Лекция 2. Медианы, порядковые статистики и сбалансированные деревья

Дано множество из n чисел

Найти элемент множества, который будет i-м по счету, если расположить числа по возрастанию.

Медианой называют элемент, находящийся «посередине», если упорядочить элементы. Точнее при нечетном n, $i = (n + 1)/2$; при четном n их две $i = n/2$, $i = n/2 + 1$, но медианой будем считать меньшую их них.

Алгоритмы:

1) упорядочить и взять i-й элемент, $O(n \cdot \log n)$;

2) i шагов пирамидального алгоритма, $O(n + i \cdot \log n)$.

Выбор за линейное в среднем время

Randomized–Select (A, p, r, i)

1. **if** $p = r$
2. **then return** $A[p]$
3. $q \leftarrow$ Randomized–Partition (A, p, r)
4. $k \leftarrow q - p - 1$
5. **if** $i \le k$
6. **then return** Randomized–Select (A, p, q, i)

   else return Randomized–Select (A, $q + 1, r, i - k$)

На шаге 3 массив $A[p, r]$ разбивается на два:

$A[p, q]$, $A[q + 1, r]$, причем всякий элемент из $A[p, q]$ не больше любого элемента из $A[q + 1, r]$.

Время в худшем случае — $O(n^2)$.

Randomized – Partition (A, p, r)

1. $i \leftarrow$ Random (p, r)
2. поменять $A[p] \leftrightarrow A[i]$
3. **return** Partition (A, p, r)

Выбрали случайный элемент и поставили его первым.

Partition (*A*, *p*, *r*)

$x \leftarrow A(p)$

$i \leftarrow p - 1$

$j \leftarrow r + 1$

while TRUE

  do repeat $j \leftarrow j - 1$

    until $A[j] \le x$

  repeat $i \leftarrow i + 1$

    until $A[i] \ge x$

  if $i < j$

    then поменять $A[i] \leftrightarrow A[j]$

    else return j

На выходе: $p \le j < r$ и массивы $A[p, j]$, $A[j+1, r]$ всегда непустые.

Анализ разбиений

Рангом элемента $x = A[p]$ назовем число элементов массива, непревосходящих x.

Поскольку все элементы имеют равные шансы попасть на место $A[p]$, то все значения ранга от 1 до n равновероятны (т.е. их вероятность равна $1/n$).

1) Если $rank(x) > 1$, то массив $A[p, q]$ будет содержать $(rank(x) - 1)$ элементов, т.е. все элементы, меньше x.

2) Если $rank(x) = 1$, то $q = p$ и $A[p, q]$ содержит только один элемент.

Итак: левая часть будет содержать 2, 3, … или $n - 1$ элементов с вероятностью $2/n$.

Анализ алгоритма Randomized – Select

Пусть $T(n)$ — математическое ожидание времени работы алгоритма (среднее по всем массивам длины n). В худшем случае i-я статистика всегда будет оказываться в большей доле при разбиении $A[p, q]$ и $A[q + 1, r]$. Тогда

$$T(n) \le \frac{1}{n}\left(T\big(\max(1, n-1)\big) + \sum_{k=1}^{n-1} T\big(\max(k, n-k)\big) \right) + O(n) \le$$

$$\le \frac{1}{n}\left(T(n-1) + 2\sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} T(k) \right) + O(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} T(k) + O(n).$$

Так как $T(n-1)$ не более $O(n^2)$, то $T(n-1)/n$ можно включить в $O(n)$.

Покажем, что $T(n) \le cn$ для некоторой подходящей константы $c > 0$.

Индукция по n

Пусть $T(j) \le cj$ для $j < n$.

Тогда

$$T(n) \le \frac{2}{n} \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} ck + O(n) \le \frac{2c}{n} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n/2+1+n-1}{2} + O(n) = \frac{3cn}{4} + O(n) \le cn.$$

Итак: любая порядковая статистика и, в частности, медиана могут быть найдены за линейное в среднем время.

Выбор за линейное в худшем случае время

Алгоритм Select(i)

1. Разбить n элементов на пятерки, $\lfloor n/5 \rfloor$ групп.
2. В каждой пятерке найти медиану.
3. Вызвать рекурсивно Select для медиан и найти X — медиану медиан.
4. Разбить массив на два подмассива $A[p, q]$ и $A[q + 1, r]$ относительно элемента X. Пусть k — число элементов, непревосходящих X, т.е. длина первого массива.
5. Вызвать рекурсивно Select(i) для $A[p, q]$, если $i \le k$ или Select($i - k$), если $i > k$.

Анализ алгоритма Select(i)

Сколько чисел будет больше X?

Не меньше половины медиан дадут по 3 числа, т.е. половина из $\lceil n/5 \rceil$ групп за двумя возможными исключениями: группа содержащая X и последняя, возможно, неполная группа, т.е.

$$3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geq \frac{34}{10} - 6$$

столько заведомо больше X и столько же заведомо меньше X.

Значит, на шаге 5 алгоритм Select будет обрабатывать массив длиной не более ${}^{74}\!/_{10} + 6$.

