

Теория принятия решений

НГУ

Факультет информационных технологий

3 курс, 2 семестр

Лектор: **Кочетов Юрий Андреевич**

<http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/tpr-2013.html>

Исследование операций

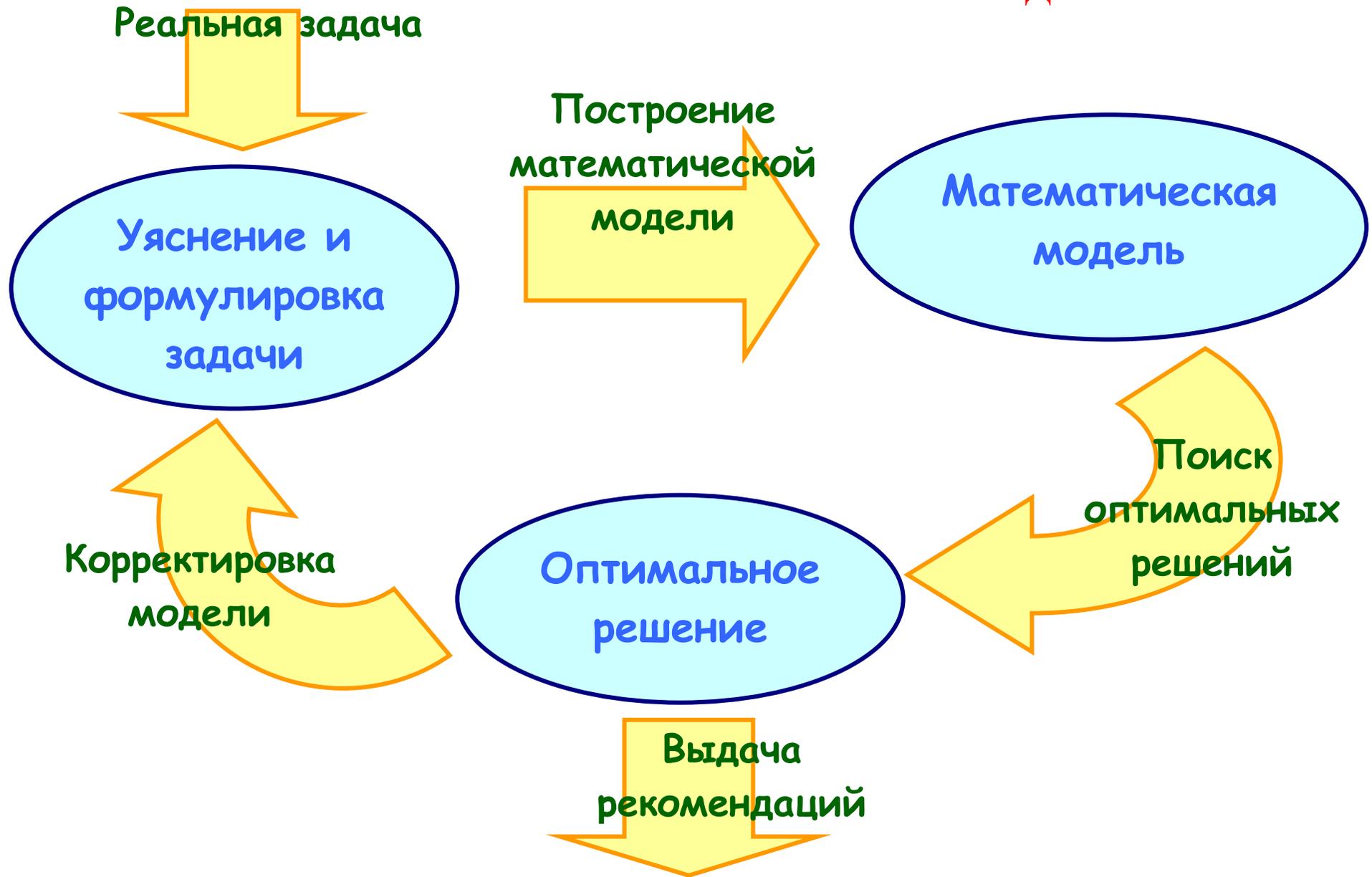
Исследование операций — теория математических моделей и методов принятия решений.

1. Наличие некоторого **процесса**
2. Наличие **управляющих воздействий**
3. Наличие **цели**, ради которой проводится операция
4. **Выбор наилучшего (оптимального) управления**, при котором достигается цель

Операция — система действий, объединенная единым замыслом и направленная на достижение определенной цели.

Основная задача теории оптимальных решений состоит в представлении обоснованных количественных данных и рекомендаций для принятия оптимальных решений.

Схема исследования



Математическая модель

Математическая модель — объективная схематизация основных аспектов решаемой задачи или ее описание в математических терминах.

Математическая модель описывает исследуемую систему и позволяет выразить ее эффективность в виде *целевой функции*

$$W = f(X, Y),$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$ — управляемые переменные,

$Y = (y_1, \dots, y_m)$ — неуправляемые переменные (исходные данные).

Связь между переменными X и исходными данными Y выражается с помощью ограничений

$$\varphi(X, Y) \leq 0.$$

Модели принятия решений

1. Долгосрочное стратегическое планирование:

задачи размещения производства, развитие нефтяной и газовой промышленности

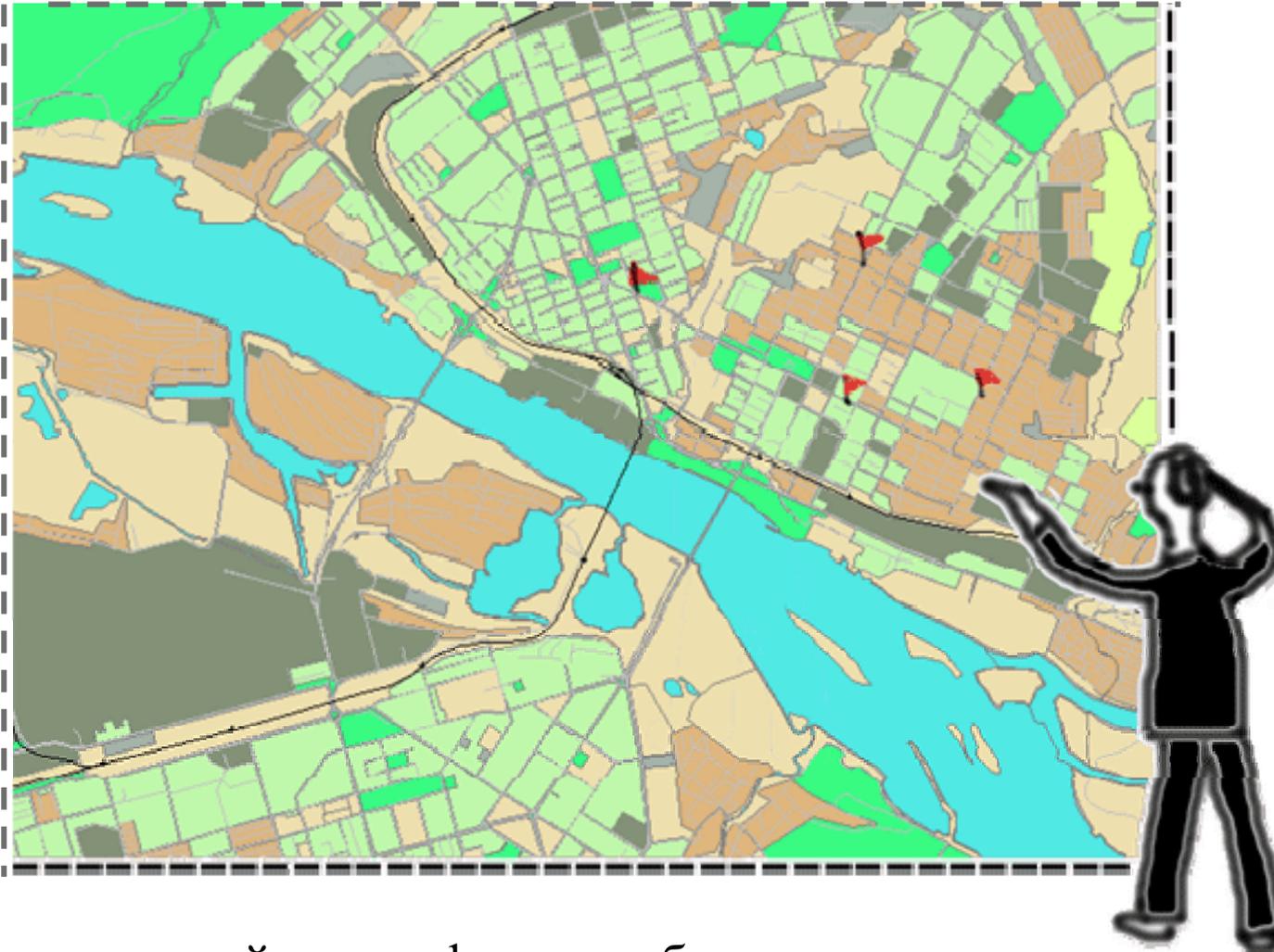
2. Среднесрочное планирование:

транспортные задачи, задачи маршрутизации, задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами

3. Оперативное управление:

задачи теории расписаний, задачи раскроя и упаковки

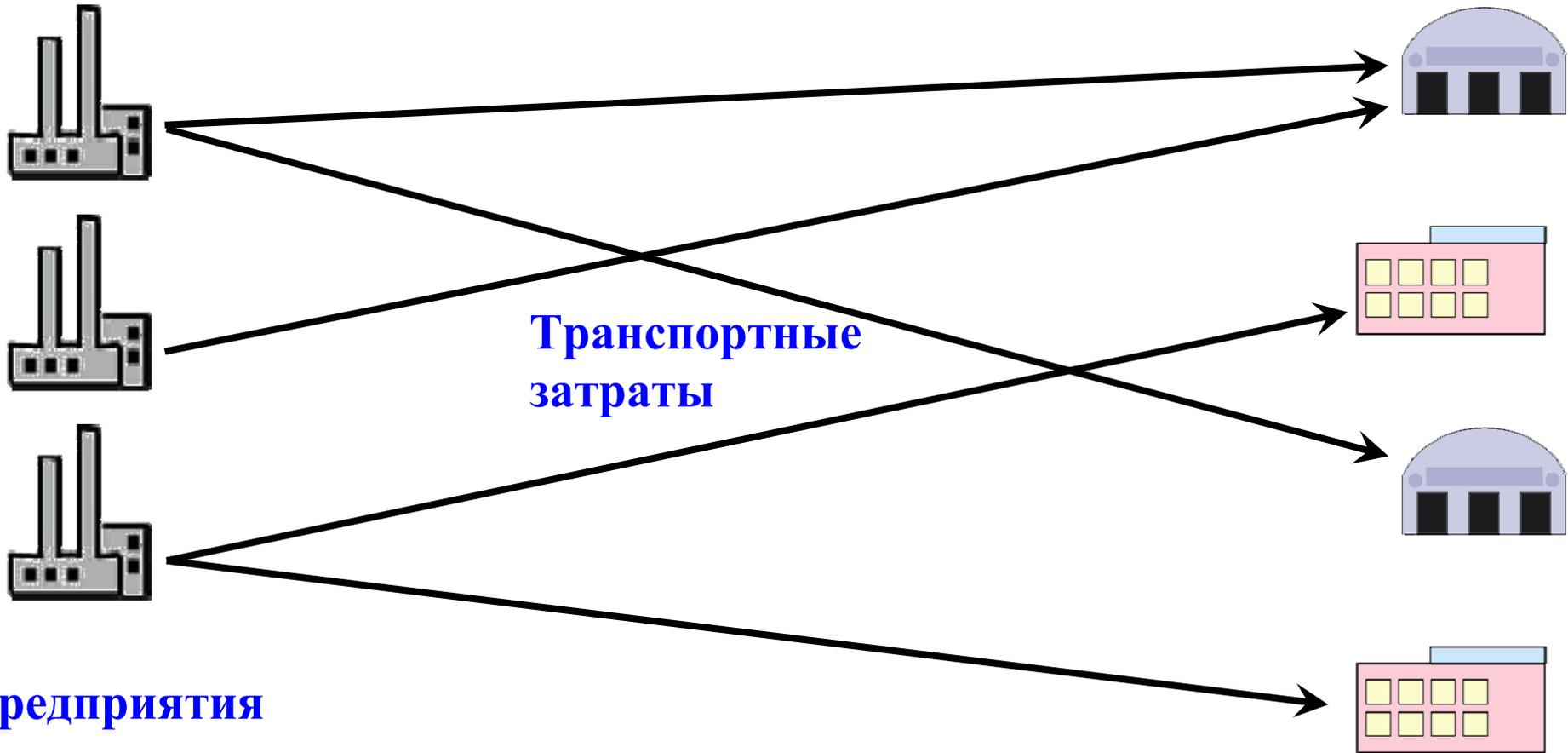
Задачи размещения производства



Системы сотовой связи, филиалы банков, производство продукции

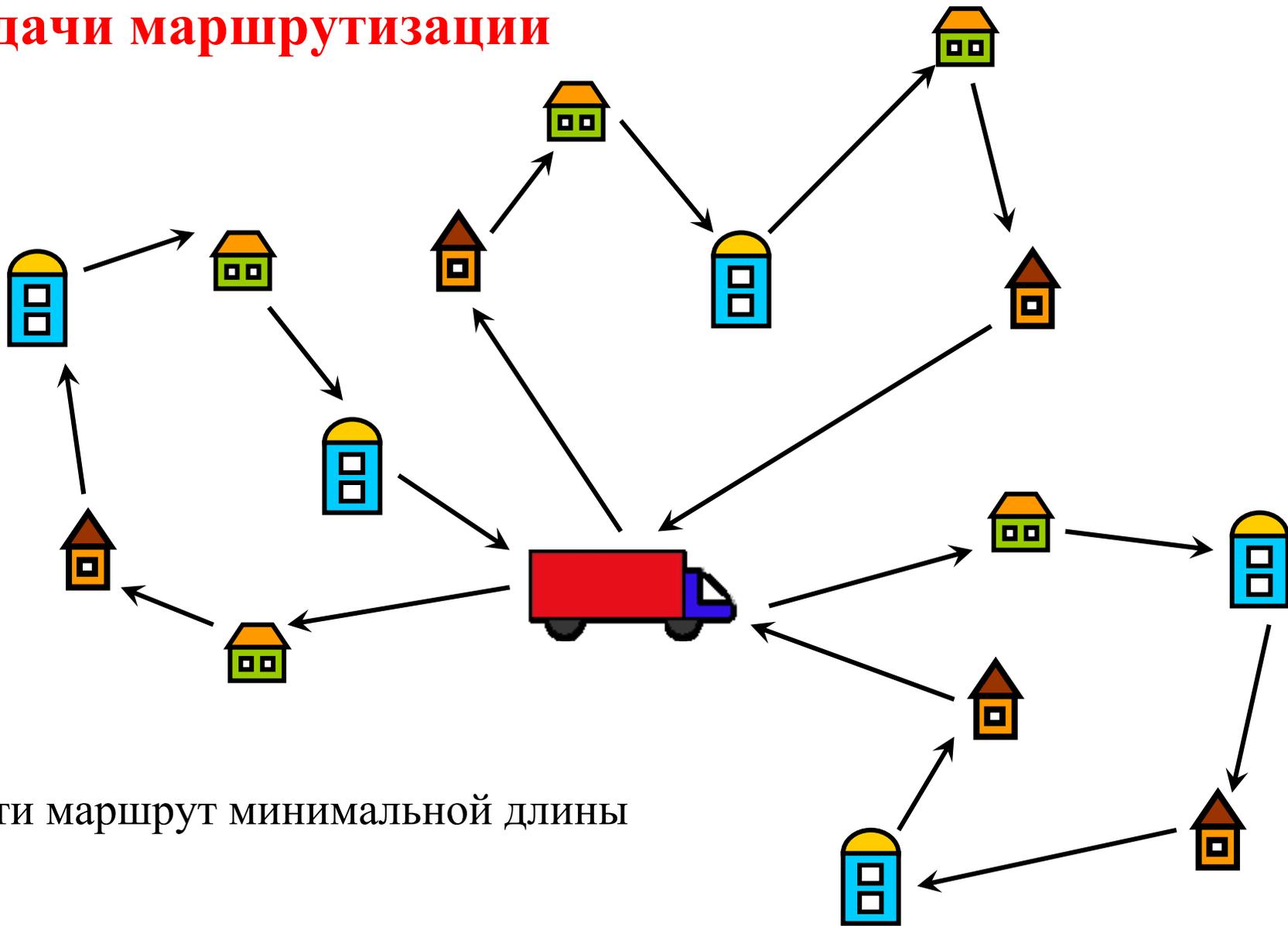
Транспортные задачи

Потребители



Минимизировать затраты на перевозку продукции

Задачи маршрутизации



Задачи теории расписаний

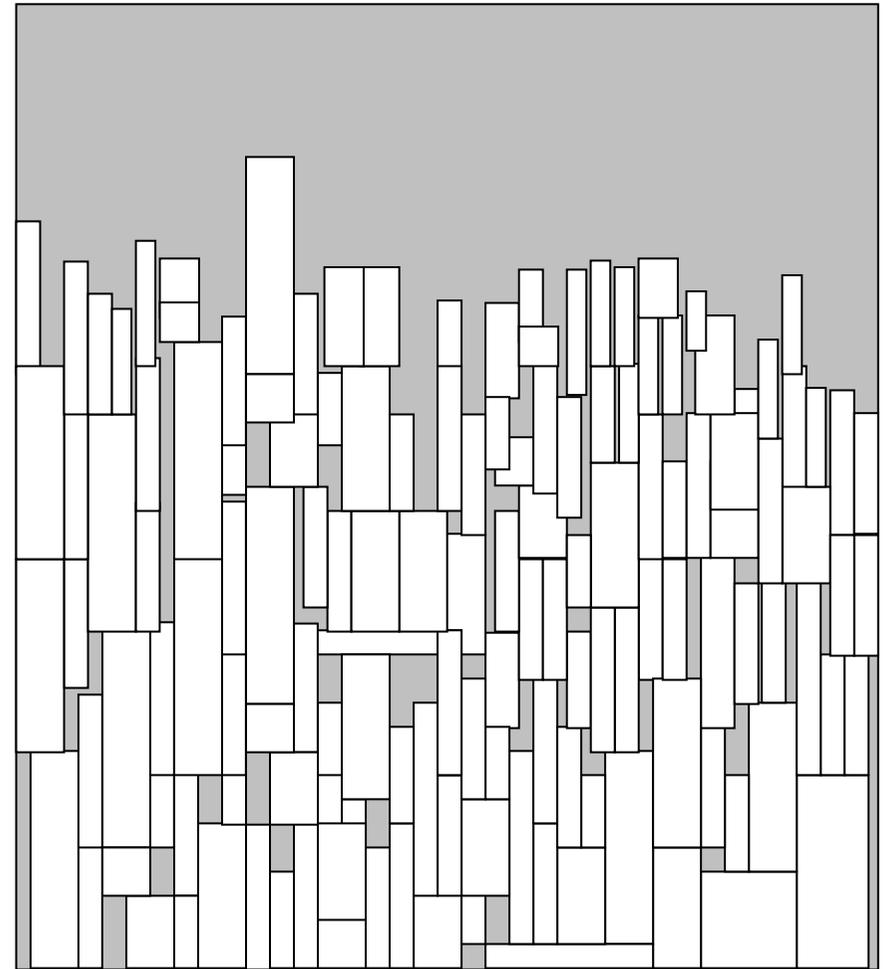
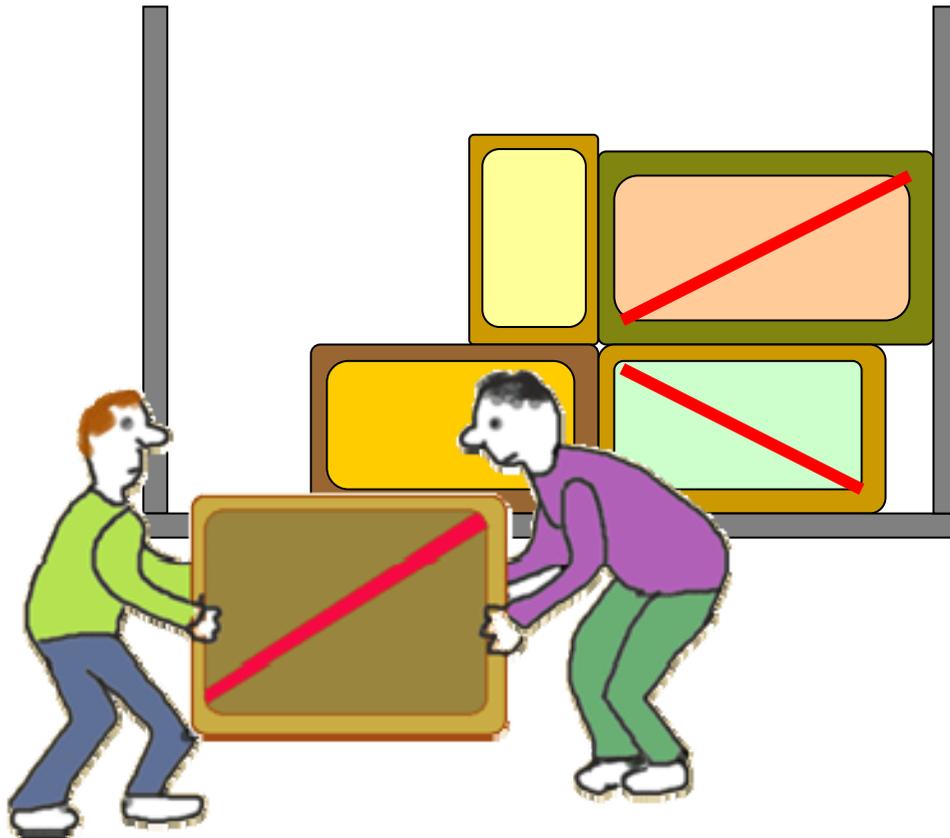
14:25

007	Москва – Владивосток	02:30	02:50	007	Москва – Владивосток	02:30	02:50
874	Москва – Одесса	11:05	11:25	874	Москва – Одесса	11:05	11:25
65	Урюпинск – Киев	12:20	12:45	65	Урюпинск – Киев	12:20	12:45
874	Новосибирск – Бийск	14:45	14:55	874	Новосибирск – Бийск	14:45	14:55
007	Барнаул – Магистрала	16:00	16:10	007	Барнаул – Магистрала	16:00	16:10
874	Москва – Карелия	18:25	18:45	874	Москва – Карелия	18:25	18:45



