

Лекция 3 Динамическое программирование

Распределительная задача

Имеем

n — число предприятий;

Y — количество единиц некоторого ресурса;

$f_k(x)$ — количество продукции, которое будет произведено на k -м предприятии, если в него будет вложено x единиц ресурса (монотонно неубывающая функция).

Требуется: максимизировать объем продукции

$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$x_1 + \dots + x_n \leq Y \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, \text{ целые, } i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Идея динамического программирования (ДП)

Метод ДП (Р. Беллман, В.С. Михалевич, Н.З. Шор) можно трактовать как алгоритмическую версию рассуждений по индукции.

Пусть $s_k(y)$, $1 \leq k \leq n$, $0 \leq y \leq Y$, — оптимальное значение целевой функции задачи (1) – (3), где n заменено на k , Y заменено на y .

Требуется найти $s_n(Y)$ и набор переменных, на котором достигается это значение.

Теорема 1. Пусть f_1, \dots, f_n — монотонно неубывающие функции. Тогда справедливы следующие **рекуррентные соотношения**:

$$s_1(y) = f_1(y), \quad 0 \leq y \leq Y; \quad (4)$$

$$s_k(y) = \max \{s_{k-1}(y - x) + f_k(x) \mid 0 \leq x \leq y\}, \quad 2 \leq k \leq n, \quad 0 \leq y \leq Y, \quad (5)$$

Доказательство: Соотношение (4) очевидно. По определению

$$s_k(y) \geq \max \{s_{k-1}(y - x) + f_k(x) \mid 0 \leq x \leq y\}.$$

Пусть теперь (x_1^*, \dots, x_k^*) — такой вектор, что $x_1^* + \dots + x_k^* \leq y$ и

$$s_k(y) = f_1(x_1^*) + \dots + f_k(x_k^*).$$

Поскольку $s_{k-1}(y - x_k^*) \geq f_1(x_1^*) + \dots + f_{k-1}(x_{k-1}^*)$, имеем

$$s_k(y) = f_1(x_1^*) + \dots + f_k(x_k^*) \leq s_{k-1}(y - x_k^*) + f_k(x_k^*). \quad \blacksquare$$

Алгоритм ДП вычисляет множество $S_k = \{s_k(y) \mid 0 \leq y \leq Y\}$, $k = 1, \dots, n$ с помощью соотношений (4) и (5), где на каждом шаге оптимизируется ровно одна переменная.

Процесс вычисления S_1, \dots, S_n называется **прямым ходом** алгоритма.

Число операций $\approx Y^2 n$

Память $\approx Y n$.

y	$S_1(y)$	$S_2(y)$	\dots	$S_n(y)$
0				
1				
2				
\vdots				
Y				$S_n(Y)$

При **обратном ходе** алгоритма вычисляются значения (x_n^*, \dots, x_1^*) , с учетом того, что уже известны $S_k(y)$. Например, x_n^* определяется из уравнения $s_n(Y) = f_n(x_n^*) + s_{n-1}(Y - x_n^*)$ и так далее.

Число операций $\approx Y n$. Память $\approx Y n$.

Полиномиальные алгоритмы

Определение. Алгоритм A называют **полиномиальным**, если его трудоемкость T_A ограничена полиномом от длины записи исходных данных, то есть существует константа $c > 0$ и натуральное число k такие, что $T_A \leq cL^k$, где L — длина записи исходных данных.

Пример: Пусть $f_i(x_i) = a_i x_i$, тогда $L = \sum_{i=1}^n \log a_i + \log Y$,

но $T_{\text{ДП}} = O(Y^2 n)$, то есть алгоритм ДП не является полиномиальным.

Обобщим задачу (1)–(3):

$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \rightarrow \max \quad (1')$$

$$h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n) \leq Y \quad (2')$$

$$a_i \geq x_i \geq 0, \text{ целые, } i = 1, \dots, n. \quad (3')$$

Если $h_i(x)$ — целочисленные монотонно неубывающие функции, то вместо (4)–(5) можно использовать следующие

рекуррентные соотношения:

$$s_1(y) = f_1(x^*), \text{ где } x^* = \max \{x \leq a_1 \mid h_1(x) \leq y\}, 0 \leq y \leq Y; \quad (4')$$

$$s_k(y) = \max_{\{x \leq a_k \mid h_k(x) \leq y\}} \{f_k(x) + s_{k-1}(y - h_k(x))\}, 2 \leq k \leq n, 0 \leq y \leq Y. \quad (5')$$

Упражнение 1. Доказать справедливость соотношений (4')–(5').

Обратная задача — поиск наименьших затрат на получение заданного количества продукции:

$$h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n) \rightarrow \min \quad (6)$$

$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \geq D \quad (7)$$

$$a_i \geq x_i \geq 0, \text{ целые, } i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Если $f_k(x)$ — целочисленные монотонно неубывающие функции, то для решения задачи (6)–(8) можно использовать идеи динамического программирования.

Пусть $f_i^{-1}(d) = \min\{0 \leq x \leq a_i \mid f_i(x) \geq d\}$.

Для $1 \leq k \leq n$, $0 \leq d \leq D$ обозначим через $t_k(d)$ — оптимальное решение задачи (6)–(8), в которой n заменено на k , а D заменено на d .

Требуется найти $t_n(D)$.

Рекуррентные соотношения

$$t_1(d) = \begin{cases} \infty, & \text{если } f_1(a_1) < d, \\ h_1(f_1^{-1}(d)), & \text{если } f_1(a_1) \geq d, \end{cases} \quad 0 \leq d \leq D, \quad (9)$$

$$t_k(d) = \min\{t_{k-1}(d - f_k(x)) + h_k(x) \mid 0 \leq x \leq a_k, x \leq f_k^{-1}(d)\}, \quad (10)$$
$$k \geq 2, \quad 0 \leq d \leq D.$$

Упражнение 2. Доказать справедливость соотношений (9)–(10).

Теорема 2: Предположим, что D — наибольшее число, для которого оптимальное значение целевой функции задачи (6)–(8) не превосходит Y . Тогда оптимальное значение целевой функции задачи (1')–(3') равно D .

Доказательство: Пусть D удовлетворяет условию теоремы и (x_1^*, \dots, x_n^*) — соответствующее решение задачи (6)–(8).

Значит

$$f_1(x_1^*) + \dots + f_n(x_n^*) \geq D \text{ и } h_1(x_1^*) + \dots + h_n(x_n^*) \leq Y.$$

Следовательно, D не превосходит оптимального решения D_1 задачи (1')–(3'). Если бы D_1 было больше D , то решение задачи (6)–(8), в которой D заменено на D_1 , тоже не превышало бы Y , что противоречит максимальнойности D . ■