

Аппроксимационные схемы

Определение Алгоритм A называется ε -аппроксимационной схемой, если для любого $\varepsilon \in]0, 1[$ и любых исходных данных I задачи верно

$$z^A(I) \geq (1 - \varepsilon)z^*(I)$$

Другими словами, алгоритм A является $(1-\varepsilon)$ -приближенным алгоритмом для всех $\varepsilon \in]0, 1[$.

Алгоритм H^ε

1. $l := \min \{ \lceil 1/\varepsilon \rceil - 2, n \}$, $z^A := 0$

2. Для всех подмножеств $L \subset J$, $|L| \leq l-1$

$$\text{if } \left(\sum_{j \in L} w_j \leq c \right) \text{ and } \left(\sum_{j \in L} p_j > z^A \right) \text{ then } z^A := \sum_{j \in L} p_j$$

3. Для всех подмножеств $L \subset J$, $|L| = l$

if $(\sum_{j \in L} w_j \leq c)$ then

- Применить алгоритм A^{MG} к задаче с множеством предметов $\{j \mid p_j \leq \min \{p_i, i \in L\}\} \setminus L$ и вместимостью рюкзака $c - \sum_{j \in L} w_j$
- if $\sum_{j \in L} p_j + z^{MG} > z^A$ then $z^A := \sum_{j \in L} p_j + z^{MG}$.

Теорема Алгоритм H^ε является ε -аппроксимационной схемой.

Доказательство. Если оптимальное решение z^* содержит не более l предметов, то $z^A = z^*$ и утверждение верно.

Пусть в оптимальном решении более чем l предметов. Выберем в нем подмножество L^* из l предметов с наибольшими весами p_j . Рассмотрим подзадачу S с множеством предметов $\{j \mid p_j \leq \min \{p_i, i \in L^*\}\} \setminus L^*$ и вместимостью рюкзака $c - \sum_{j \in L^*} w_j$. Оптимальное решение этой подзадачи

обозначим через z_S^* . Тогда $z^* = z_S^* + \sum_{j \in L^*} p_j$. Приближенное решение,

полученное алгоритмом A^{MG} , обозначим через z_S^{MG} .

По определению $z^A \geq \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG}$ и, кроме того, $z_S^{MG} \geq \frac{1}{2} z_S^*$.

Рассмотрим два случая:

$$1. \sum_{j \in L^*} p_j \geq \frac{l}{l+2} z^*. \text{ Тогда } z^A \geq \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG} \geq \sum_{j \in L^*} p_j + \frac{1}{2} z_S^* =$$

$$\sum_{j \in L^*} p_j + \frac{1}{2} (z^* - \sum_{j \in L^*} p_j) = \frac{1}{2} (z^* + \sum_{j \in L^*} p_j) \geq \frac{1}{2} (z^* + \frac{l}{l+2} z^*) = \frac{l+1}{l+2} z^*$$

$$2. \sum_{j \in L^*} p_j < \frac{l}{l+2} z^*. \text{ Тогда в } L^* \text{ найдется предмет с } p_j < \frac{1}{l+2} z^*. \text{ По}$$

определению в подзадаче S все предметы имеют вес не более $\frac{1}{l+2} z^*$.

Применяя свойство 2 для LP -релаксаций, получаем

$$z^* = \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^* \leq \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG} + \frac{1}{l+2} z^* \leq z^A + \frac{1}{l+2} z^*.$$

Итак, в обоих случаях получаем $z^A \geq \frac{l+1}{l+2} z^*$. Величина $\frac{l+1}{l+2}$ растет с ростом l

$$\text{и } \frac{l+1}{l+2} \geq \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 - \varepsilon. \blacksquare$$

$$T = O(n n^l) = O(n^{l+1}). \quad \Pi = O(n).$$

Пример. Положим $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, $c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil M$ и

$$p_1 = 2, \quad p_2 = p_3 = \dots = p_n = M,$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = w_3 = \dots = w_n = M.$$

Оптимум $z^* = M(l + 2)$, $l = n - 3$, $z^A = (l + 1)M + 2$ и

$$z^A / z^* \rightarrow (l + 1) / (l + 2) \quad \text{при } M \rightarrow \infty.$$

Определение. ε -аппроксимационная схема A называется **полиномиальной**, если ее трудоемкость полиномиально зависит от длины записи исходных данных.