Пусть $T(n)$ — время работы алгоритма в худшем случае. Тогда

$$T(n) \le T\left(\left\lceil n/5 \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor 7\, n/10 + 6 \right\rfloor\right) + O(n).$$

Индукцией по n покажем, что $T(n) \le cn$ для некоторой константы c.

Пусть что $T(m) \le cm$ при $m < n$. Тогда

$$T(n) \le c\left(\left\lceil n/5 \right\rceil\right) + c\left(\left\lfloor 7\, n/10 + 6 \right\rfloor\right) + O(n)$$

$$\le c\left(n/5 + 1 \right) + c\left(7\, n/10 + 6\right) + O(n)$$

$$\le\ 9\, cn/10 + 7c + O(n) = cn - c(n/10 - 7) + O(n).$$

При $n > 70$ получаем $O(n)$, выбрав c не меньше, чем в $O(n)$.

При $n \le 70$ возможно дополнительное увеличение константы c.

Сбалансированные деревья

Для массива данных требуется

1. Найти элемент
2. Найти k-й по порядку элемент
3. Вставить элемент
4. Удалить элемент

Если упорядочить массив, то 1 и 2 требуют $O(\log n)$ операций, но 3, 4 — $O(n)$.

Если хранить данные в виде списка, то 3, 4 — $O(\log n)$, 1, 2 — $O(n)$.

Сбалансированные деревья требуют $O(\log n)$ для 1 – 4.

Определение 1. **Высотой** дерева называется максимальная длина пути от корня до листа.

Определение 2. Бинарное дерево называется **сбалансированным** (или **AVL-деревом**), если для любой его вершины высота правого поддерева отличается от высоты левого поддерева не более чем на единицу.

Теорема. Длина ветвей в n-вершинном сбалансированном дереве заключена между $\log_2 n$ и $\frac{3}{2}\log_2 n$.

Доказательство.

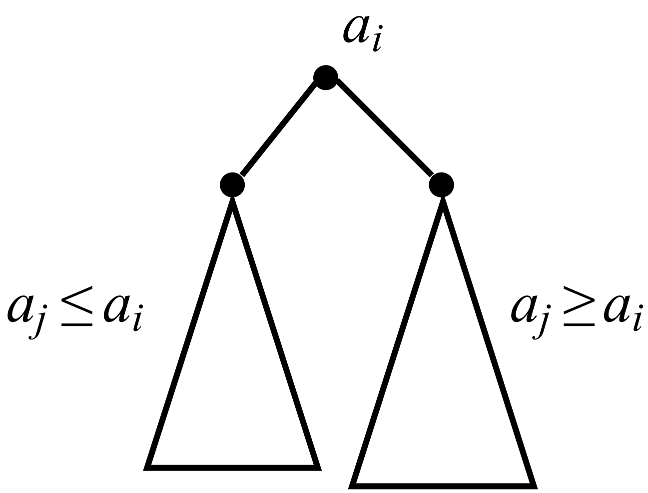
1. Бинарное дерево высоты h не может содержать больше 2^{h+1} вершины, то есть $n \le 2^{h+1}$ или $h + 1 \ge \log_2 n$.
2. Наиболее ассиметричное AVL–дерево T_h высоты h имеет наиболее ассиметричное AVL–дерево T_{h-1} высоты h–1 в качестве одного из своих поддеревьев и наиболее ассиметричное AVL–дерево T_{h-2} в качестве другого. Обозначим через $n(h)$ число вершин в дереве T_h. Тогда

$$n(h) = n(h-1) + n(h-2) + 1; \quad n(0) = 1, \; n(-1) = 0.$$

Для h=3,4 можно непосредственно проверить, а затем по индукции доказать, что $n(h) > \alpha^{h+1}$, где $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, $n \ge n(h) > \alpha^{h+1}$, откуда $h+1 \le \log n / \log \alpha \approx 1{,}44 \log n$. □

Пусть в вершинах AVL–дерева расположены элементы массива так, что для любой вершины в левом ее поддереве расположены элементы не больше чем в данной вершине, а в правом поддереве — не меньше, чем в этой вершине.



Пример. Поиск в AVL–дереве потребует более 25 сравнений, только если дерево состоит из не менее 196417 вершин.

Случайные деревья

Для сбалансированного дерева длина пути из корня в лист не превышает $1{,}44 \log n$.

Для случайного дерева **средняя** длина пути из корня в лист составляет 1,39 $\log n$, но в худшем случае может оказаться равной n.

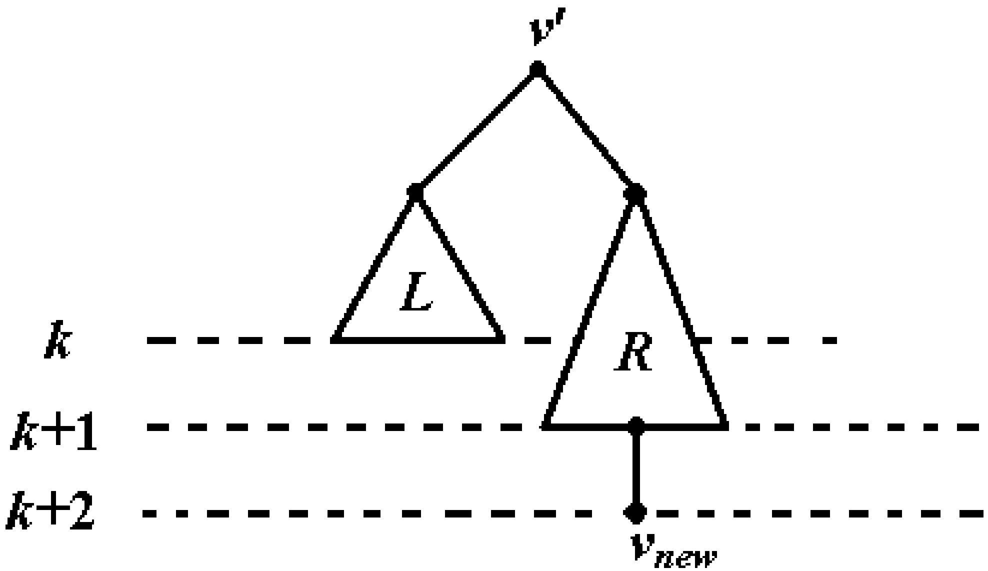
Для сбалансированного дерева **средняя** длина пути составляет $c \log n$, $c = \dfrac{\alpha}{\sqrt{5} \log \alpha} \approx 1{,}04$.

Включение новой вершины в AVL–дерево

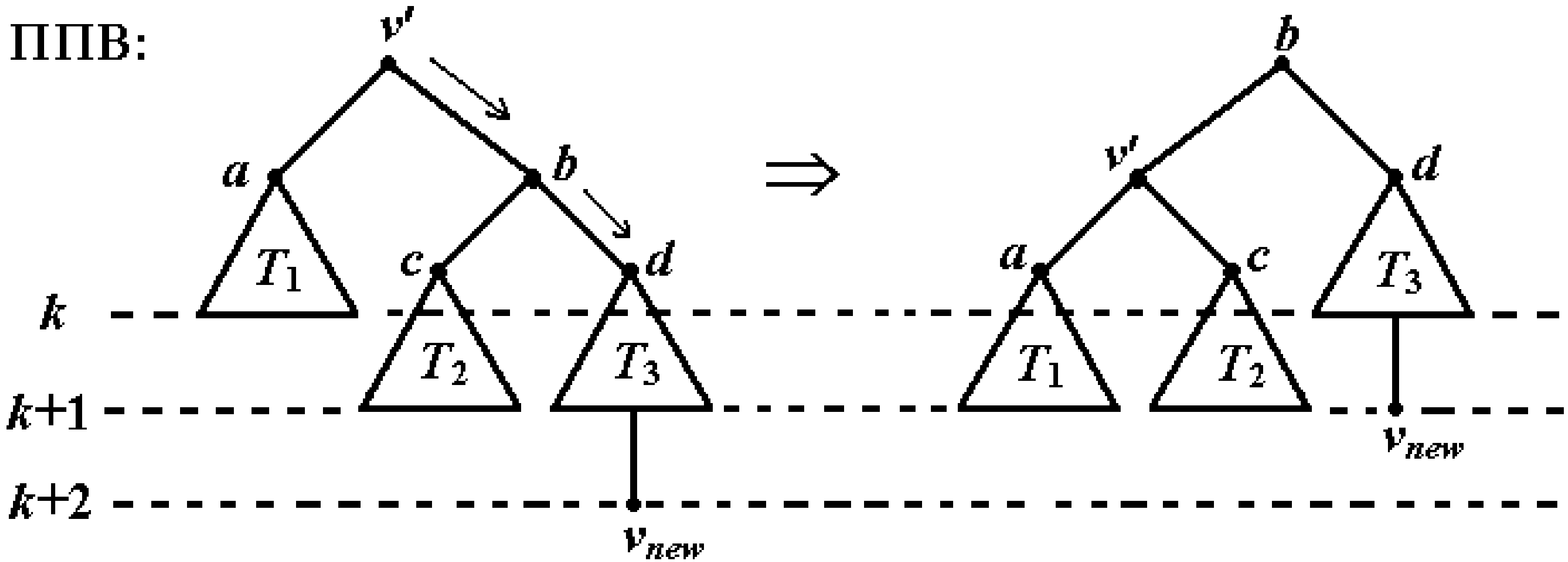
При добавлении новой вершины v_{new} к AVL–дереву мы «скатываем» ее от корня вдоль веток и получаем новый лист (висячую вершину). Дерево остается бинарным, но баланс может нарушиться. Эти нарушения могут возникнуть только у вершин, лежащих на пути от корня к новой вершине.

Будем последовательно подниматься от новой вершины к корню и восстанавливать баланс, если это необходимо.

