

# Задачи календарного планирования

Олимпийские игры 1992 г., Барселона, более 2000 мероприятий за 15 дней.

- частичный порядок на множестве событий (четверть финала, полуфинал, финал);
- мощность спортивных сооружений (число одновременных соревнований, число зрителей);
- транспортные проблемы и доход (максимизировать посещаемость наиболее популярных соревнований — раздвинуть их по времени);
- требования TV (минимум параллельных трансляций);
- обеспечение безопасности (число полицейских ограничено).

Система поддержки решений «SUCCESS–92» Университет г. Барселоны

## Постановка задачи

**Дано:**  $J = \{1, \dots, n\}$  — множество работ;

$\tau_j \geq 0$  — длительность работы  $j$ ;

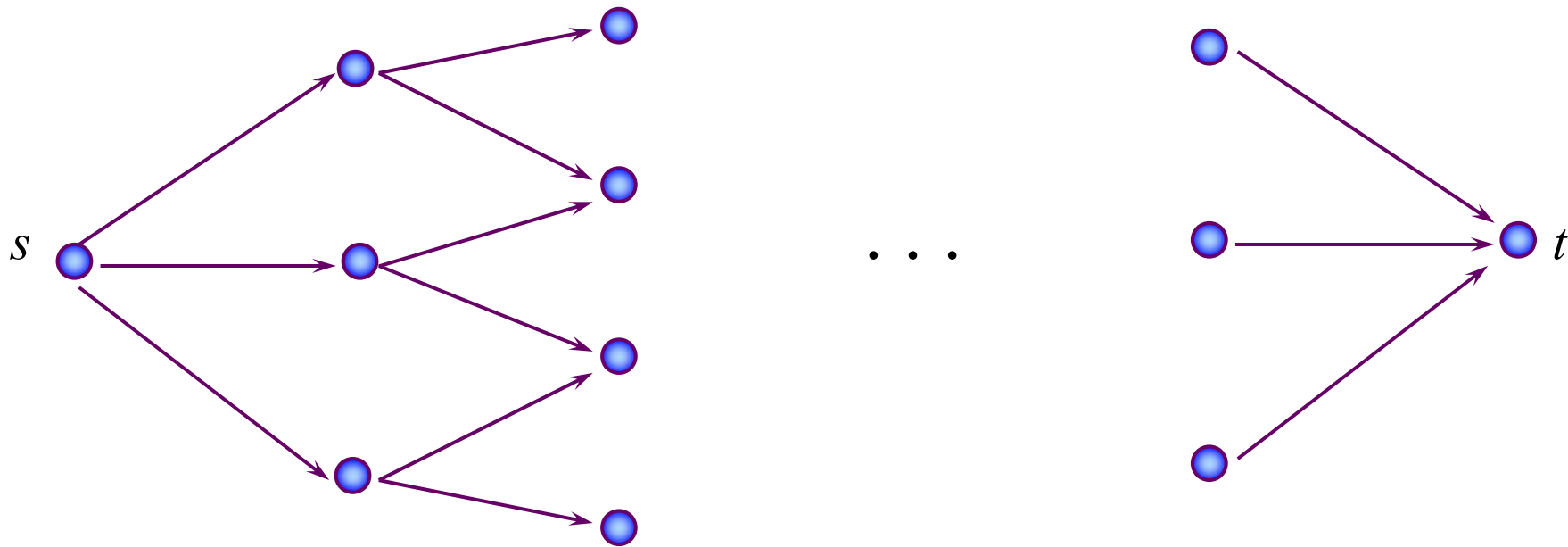
$C = \{(i, j) \mid i, j \in J\}$  — частичный порядок, работа  $j$  не может начаться раньше окончания работы  $i$ .

**Найти:**

- Минимальное время завершения всего проекта.
- Наиболее ранний момент начала и завершения каждой работы.
- Множество критических работ, то есть таких работ, задержка хотя бы одной из которых приведет к задержке всего проекта.
- Допустимое запаздывание для некритических работ.
- Вероятность завершения проекта к заданному сроку.

## Сетевой график «работы — дуги»

$G = (V, E)$  — ориентированный взвешенный граф без циклов с одним источником  $s$  и одним стоком  $t$ , каждой дуге  $j = (i, k)$  приписан вес  $\tau_j \geq 0$ .



Вершины — события. Дуги — работы.