$T_H = O(n^{l+1}) = O(n^{1/\varepsilon - 1})$ — полиномиальная зависимость при заданном ε . Если $\varepsilon = 0.1$, то $T_H = O(n^9)$, то есть алгоритм H^ε является полиномиальной ε -аппроксимационной схемой для задачи о рюкзаке.

Определение. ε -аппроксимационная схема A называется **полностью полиномиальной**, если ее трудоемкость полиномиально зависит от длины записи исходных данных и величины $1/\varepsilon$.

Теорема Для задачи о рюкзаке существует полностью полиномиальная ε -аппроксимационная схема.

Доказательство Для примера $I = \{p_1, \dots, p_n, w_1, \dots, w_n, c\}$ построим новый пример \bar{I} , в котором $\bar{c} = c, \bar{w}_j = w_j, \bar{p}_j = \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor$ для некоторой константы $K > 0$, которую определим позже. Для примера \bar{I} применим алгоритм ДП и найдем оптимальный набор предметов \bar{X} . Скорее всего он будет отличаться от оптимального набора X^* для примера I . Оценим разность между полученным значением z^A и оптимальным z^* :

$$\begin{aligned} z^A &= \sum_{j \in \bar{X}} p_j \geq \sum_{j \in \bar{X}} K \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq K \sum_{j \in X^*} \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq \sum_{j \in X^*} K \left(\frac{p_j}{K} - 1 \right) = \\ &= \sum_{j \in X^*} (p_j - K) = z^* - |X^*| K. \end{aligned}$$

Второе неравенство в этой цепочке следует из оптимальности \bar{X} для \bar{I} .

Мы хотим получить
$$\frac{z^* - z^A}{z^*} \leq \frac{|X^*| K}{z^*} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $K \leq \frac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|}$. Так как $n \geq |X^*|$ и $z^* \geq p_{\max}$, то

$$\frac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|} \geq \frac{\varepsilon \cdot z^*}{n} \geq \frac{\varepsilon \cdot p_{\max}}{n}$$

и, полагая $K = \varepsilon \cdot p_{\max} / n$, получим нужное значение для параметра K .

Трудоёмкость алгоритма определяется трудоёмкостью ДП. Если вместо исходной задачи решать обратную к ней, то $T = O(Un)$, где U — верхняя оценка на оптимальное значение целевой функции $\bar{z}^* = \sum_{j \in \bar{X}} \bar{p}_j$.

Очевидно, что $\bar{z}^* \leq n \bar{p}_{\max}$, но $\bar{p}_{\max} \leq \frac{p_{\max}}{K} = \frac{n}{\varepsilon}$, то есть $\bar{z}^* \leq n^2 / \varepsilon$.

Полагая $U = n^2 / \varepsilon$, получаем $T = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$, $\Pi = O(Un) = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$. ■

Задача о ближайшем соседе

Дано: функция $f(x, y) \geq 0$ — затраты на обслуживание отрезка дороги от x до y , $0 \leq x \leq y \leq M$, x, y — целочисленные точки, n — число отрезков.

Найти: оптимальное разбиение сегмента $[0, M]$ на n отрезков.

Математическая модель:

$$\min \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}, x_k)$$
$$0 = x_0 \leq \dots \leq x_n = M$$

Алгоритм динамического программирования

$S_k(y)$ — минимальные затраты на обслуживание k отрезков для сегмента $[0, y]$.

Рекуррентные соотношения:

$$S_1(y) = f(0, y), \quad y = 1, \dots, M$$

$$S_k(y) = \min_{1 \leq x \leq y} \{S_{k-1}(x) + f(x, y)\}, \quad y = 1, \dots, M, \quad k = 2, \dots, n.$$

$$T = O(nM^2) \quad \Pi = O(nM)$$

Оптимизация числа отрезков

Для каждого $n = 1, \dots, M$ найти $S_n(M)$ и выбрать наименьшее значение

$$T = O(M^3), \quad \Pi = O(M^2).$$

Модифицированный вариант

$\tilde{S}(y)$ — минимальные затраты на обслуживание сегмента $[0, y]$.

Рекуррентные соотношения:

$$\tilde{S}(0) = 0,$$

$$\tilde{S}(y) = \min_{0 \leq x \leq y-1} \{\tilde{S}(x) + f(x, y)\}, \quad y = 1, \dots, M.$$

$$T = O(M^2), \quad \Pi = O(M).$$

Замена оборудования

Дано: g — начальная стоимость оборудования,

$\varphi(t)$ — относительная остаточная стоимость на год t

$\psi(t)$ — эксплуатационные затраты за все года от 0 до t .

$S(t) = g(1 - \varphi(t)) + \psi(t)$ — суммарные затраты за все года от 0 до t .

$\sigma(t) = S(t)/t$ — удельные затраты

Критерий оптимизации

$$\sigma(t^*) = \min_{t>0} \sigma(t)$$

Будем менять оборудование через каждые t^* лет.

Случай 1. $S(t)$ — вогнутая растущая функция.

Пусть $\varphi(t)$ — выпуклая убывающая функция $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) \geq 0$;

$\psi(t)$ — вогнутая растущая функция $\psi(0) = 0$.

Покажем, что $\sigma(t)$ убывает с ростом t .

Так как $S(t)$ — вогнутая функция, то

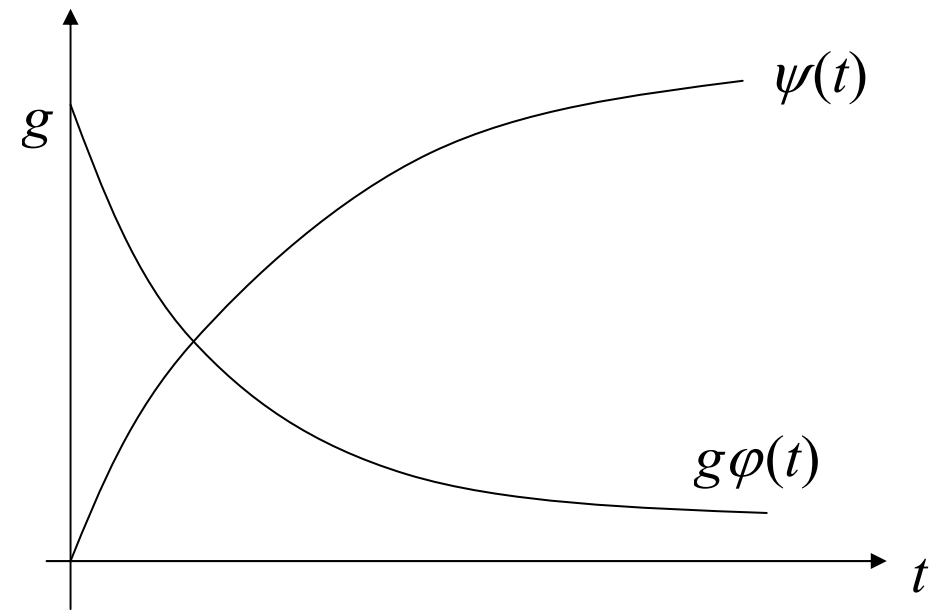
для любого $\alpha \in [0,1]$ и $t_0 < t_2$ имеем

$$(1-\alpha)S(t_0) + \alpha S(t_2) \leq S((1-\alpha)t_0 + \alpha t_2).$$

Для $t_1 < t_2$ положим $\alpha = t_1/t_2$, $t_0 = 0$.

Тогда $S(t_0)=0$ и $t_1 S(t_2) \leq t_2 S(t_1)$,

то есть $\sigma(t_1) \geq \sigma(t_2)$. Следовательно, оборудование выгодно эксплуатировать как можно дольше.

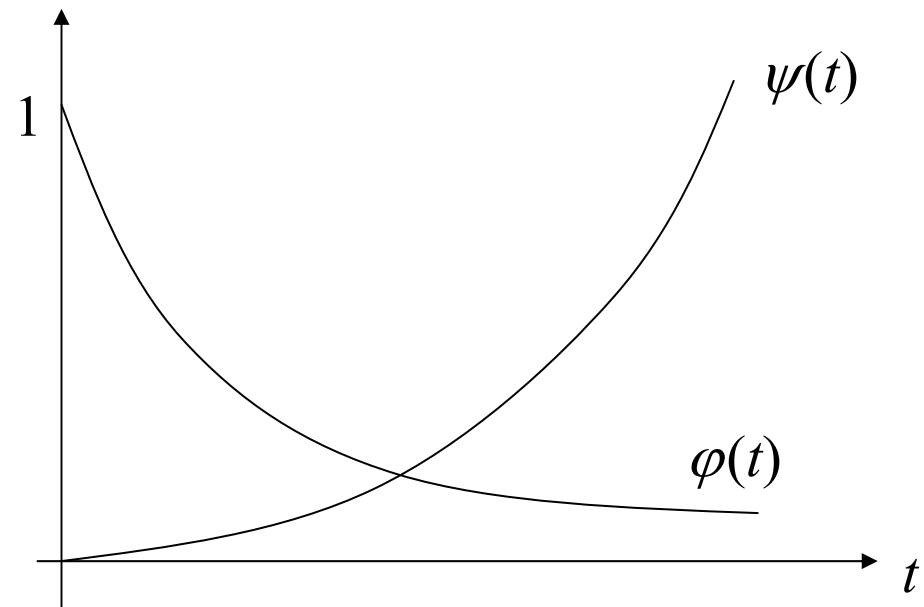


Случай 2.

$$\varphi(t) = e^{-\lambda t}, \quad \psi(t) = k(e^{\mu t} - 1), \quad \lambda > 0, k > 0, \mu > 0.$$

Тогда $\sigma(t) = [g(1 - e^{-\lambda t}) + k(e^{\mu t} - 1)]/t$ — выпуклая функция.

и t^* можно найти методом дихотомии за $O(\log(T/\varepsilon))$ операций, где ε — требуемая точность, T — оценка сверху на t^* .



Задача замены оборудования с учетом дисконтирования затрат

Приведение затрат к начальному моменту

Пусть χ — банковский процент, или коэффициент эффективности капиталовложений (годовая норма дисконта).

Если S_1 — капитал в начальный год, то по истечении года эта сумма станет равной $S_2 = S_1 \cdot (1 + \chi)$, а в конце t -го года $S_t = S_1 \cdot (1 + \chi)^{t-1}$.

Если в год t хотим потратить сумму S_t , то в начальный год должны иметь

$S_1 = \frac{S_t}{(1 + \chi)^{t-1}}$. Затраты S_t в год t , будучи приведенными к начальному

моменту $t=1$, равны

$$\tilde{S} = \alpha^{t-1} \cdot S_t,$$

где $\alpha = \frac{1}{1+\chi}$ — коэффициент дисконтирования, $0 < \alpha \leq 1$.

Если в течении T лет производились траты S_1, S_2, \dots, S_t то суммарные приведенные затраты вычисляются по формуле:

$$\tilde{S} = \sum_{t=1}^T \alpha^{t-1} S_t.$$

Пример. Рассмотрим распределение капитала в 8 млн. руб. в течение 8 лет при банковском проценте $\chi = 0.1$ ($\alpha = 0.91$) и трех стратегиях:

- 1) все траты в 1-й год;
- 2) равномерные траты;
- 3) все траты в последний год.

Стратегия	Год								Суммарные приведенные затраты
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	8	–	–	–	–	–	–	–	8.0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	5.9
3	–	–	–	–	–	–	–	8	4.2

Постановка задачи

g — начальная стоимость оборудования;

c_t — стоимость эксплуатации оборудования в t год, $c_{t+1} \geq c_t$;

Система функционирует бесконечно, оборудование периодически заменяется.

T — период замены оборудования;

S_T — суммарные затраты при фиксированном периоде замены T :

$$S_T = g + \sum_{t=1}^T \alpha^{t-1} c_t + \alpha^T g + \sum_{t=1}^T \alpha^{T+t-1} c_t + \alpha^{2T} g + \sum_{t=1}^T \alpha^{2T+t-1} c_t + \dots .$$

за первые T лет за вторые T лет

Благодаря дисконтированию затрат ($\alpha < 1$) величина S_T конечна:

$$S_T = (g + \sum_{t=1}^T \alpha^{t-1} c_t)(1 + \alpha^T + \alpha^{2T} + \dots) = (g + \sum_{t=1}^T \alpha^{t-1} c_t) / (1 - \alpha^T) < \infty.$$

Задача отыскания оптимального периода замены оборудования: $S_T \rightarrow \min_{T > 0}$

Теорема. Если эксплуатационные затраты c_t не убывают со временем, то оптимальный период замены T^* , если он существует, определяется следующим соотношением

$$T^* = \min \{T \mid c_{T+1} > (1 - \alpha)S_T, T > 0, \text{ целое}\}.$$

Оборудование не рекомендуется заменять до тех пор, пока эксплуатационные расходы следующего года не превысят средневзвешенную сумму уже произведенных затрат.