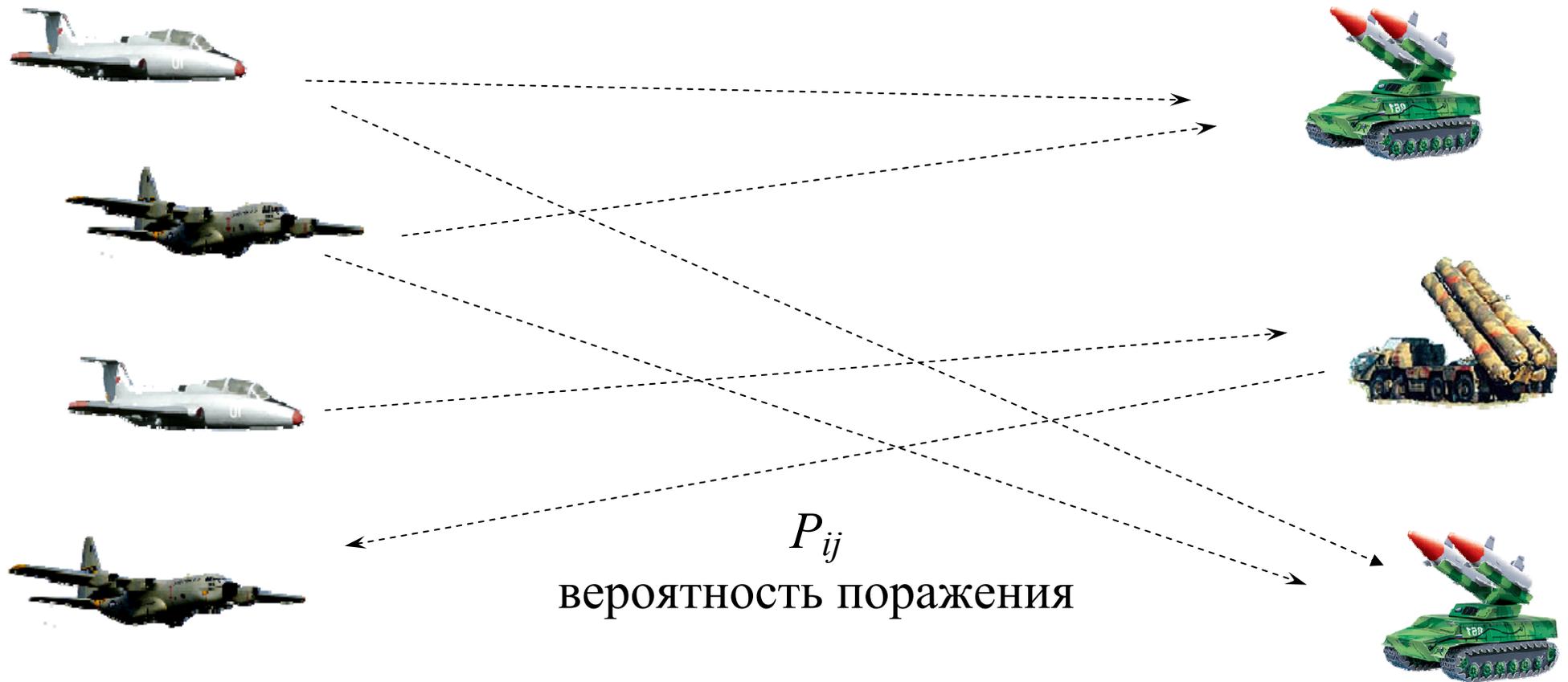
Графики движения поездов, рабочие бригады, ремонт составов

Задачи раскроя и упаковки

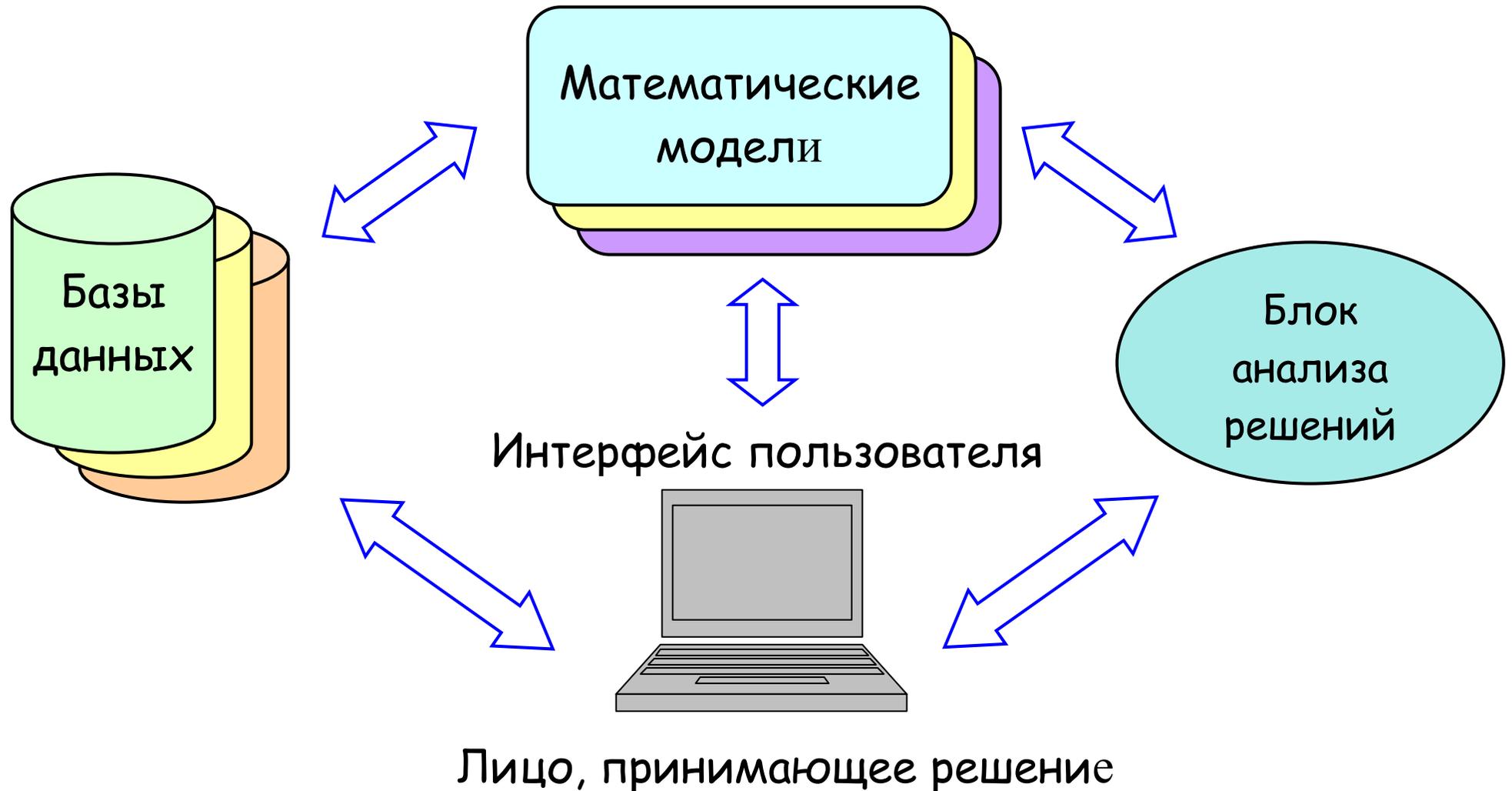


Раскрой пиломатериала, листового железа, станки с ЧПУ

Матричные игры



Системы поддержки решений



Распределительная задача

Имеем

n — число предприятий;

Y — количество единиц некоторого ресурса;

$f_k(x)$ — количество продукции, которое будет произведено на k -м предприятии, если в него будет вложено x единиц ресурса (монотонно неубывающая функция).

Требуется: максимизировать объем продукции

$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$x_1 + \dots + x_n \leq Y \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, \text{ целые, } i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Идея динамического программирования (ДП)

Метод ДП (Р. Беллман, В.С. Михалевич, Н.З. Шор) можно трактовать как алгоритмическую версию рассуждений по индукции.

Пусть $s_k(y)$, $1 \leq k \leq n$, $0 \leq y \leq Y$, — оптимальное значение целевой функции задачи (1) – (3), где n заменено на k , Y заменено на y .

Требуется найти $s_n(Y)$ и набор переменных, на котором достигается это значение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f_1, \dots, f_n — монотонно неубывающие функции. Тогда справедливы следующие *рекуррентные соотношения*:

$$s_1(y) = f_1(y), \quad 0 \leq y \leq Y; \quad (4)$$

$$s_k(y) = \max \{s_{k-1}(y-x) + f_k(x) \mid 0 \leq x \leq y\}, \quad 2 \leq k \leq n, \quad 0 \leq y \leq Y, \quad (5)$$

Доказательство: Соотношение (4) очевидно. По определению

$$s_k(y) \geq \max \{s_{k-1}(y-x) + f_k(x) \mid 0 \leq x \leq y\}.$$

Пусть теперь (x_1^*, \dots, x_k^*) — такой вектор, что $x_1^* + \dots + x_k^* \leq y$ и

$$s_k(y) = f_1(x_1^*) + \dots + f_k(x_k^*).$$

Поскольку $s_{k-1}(y-x_k^*) \geq f_1(x_1^*) + \dots + f_{k-1}(x_{k-1}^*)$, имеем

$$s_k(y) = f_1(x_1^*) + \dots + f_k(x_k^*) \leq s_{k-1}(y-x_k^*) + f_k(x_k^*). \quad \blacksquare$$

Алгоритм ДП вычисляет множество $S_k = \{s_k(y) \mid 0 \leq y \leq Y\}$, $k = 1, \dots, n$ с помощью соотношений (4) и (5), где на каждом шаге оптимизируется ровно одна переменная.

Процесс вычисления S_1, \dots, S_n называется **прямым ходом** алгоритма.

Число операций $\approx Y^2 n$

Память $\approx Y n$.

y	$S_1(y)$	$S_2(y)$	\dots	$S_n(y)$
0				
1				
2				
\vdots				
Y				$S_n(Y)$

При **обратном ходе** алгоритма вычисляются значения (x_n^*, \dots, x_1^*) , с учетом того, что уже известны $S_k(y)$. Например, x_n^* определяется из уравнения $s_n(Y) = f_n(x_n^*) + s_{n-1}(Y - x_n^*)$ и так далее.

Число операций $\approx Y n$. Память $\approx Y n$.