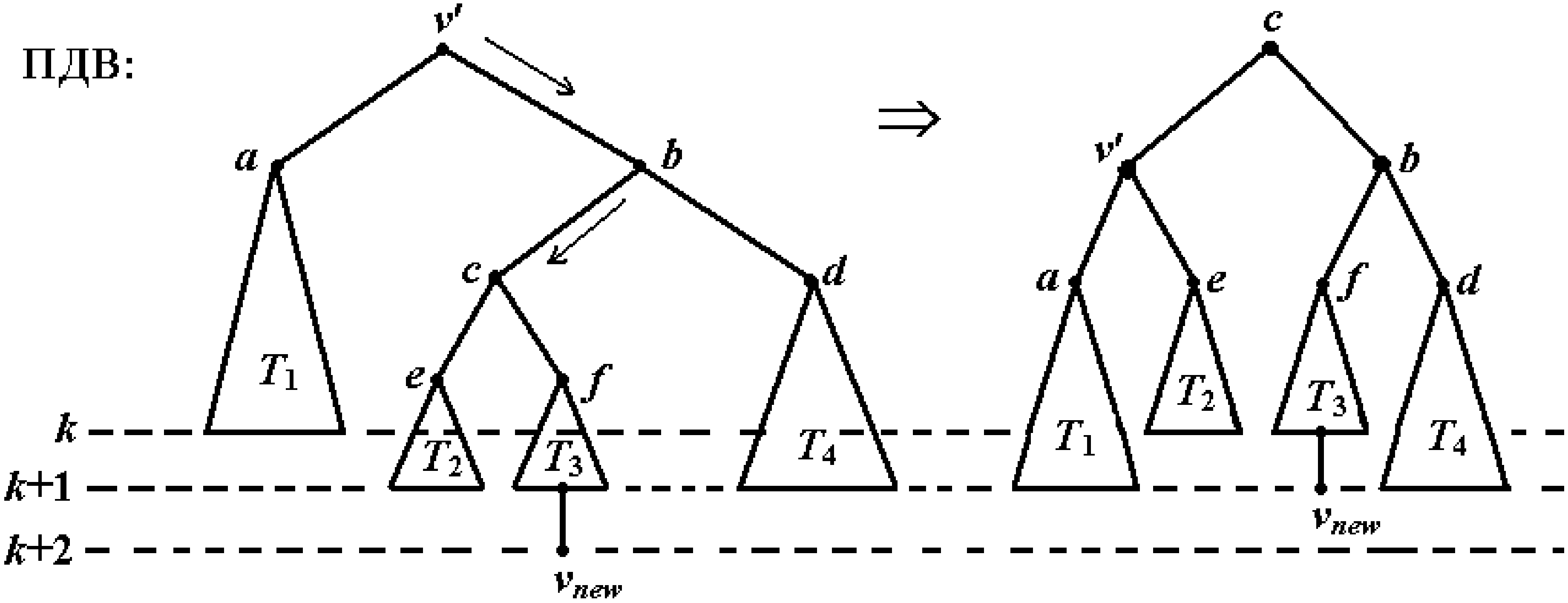
Пусть v' — самая нижняя вершина дисбаланса, то есть наиболее удаленная от корня вершина такая, что ее поддерево с вершиной v_{new} имеет высоту k+2, а другое поддерево — высоту k:



Будем восстанавливать баланс в v' следующим образом. Если первые два шага на (единственном пути) от v' к v_{new} делаются в одном направлении (оба вправо, или оба влево), то применяем правило простого вращения (ППВ).

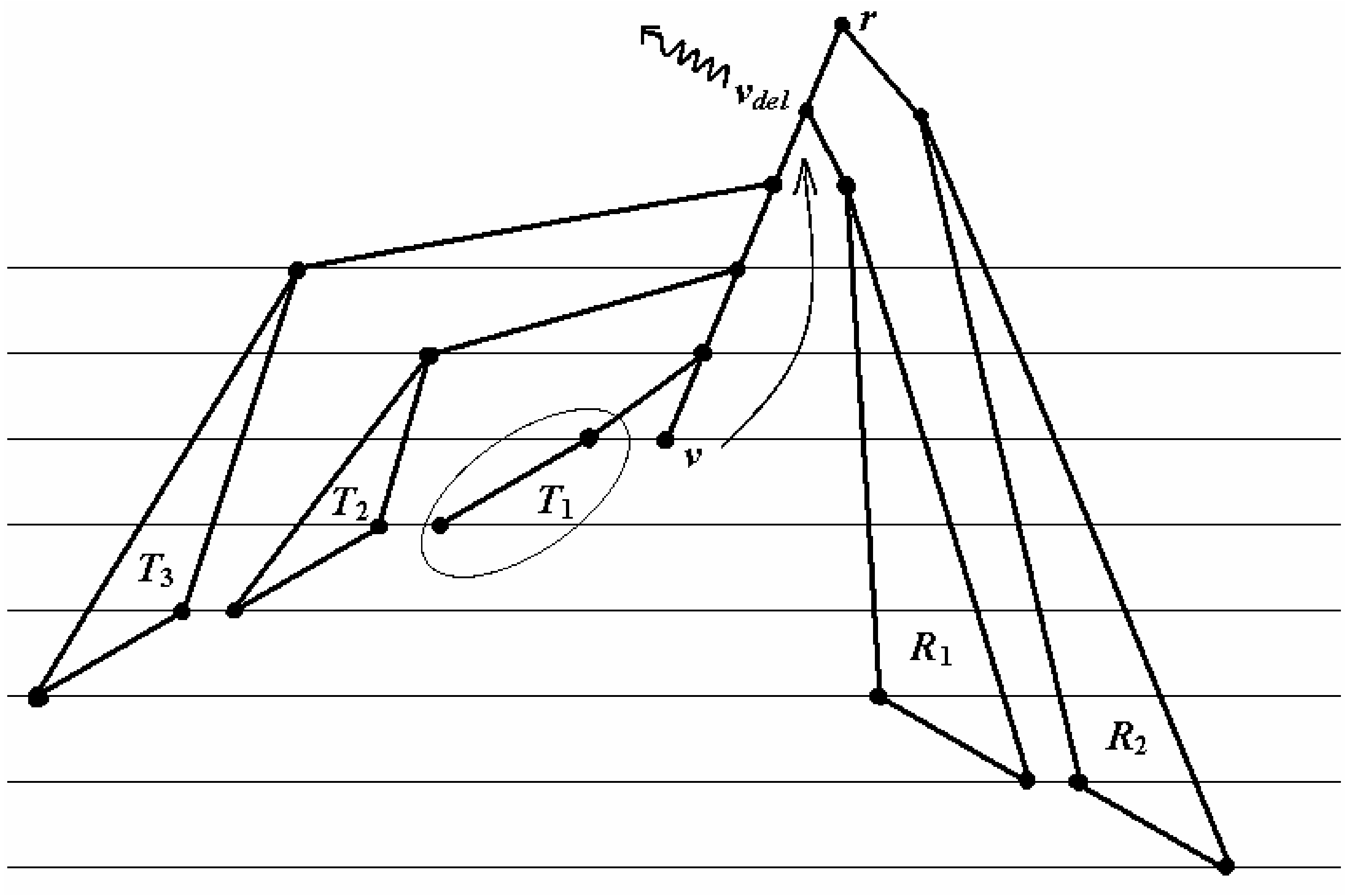


Если первые два шага делаются в разных направлениях, то применяем правило двойного вращения (ПДВ):



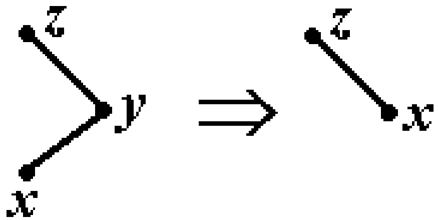
Удаление вершины

На место удаленной вершины v ставим либо самую правую вершину v_{rL} левого поддерева, либо самую левую вершину v_{Lr} правого поддерева



Нюанс. Каждая из вершин v_{rL} и v_{Lr} может быть либо висячей, либо предвесячей, то есть имеющей в качестве потомков лишь одну вершину (разумеется, висячую):

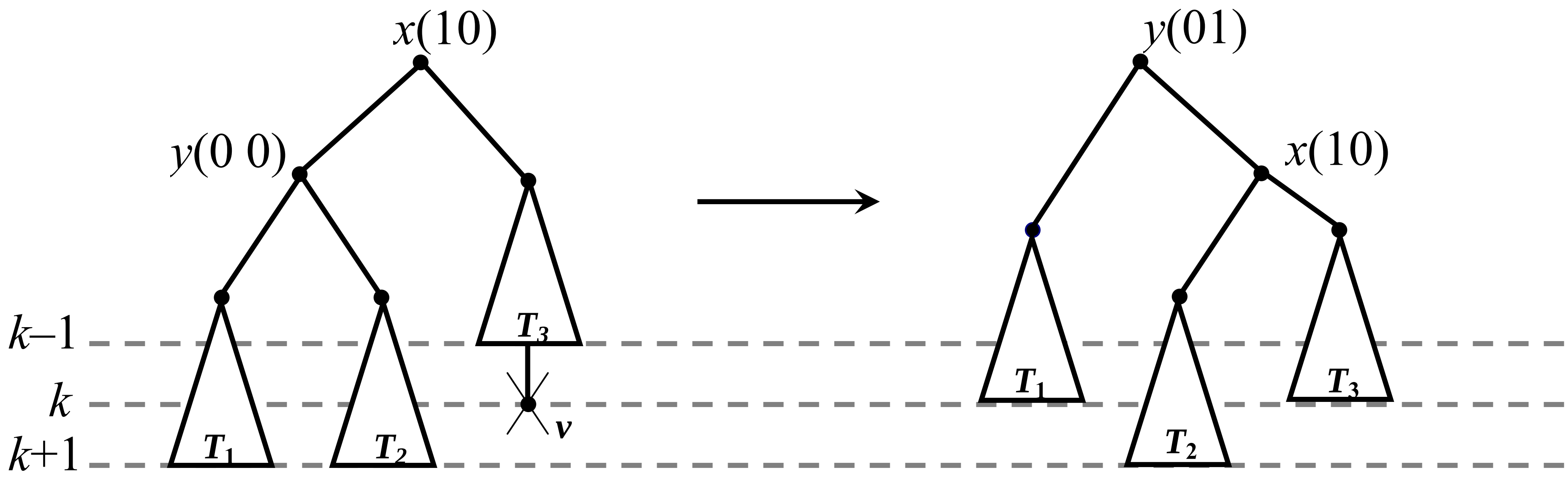
Если на место удаленной вершины встает предвисячая вершина y, то ее (вершины y) потомок x подключается к ее предку z:



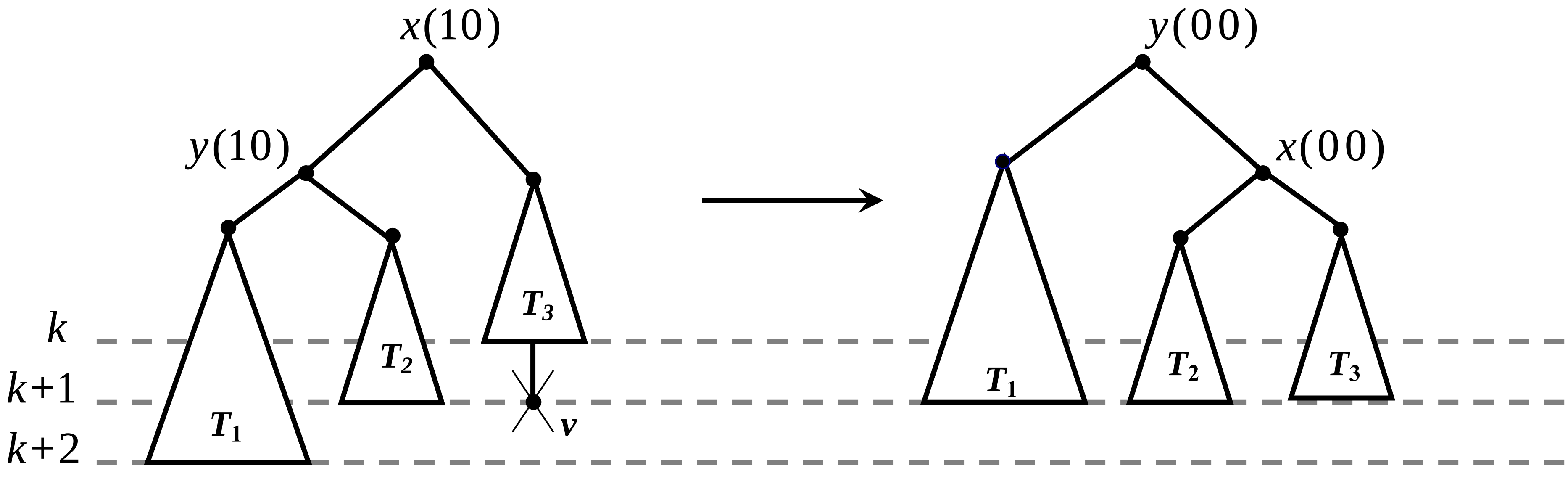
Итак, можно считать, что **всегда удаляем лист**. Последовательно поднимаемся от удаленной вершины v к корню и исправляем структуру дерева, если необходимо.

Пусть к текущей вершине x на пути от v к корню мы пришли справа по короткой ветке. Тогда возможно три случая:

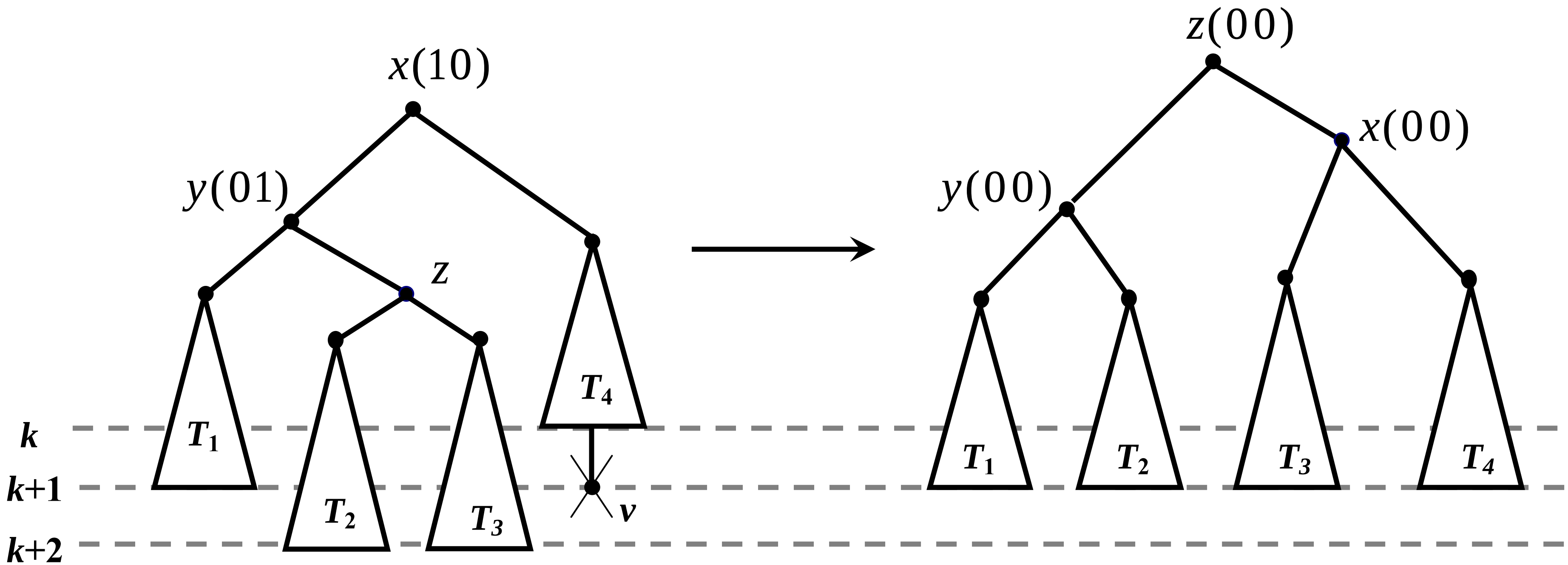
а) В вершине y высоты поддеревьев равны:



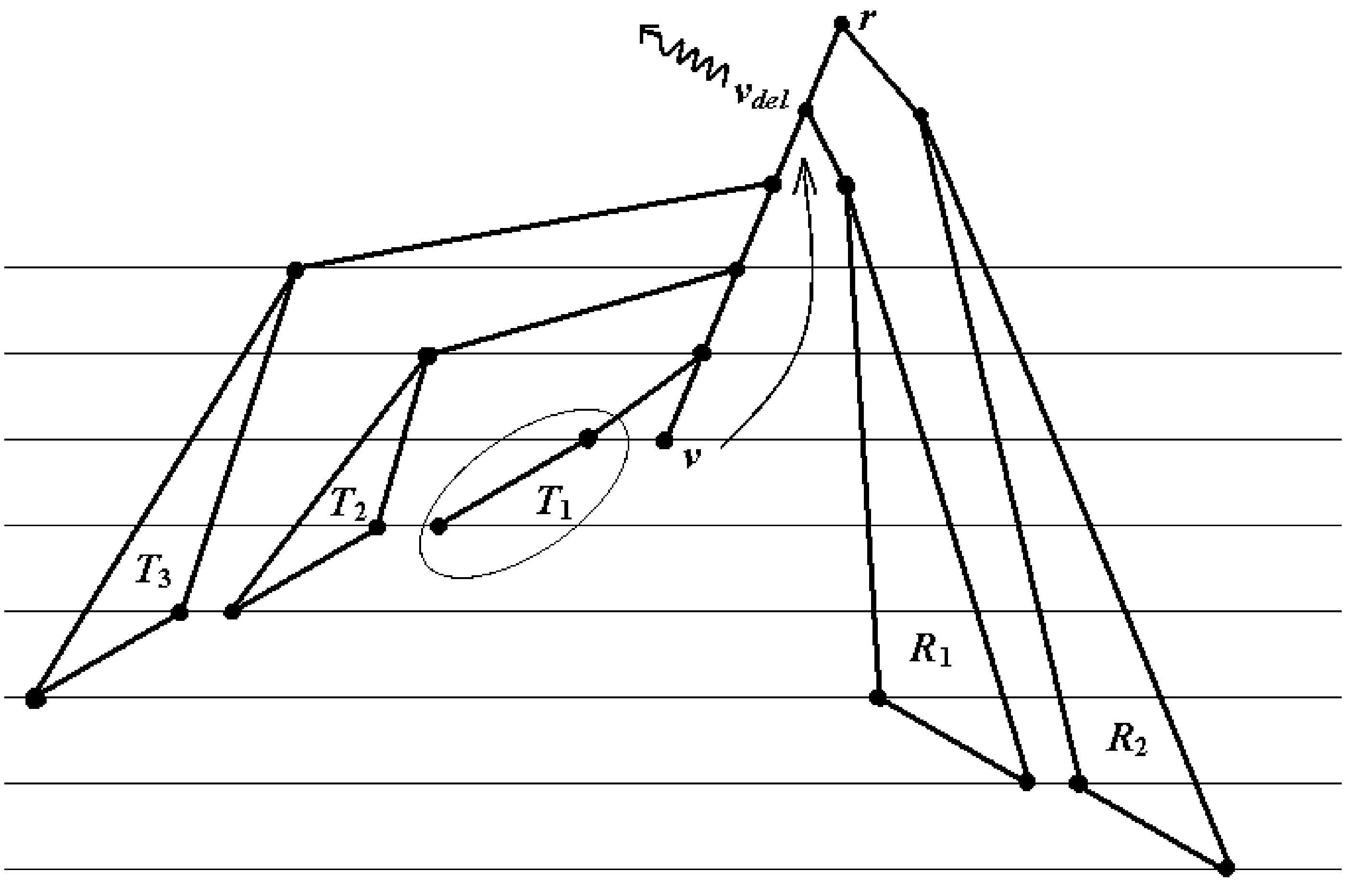
б) В вершине y высота левого поддерева больше высоты правого поддерева:



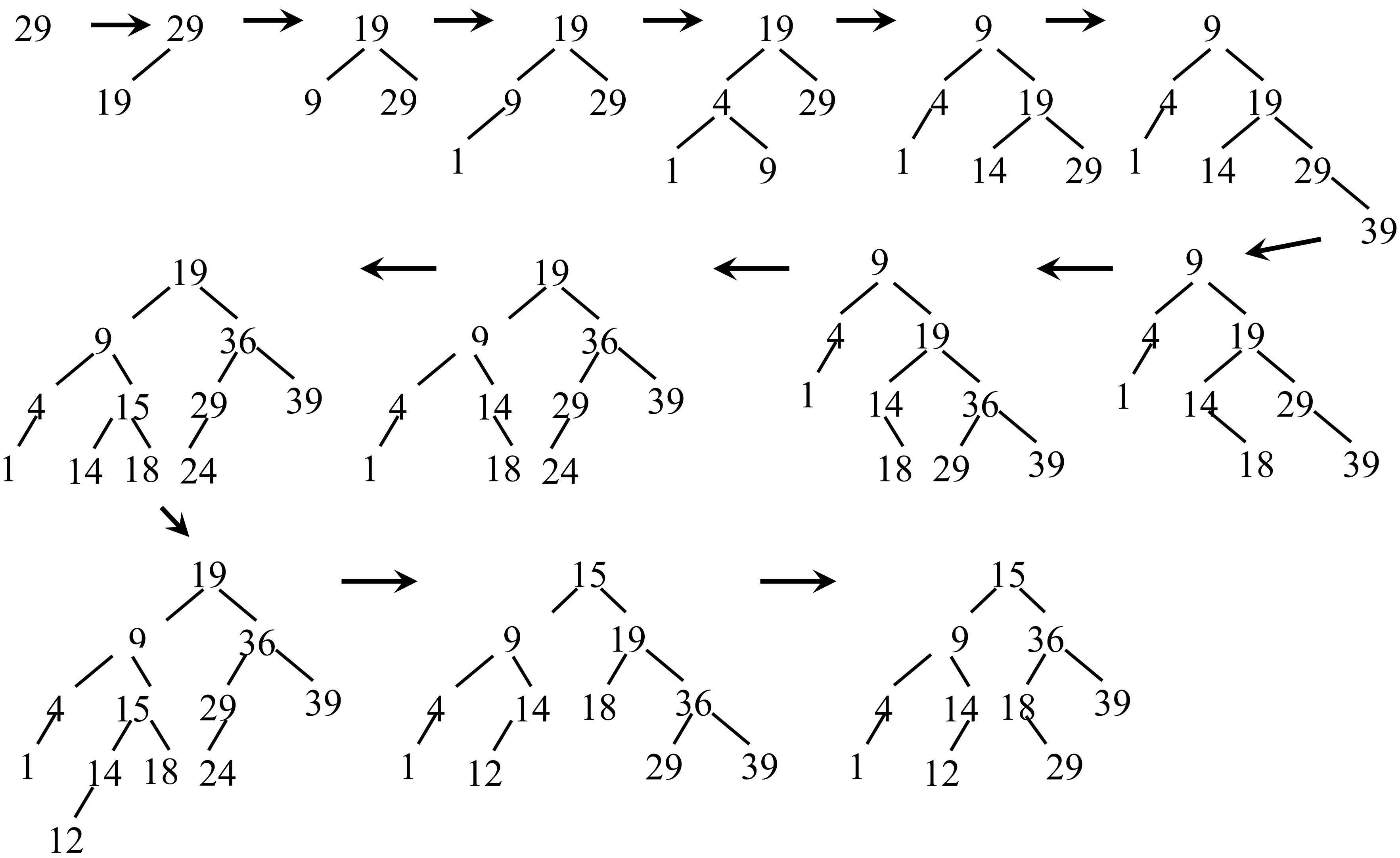
в) В вершине y высота левого поддерева меньше высоты правого поддерева



Отметим, что устранение дисбаланса в одной из вершин, может нарушить баланс в вышестоящих вершинах. На рисунке показан предельный случай этого явления. При начальном дисбалансе лишь в одной вершине (лежащей непосредственно под *v*) приходится, тем не менее, производить перестройку дерева во всех вершинах на пути к корню.



Пример. Построить последовательность AVL–деревьев для данных, поступающих в следующем порядке: 29, 19, 9, 1, 4, 14, 39, 18, 36, 24, 15, 12. Удалить из полученного дерева 24, а затем 19.



Упражнение. Построить последовательность AVL–деревьев для данных, поступающих в следующем порядке: 15, 7, 17, 5, 4, 3, 56, 23, 22, 6, 10, 25, 26. Удалить из полученного дерева 6 и 10, а затем 15 и 25.