z^*$$

$$2. \sum_{j \in L^*} p_j < \frac{l}{l+2} z^*. \text{ Тогда в } L^* \text{ найдется предмет с } p_j < \frac{1}{l+2} z^*. \text{ По}$$

определению в подзадаче  $S$  все предметы имеют вес не более  $\frac{1}{l+2} z^*$ .

Применяя свойство 2 для  $LP$ -релаксаций, получаем

$$z^* = \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^* \leq \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG} + \frac{1}{l+2} z^* \leq z^A + \frac{1}{l+2} z^*.$$

Итак, в обоих случаях получаем  $z^A \geq \frac{l+1}{l+2} z^*$ . Величина  $\frac{l+1}{l+2}$  растет с ростом

$$l \text{ и } \frac{l+1}{l+2} \geq \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 - \varepsilon. \quad \blacksquare$$

$$T = O(n n^l) = O(n^{l+1}). \quad \Pi = O(n).$$

**Пример.** Положим  $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ ,  $c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil M$  и

$$p_1 = 2, \quad p_2 = p_3 = \dots = p_n = M,$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = w_3 = \dots = w_n = M.$$

Оптимум  $z^* = M(l + 2)$ ,  $l = n - 3$ ,  $z^A = (l + 1)M + 2$  и

$$z^A / z^* \rightarrow (l + 1) / (l + 2) \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty.$$

**Определение.**  $\varepsilon$ -аппроксимационная схема  $A$  называется *полиномиальной*, если ее трудоемкость полиномиально зависит от размерности задачи.

$T_H = O(n^{l+1}) = O(n^{1/\varepsilon - 1})$  — полиномиальная зависимость при заданном  $\varepsilon$ . Если  $\varepsilon = 0.1$ , то  $T_H = O(n^9)$ , то есть алгоритм  $H^\varepsilon$  является полиномиальной  $\varepsilon$ -аппроксимационной схемой для задачи о рюкзаке.

**Определение.**  $\varepsilon$ -аппроксимационная схема  $A$  называется *полностью полиномиальной*, если ее трудоемкость полиномиально зависит от размерности задачи и величины  $1/\varepsilon$ .

**Теорема.** Для задачи о рюкзаке существует полностью полиномиальная  $\varepsilon$ -аппроксимационная схема.

**Доказательство.** Для примера  $I = \{p_1, \dots, p_n, w_1, \dots, w_n, c\}$  построим новый пример  $\bar{I}$ , в котором  $\bar{c} = c, \bar{w}_j = w_j, \bar{p}_j = \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor$  для некоторой константы  $K > 0$ , которую определим позже. Для примера  $\bar{I}$  применим алгоритм ДП и найдем оптимальный набор предметов  $\bar{X}$ . Скорее всего, он будет отличаться от оптимального набора  $X^*$  для примера  $I$ . Оценим разность между полученным значением  $z^A$  и оптимальным  $z^*$ :

$$\begin{aligned} z^A &= \sum_{j \in \bar{X}} p_j \geq \sum_{j \in \bar{X}} K \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq K \sum_{j \in X^*} \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq \sum_{j \in X^*} K \left( \frac{p_j}{K} - 1 \right) = \\ &= \sum_{j \in X^*} (p_j - K) = z^* - |X^*| K. \end{aligned}$$

Второе неравенство в этой цепочке следует из оптимальности  $\bar{X}$  для  $\bar{I}$ .

Мы хотим получить  $\frac{z^* - z^A}{z^*} \leq \frac{|X^*| K}{z^*} \leq \varepsilon$ .

Следовательно,  $K \leq \frac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|}$ . Так как  $n \geq |X^*|$  и  $z^* \geq p_{\max}$ , то

$$\frac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|} \geq \frac{\varepsilon \cdot z^*}{n} \geq \frac{\varepsilon \cdot p_{\max}}{n}$$

и, полагая  $K = \varepsilon \cdot p_{\max} / n$ , получим нужное значение для параметра  $K$ .

Трудоёмкость алгоритма определяется трудоёмкостью ДП. Если вместо исходной задачи решать обратную к ней, то  $T = O(Un)$ , где  $U$  — верхняя оценка на оптимальное значение целевой функции  $\bar{z}^* = \sum_{j \in \bar{X}} \bar{p}_j$ .

Очевидно, что  $\bar{z}^* \leq n \bar{p}_{\max}$ , но  $\bar{p}_{\max} \leq \frac{p_{\max}}{K} = \frac{n}{\varepsilon}$ , то есть  $\bar{z}^* \leq n^2 / \varepsilon$ .

Полагая  $U = n^2 / \varepsilon$ , получаем  $T = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ ,  $\Pi = O(Un) = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ . ■