Задачи о покрытии

Дано: Сеть дорог и конечное множество пунктов для размещения постов ГАИ. Каждый пункт может контролировать дорогу на заданном расстоянии от него. Известно множество опасных участков на дорогах.

Найти: минимальное число постов для контроля всех опасных участков.

Обозначения:

$I = \{1, \ldots, m\}$ — множество всех возможных пунктов для размещения постов ГАИ;

$J = \{1, \ldots, n\}$ — множество опасных участков;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если из пункта } i \text{ можно контролировать участок } j \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если в пункте } i \text{ устанавливается пост ГАИ} \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in I} x_i$$

при ограничениях:
$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \in \{0,1\} \; i \in I.$$

Пусть $c_i \geq 0$ — стоимость создания поста в пункте i и число постов не превосходит $p>0$. Требуется минимизировать суммарную стоимость:

$$\min \sum_{i \in I} c_i x_i$$

при ограничениях:
$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i \in \{0,1\} \; i \in I.$$

Предположим, что имеется возможность открыть не более p постов и их не хватит для контроля всех опасных участков.

Требуется при данном ограничении найти размещение постов для контроля максимального числа опасных участков.

Переменные задачи:

$$y_j = \begin{cases} 1, \text{если опасный участок } j \text{ под контролем} \\ 0 \ \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если в пункте } i \text{ устанавливается пост ГАИ} \\ 0 \ \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\max \sum_{j \in J} y_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \ge y_j, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \le p;$$

$$x_i, y_j \in \{0,1\}, \quad i \in I, \ j \in J.$$

Упражнение. Показать, что эта модель не эквивалентна нижеследующей модели:

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij} x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_i \le p;$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I.$$

Если опасные участки опасны в разной степени и величина b_j задает, например, число аварий на участке j за год, то задача предотвращения максимального числа аварий записывается следующим образом:

$$\max \sum_{j \in J} b_j y_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \ge y_j, \quad j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \le p;$$

$$x_i, y_j \in \{0,1\}, \quad i \in I, \ j \in J.$$

Жадный алгоритм

Рассмотрим взвешенную задачу о покрытии

$$\min\left\{\sum_{i\in I} c_i x_i \;\middle|\; \sum_{i\in I} a_{ij} x_i \ge 1,\, j\in J,\, x_i\in\{0,1\}\right\}$$

Алгоритм

1. Положить $X^0 := \varnothing$, $k := 0$, $J_i^k := \{j\in J \mid a_{ij} = 1\}$, $i\in I$, $J^0 := \varnothing$;

2. Пока $J^0 \ne J$ выполнять:

   2.1. Найти $i_0 \in I\setminus X^k$ такой, что $J_{i_0}^k \ne \varnothing$ и $\dfrac{c_{i_0}}{|J_{i_0}^k|} = \min\limits_{i\in I\setminus X^k}\left\{\dfrac{c_i}{|J_i^k|} \;\middle|\; |J_i^k| \ne \varnothing\right\}$;

   2.2. Положить $k := k+1$, $X^k := X^{k-1}\cup\{i_0\}$, $J^0 := J^0 \cup J_{i_0}^{k-1}$

   и $J_i^k := J_i^{k-1}\setminus J_{i_0}^{k-1}$ для всех $i\in I\setminus X^k$.

Пример

$I = \{1,\dots, n+1\}$, $J = \{1,\dots, n\}$

$$
\text{вектор } (c_i) \quad
\begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}
\qquad
\text{матрица } (a_{ij}) \quad
\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & \\ & & & & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}
$$

Оптимальное решение $X^* = \{n + 1\}$ и его значение $(1 + \varepsilon)$. Жадный алгоритм сначала возьмет $i = 1$, затем $i = 2$, …, $i = n$, и получит значение

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\leq 1+\log n.$$

Трудоемкость алгоритма $T \sim O(mn)$ при правильном хранении множеств J_i^k, $i \in I$.

Без ограничения общности будем считать, что $X^k = \{1, 2, \dots, k\}$ для $k = 1, \dots, K$ и алгоритм получил покрытие после K итераций.

Обозначим $q_i^k = |J_i^k|$, $i \in I$, $k = 1, \dots, K$ и заметим, что

$$c_k / q_k^k \le c_i / q_i^k, \quad i \in I,$$

$$J_i^{k+1} \subseteq J_i^k \quad \text{и} \quad J_i^0 \cap J_k^k = J_i^k \setminus J_i^{k+1},$$

$$J = \bigcup_{k=1}^{K} J_k^k, \quad J_{k_1}^{k_1} \cap J_{k_2}^{k_2} = \varnothing, \text{ при } k_1 \ne k_2.$$

Рассмотрим функцию $H(p) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i}, \quad p = 1, 2, \dots$

Теорема Чватала. Пусть X^* — оптимальное решение взвешенной задачи о покрытии, а X^K — решение жадного алгоритма. Тогда

$$\sum_{i \in X^K} c_i \le H\left(\max_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}\right) \sum_{i \in X^*} c_i .$$

Доказательство: Наряду с исходной задачей рассмотрим задачу с новой целевой функцией и непрерывными переменными:

$$\min\left\{ \sum_{i \in I} c_i H\left(\sum_{j \in J} a_{ij}\right) x_i \,\middle|\, \sum_{i \in I} a_{ij} x_i \ge 1, j \in J, x_i \ge 0 \right\}.$$

Двойственная к ней имеет вид

$$\max\left\{ \sum_{j \in J} u_j \,\middle|\, \sum_{j \in J} a_{ij} u_j \le c_i H\left(\sum_{j \in J} a_{ij}\right), i \in I, u_j \ge 0 \right\}.$$

Так как множества J_k^k образуют разбиение множества J, то положим

$$u_j = c_k / q_k^k, \quad j \in J_k^k, \quad k = 1,\dots,K.$$

Покажем, что u_j —допустимое решение двойственной задачи. Для любого $i \in I$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}u_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in J_k^k} a_{ij}u_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in J_i^0 \cap J_k^k} u_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in J_i^k \setminus J_i^{k+1}} c_k \Big/ q_k^k = \sum_{k=1}^{K} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_k \Big/ q_k^k.$$

Пусть для рассматриваемого $i \in I$ номер k_0 — наибольший номер k, $1 \le k \le K$ такой, что $J_i^k \ne \varnothing$. Тогда, продолжая приведенные выше неравенства, получаем

$$\sum_{j\in J} a_{ij}u_j = \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_k \Big/ q_k^k \le \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_i \Big/ q_i^k =$$

$$c_i \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) \Big/ q_i^k \le c_i \sum_{k=1}^{k_0} \Big(H(q_i^k) - H(q_i^{k+1}) \Big) \le c_i H(q_i^1) = c_i H\left(\sum_{j\in J} a_{ij} \right).$$

Итак, построенное решение является допустимым в двойственной задаче. Кроме того,

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in J_k^k} c_k \Big/ q_k^k = \sum_{k=1}^{K} q_k^k \, c_k \Big/ q_k^k = \sum_{k=1}^{K} c_k = \sum_{k\in X^K} c_k \,.$$

Но по теореме двойственности

$\sum_{j\in J} u_j \le H(\max_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{ij}) \sum_{i\in X^*} c_i$ откуда и вытекает требуемая оценка. ■

Плохая новость.

Существует константа $0 < \gamma < 1$ такая, что наличие полиномиального приближенного алгоритма с оценкой относительной погрешности $\gamma H(\max_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{ij})$

влечет P=NP.

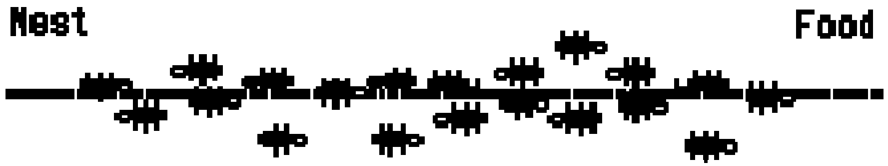
Алгоритм муравьиной колонии

Предложен в начале 90-х годов прошлого века M. Dorigo и V. Maniezzo

Муравьи ориентируются по запаху.