Характеристики алгоритмов

Для оценки качества алгоритмов будем использовать два параметра:

T_A — *трудоемкость* (число элементарных операций алгоритма A);

P_A — требуемый *объем памяти*.

Элементарная операция — одна из арифметических операций:

сложение, вычитание, умножение, деление или логическая операция сравнение двух чисел.

Нас будет интересовать зависимость параметров алгоритма от длины записи исходных данных задачи с точностью до порядка величин.

Пример: При $T = 3/2 n^2$, будем писать $T = O(n^2)$ или $T \approx n^2$.

Полиномиальные алгоритмы

Определение. Алгоритм A называют *полиномиальным*, если его трудоемкость T_A ограничена полиномом от длины записи исходных данных, то есть существует константа $c > 0$ и натуральное число k такие, что $T_A \leq cL^k$, где L — длина записи исходных данных.

Если трудоемкость алгоритма нельзя ограничить полиномом, то алгоритм называют *экспоненциальным*.

Пример 1

Заданы n чисел a_1, \dots, a_n . Упорядочить их в порядке неубывания.

Алгоритм: выбираем наименьший элемент, затем наименьший из оставшихся и т.д.

Длина запись исходных данных:
$$L = \sum_{i=1}^n \log_2 a_i$$

$$T \sim O(n^2) \leq O(L^2),$$

то есть алгоритм является полиномиальным.

Пример 2

Алгоритм динамического программирования для задачи (1)–(3).

Пусть $f_i(x_i) = a_i x_i$, все коэффициенты a_i ограничены константой, $a_i \leq c$, но $Y = 2^n$.

Тогда длина записи $L = \sum_{i=1}^n \log a_i + \log Y \leq c'n$, то есть $L = O(n)$, но

$$T = O(Y^2 n) = O(2^{2L} L),$$

и алгоритм ДП не является полиномиальным.

Обобщим задачу (1)–(3):

$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \rightarrow \max \quad (1')$$

$$h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n) \leq Y \quad (2')$$

$$a_i \geq x_i \geq 0, \text{ целые, } i = 1, \dots, n. \quad (3')$$

Если $h_i(x)$ — целочисленные монотонно неубывающие функции, то вместо (4)–(5) можно использовать следующие

рекуррентные соотношения:

$$s_1(y) = f_1(x^*), \text{ где } x^* = \max \{x \leq a_1 \mid h_1(x) \leq y\}, 0 \leq y \leq Y; \quad (4')$$

$$s_k(y) = \max_{\{x \leq a_k \mid h_k(x) \leq y\}} \{f_k(x) + s_{k-1}(y - h_k(x))\}, 2 \leq k \leq n, 0 \leq y \leq Y. \quad (5')$$

Упражнение 1. Доказать справедливость соотношений (4')–(5').

Обратная задача — поиск наименьших затрат на получение заданного количества продукции:

$$h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n) \rightarrow \min \quad (6)$$

$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \geq D \quad (7)$$

$$a_i \geq x_i \geq 0, \text{ целые, } i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Если $f_k(x)$ — целочисленные монотонно неубывающие функции, то для решения задачи (6)–(8) можно использовать идеи динамического программирования.

Пусть $f_i^{-1}(d) = \min\{0 \leq x \leq a_i \mid f_i(x) \geq d\}$.

Для $1 \leq k \leq n$, $0 \leq d \leq D$ обозначим через $t_k(d)$ — оптимальное решение задачи (6)–(8), в которой n заменено на k , а D заменено на d .

Требуется найти $t_n(D)$.

Рекуррентные соотношения

$$t_1(d) = \begin{cases} \infty, & \text{если } f_1(a_1) < d, \\ h_1(f_1^{-1}(d)), & \text{если } f_1(a_1) \geq d, \end{cases} \quad 0 \leq d \leq D, \quad (9)$$

$$t_k(d) = \min\{t_{k-1}(d - f_k(x)) + h_k(x) \mid 0 \leq x \leq a_k, x \leq f_k^{-1}(d)\}, \quad (10)$$
$$k \geq 2, \quad 0 \leq d \leq D.$$

Упражнение 2. Доказать справедливость соотношений (9)–(10).

ТЕОРЕМА 2: Предположим, что D — наибольшее число, для которого оптимальное значение целевой функции задачи (6)–(8) не превосходит Y . Тогда оптимальное значение целевой функции задачи (1')–(3') равно D .

Доказательство: Пусть D удовлетворяет условию теоремы и (x_1^*, \dots, x_n^*) — соответствующее решение задачи (6)–(8).

Значит

$$f_1(x_1^*) + \dots + f_n(x_n^*) \geq D \text{ и } h_1(x_1^*) + \dots + h_n(x_n^*) \leq Y.$$

Следовательно, D не превосходит оптимального решения D_1 задачи (1')–(3'). Если бы D_1 было больше D , то решение задачи (6)–(8), в которой D заменено на D_1 , тоже не превышало бы Y , что противоречит максимальнойности D . ■