Лемма 1. $\Delta S_{T+1} = S_{T+1} - S_T = K_{T,\alpha}(c_{T+1} - (1-\alpha)S_T),$

где $K_{T,\alpha} = \alpha^T / (1 - \alpha^{T+1}), \quad T \geq 1.$

Доказательство. $\Delta S_{T+1} = (g + \sum_{t=1}^{T+1} \alpha^{t-1} c_t) / (1 - \alpha^{T+1}) - S_T =$

$$\frac{S_T(1 - \alpha^T) + \alpha^T c_{T+1} - S_T(1 - \alpha^{T+1})}{1 - \alpha^{T+1}} = \frac{\alpha^T}{1 - \alpha^{T+1}} (c_{T+1} - (1 - \alpha)S_T). \blacksquare$$

Следствие 1. При $T > 0$

$$\Delta S_{T+1} > 0 \Leftrightarrow c_{T+1} > (1 - \alpha)S_T.$$

Лемма 2. Пусть существует $T^* = \min \{T \mid \Delta S_{T+1} > 0\}$. Тогда последовательность $\{S_T\}$, $T = T^*, T^*+1, T^*+2, \dots$ — монотонно возрастающая.

Доказательство проведем индукцией по T .

При $T = T^*$ имеем $\Delta S_{T^*+1} > 0$ и $S_{T^*} < S_{T^*+1}$. Пусть $S_{T^*} < S_{T^*+1} < \dots < S_T$, $T > T^*$.

Покажем, что $S_T < S_{T+1}$.

Учитывая неубывание последовательности $\{c_t\}$ и положительность ΔS_T , по лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} S_{T+1} - S_T &= K_{T,\alpha}(c_{T+1} - (1-\alpha)S_T) \geq K_{T,\alpha}(c_T - (1-\alpha)S_T) = \\ &= K_{T,\alpha}(c_T - (1-\alpha)S_{T-1} - (1-\alpha)\Delta S_T) = K_{T,\alpha}(\Delta S_T / (K_{T-1,\alpha}) - (1-\alpha)\Delta S_T) = \\ &= \frac{\alpha(1-\alpha^{T-1})}{1-\alpha^{T+1}} \Delta S_T > 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Утверждение теоремы вытекает из следствий 1 и леммы 2. Если T^* не существует, то затраты S_T — невозрастающая функция и оборудование заменять не следует. ■

Применение динамического программирования

Рассмотрим систему, функционирующую в течение T лет, причем решение о замене оборудования принимается каждый год.

Дано: $\{1, \dots, m\}$ — набор типов оборудования;

g_t^i — стоимость оборудования i -го типа, купленного в год t ;

$c_t^i(\tau)$ — стоимость годовых эксплуатационных затрат на оборудование i -го типа, купленного в год t и проработавшего τ лет;

$\Phi_t^i(\tau)$ — остаточная стоимость оборудования i -го типа возраста τ , купленного в год t ;

n — максимально допустимый возраст оборудования;

i_0, τ_0 — тип и возраст оборудования в начале функционирования;

Пусть $S_t^i(\tau)$ — минимальные суммарные затраты в интервале $[t, T]$, приведенные к началу t -го года, при условии, что в начале t -го года было оборудование типа i возраста τ . Требуется найти $S_1^{i_0}(\tau_0)$.

Рекуррентные соотношения:

$$S_T^i(\tau) = \min \begin{cases} c_{T-\tau}^i(\tau+1) - \alpha \Phi_{T-\tau}^i(\tau+1), & \text{если замены нет,} \\ \min_{1 \leq k \leq m} [g_T^k + c_T^k(1) - \alpha \Phi_T^k(1)] - \Phi_{T-\tau}^i(\tau), & \text{в случае замены,} \end{cases}$$

$$1 \leq \tau \leq n, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$S_t^i(\tau) = \min \begin{cases} c_{t-\tau}^i(\tau+1) + \alpha S_{t+1}^i(\tau+1), & \text{если продолжаем} \\ \min_{1 \leq k \leq m} [g_t^k + c_t^k(1) + \alpha S_{t+1}^k(1)] - \Phi_{t-\tau}^i(\tau), & \text{эксплуатировать} \\ & \text{оборудование} \\ & \text{если заменяем оборудование} \end{cases}$$

$$1 \leq \tau \leq n, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq t < T.$$

Алгоритм может быть реализован с трудоемкостью $T = O(m^2 n T)$, и памятью $\Pi = O(mnT)$.