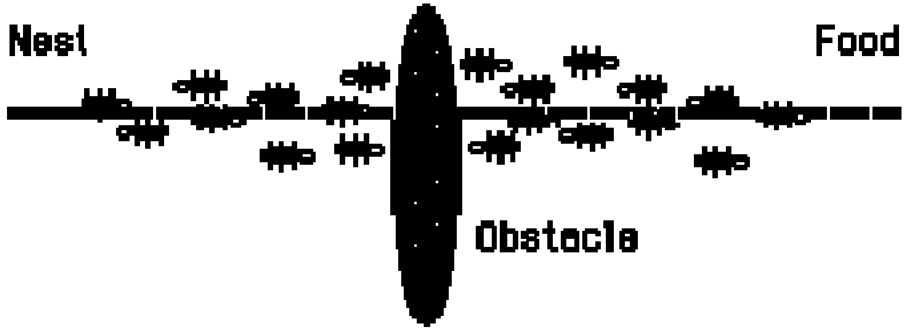
Каждый муравей оставляет после себя сильно пахнущее вещество — *феромен*.

При выборе направления домой с большей вероятностью выбирается направление с более сильным запахом.



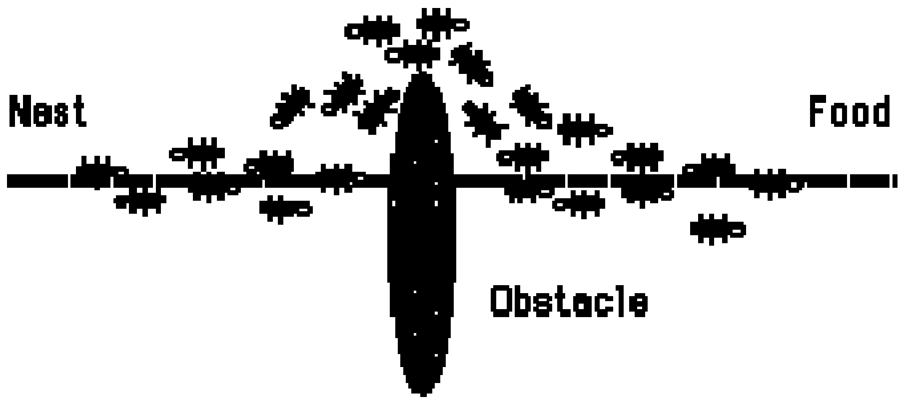
← Кратчайший путь

Появилось препятствие →



← Обход препятствия

Новый кратчайший путь →



Вероятностный жадный алгоритм

Пусть $X \subset I$, $J(X) = \{j \in J \mid \sum_{i \in X} a_{ij} \geq 1\}$ — множество “покрытых” столбцов,

$q_i(X)$ — мощность множества $J_i(X) = \{j \in J \mid a_{ij} = 1\} \setminus J(X)$, $i \in I \setminus X$,

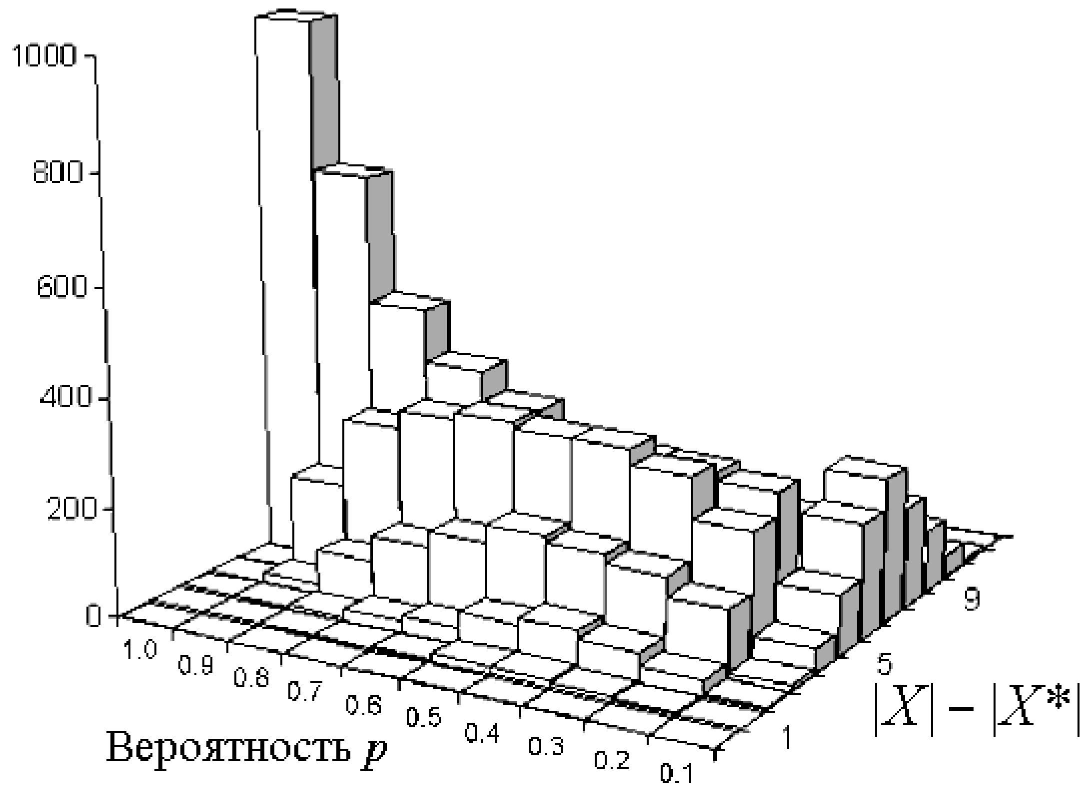
$\rho_i = c_i / q_i(X)$, $i \in I \setminus X$ — удельные приращения целевой функции,

$L(p)$ — случайное подмножество множества $I \setminus X$; элемент $i \in I \setminus X$ включается в множество $L(p)$ с вероятностью p независимо от других элементов.

Вероятностный жадный алгоритм

1. Положить $X := \varnothing$, $J^0 := \varnothing$.
2. Пока $J^0 \neq J$ выполнять:
   - 2.1. Сформировать подмножество $L(p) \subseteq I \setminus X$;
   - 2.2. Найти $i_0 \in L(p)$ с ненулевым значением $q_{i_0}(X)$ и минимальным удельным приращением ρ_i .
   - 2.3. Положить $X := X \cup \{i_0\}$; $J^0 := J^0 \cup J_{i_0}(X)$.

Влияние рандомизации на погрешность, случай $c_i = 1$, $i \in I$.



При фиксированном значении $p>0$ проводилось 1000 испытаний алгоритма. Число решений с одинаковым значением представлено на графике столбиком.

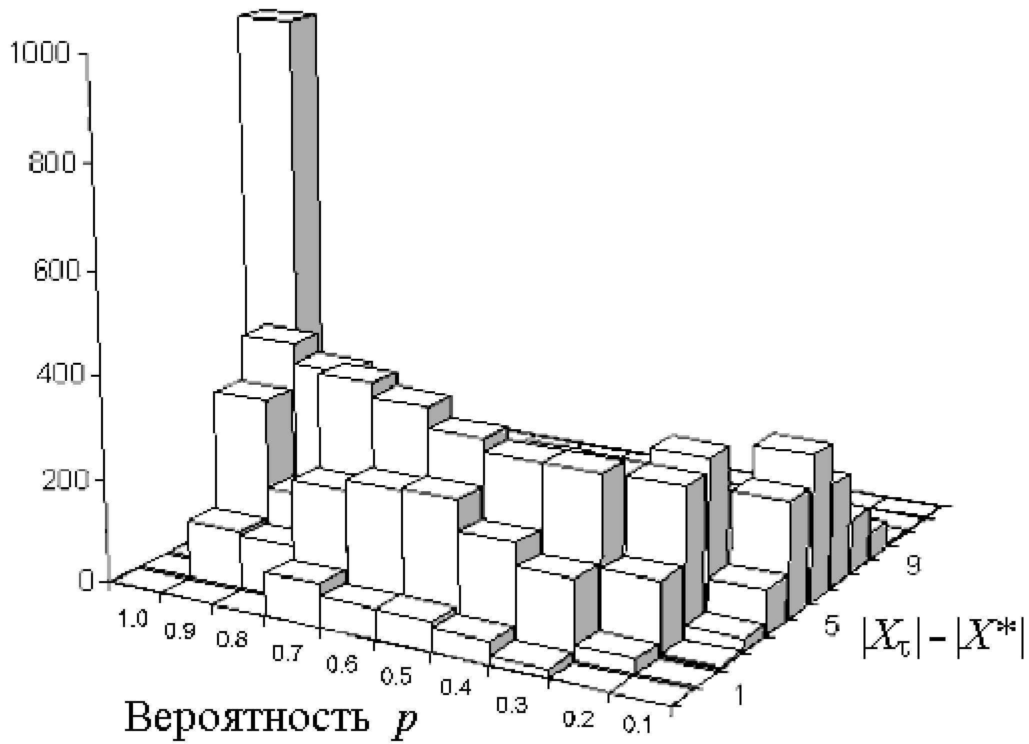
Алгоритм муравьиной колонии

Пусть вектор τ_i, $i \in I$ задает статистическую информацию о частоте появления элемента , $i \in I$ в решении $X \subseteq I$. Положим $\rho_i = c_i / q_i(X) + \alpha / \tau_i$, $i \in I \setminus X$, где параметр α определяет важность статистической информации.

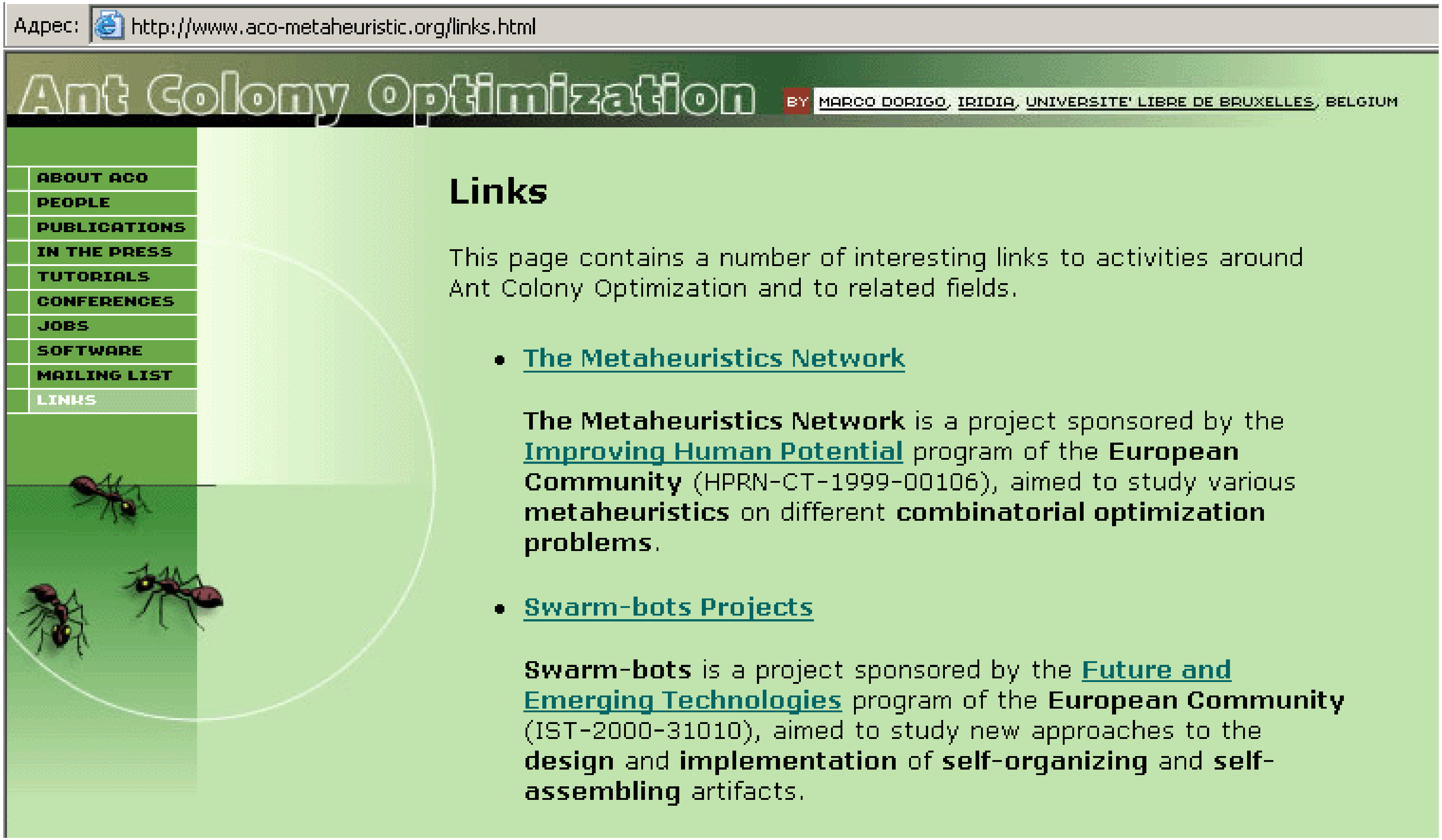
Алгоритм МК

1. Положить $\tau_i := 1$, $i \in I$, $X^{\text{МК}} := I$, $t := 0$.
2. Пока $t \leq T_{\max}$ выполнять:
   2.1. Построить решения X_τ, $\tau = 1,\ldots, T$ вероятностным жадным алгоритмом
   2.2. Выбрать часть наилучших решений X_τ, $\tau = 1,\ldots, T'$, $T' \leq T$
   2.3. По решениям X_τ, $\tau = 1,\ldots, T'$, обновить статистическую информацию τ_i, $i \in I$ и положить $t := t + 1$
   2.4. Сменить рекорд $X^{\text{МК}}$, если найдено лучшее решение.

Влияние статистической информации, случай $c_i = 1,\ i \in I$.



Большое число оптимальных решений получено при $0{,}3 \le p \le 0{,}7$.



Links

This page contains a number of interesting links to activities around Ant Colony Optimization and to related fields.

- The Metaheuristics Network

  The Metaheuristics Network is a project sponsored by the Improving Human Potential program of the **European Community** (HPRN-CT-1999-00106), aimed to study various **metaheuristics** on different **combinatorial optimization problems**.

- Swarm-bots Projects

  Swarm-bots is a project sponsored by the Future and Emerging Technologies program of the **European Community** (IST-2000-31010), aimed to study new approaches to the **design** and **implementation** of **self-organizing** and **self-assembling** artifacts.

Задача о *p*-центрах

Предположим, что p постов ГАИ уже выбрано, и каждый опасный участок прикреплен к ближайшему посту. Обозначим через d_{ij} расстояние между участком j и постом i. Для выбранного набора постов $S \subset I, |S| = p$ обозначим через D максимальное расстояние между постом и участками

$$D = \max_{j \in J} \min_{i \in S} d_{ij}.$$

Величина D связана с задержкой при выезде из поста i на участок j. Задача минимизации этой задержки называется задачей о p-центрах:

$$\max_{j \in J} \min_{i \in S} d_{ij} \to \min_{S \subset I, |S| = p}.$$

Задача о p-центрах сводится к решению не более $m \cdot n$ задач о минимальном покрытии (как?).

Задача о многократных покрытиях

Пусть величина D задает радиус ответственности поста, т. е. все участки на расстоянии D от поста находятся в зоне его ответственности. Зоны могут пересекаться. Пусть $r_j \geq 1$ — минимальное число постов, которые должны контролировать участок j, $b_j > 0$ — среднее число аварий на участке j.

Требуется выбрать p постов так, чтобы каждый участок контролировался не менее r_j постами, и число предотвращенных аварий было бы максимальным:

$$\max \sum_{j \in J} b_j \sum_{i \in I} a_{ij} x_i$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p,$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq r_j, \; j \in J,$$

$$x_i \in \{0,1\}, \;\; i \in I.$$

Вероятностная постановка задачи

Вызовы с участков происходят случайным образом и независимо друг от друга,

$q > 0$ — вероятность того, что пост не может откликнуться на вызов;

$p_k = 1 - q^k$ — вероятность того, что хотя бы один из k постов откликнется;

$p_k - p_{k-1} = (1 - q^k) - (1 - q^{k\text{-}1}) = (1 - q)\, q^{k\text{-}1}$ — прирост вероятности при добавлении одного пункта.

Переменные:

$$y_{jk} = \begin{cases} 1, \text{если участок } j \text{ контролируется как минимум } k \text{ постами,} \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель:

$$\max \sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{n_j} b_j(1-q)q^{k-1}y_{jk}$$

при ограничениях
$$\sum_{k=1}^{n_j} y_{jk} \le \sum_{i\in I} a_{ij}x_i,\quad j\in J,$$

$$\sum_{i\in I} x_i \le p,$$

$$x_i, y_{jk} \in \{0,1\},$$

где $n_j = \sum_{i\in I} a_{ij},\quad j\in J,\quad i\in I.$

Замечание. В оптимальном решении

$y_{jk} \le y_{jk-1}$ для всех $j\in J$, $1< k \le n_j$.