## Пример

*A* — выбрать место для офиса

*B* — создать финансовый и организационный план

*C* — определить обязанности персонала

*D* — разработать план офиса

*E* — ремонт помещений

*F* — отобрать кандидатов на увольнение

*G* — нанять новых служащих

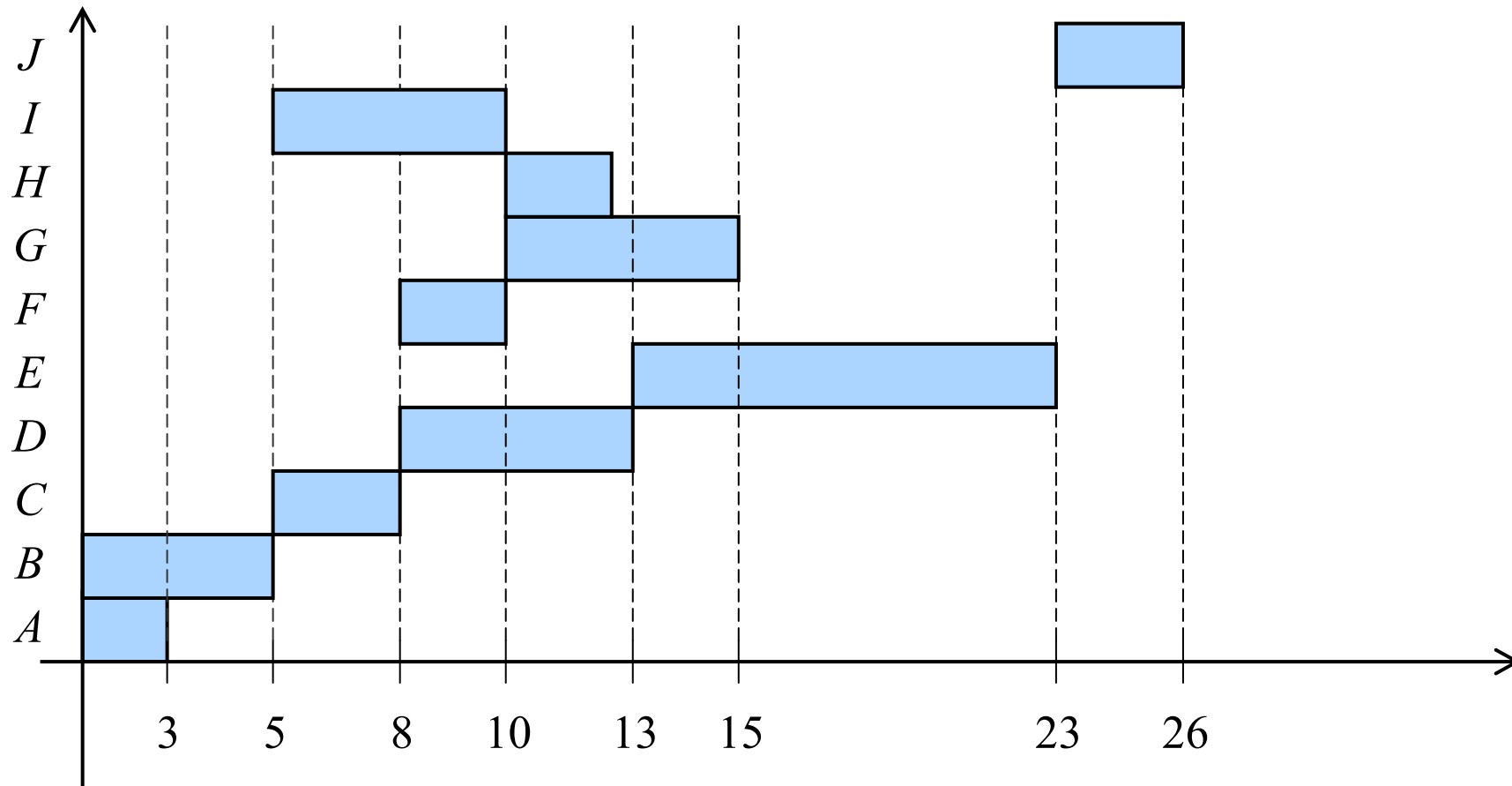
*H* — назначить ключевых руководителей

*I* — распределить обязанности руководителей

*J* — обучить персонал

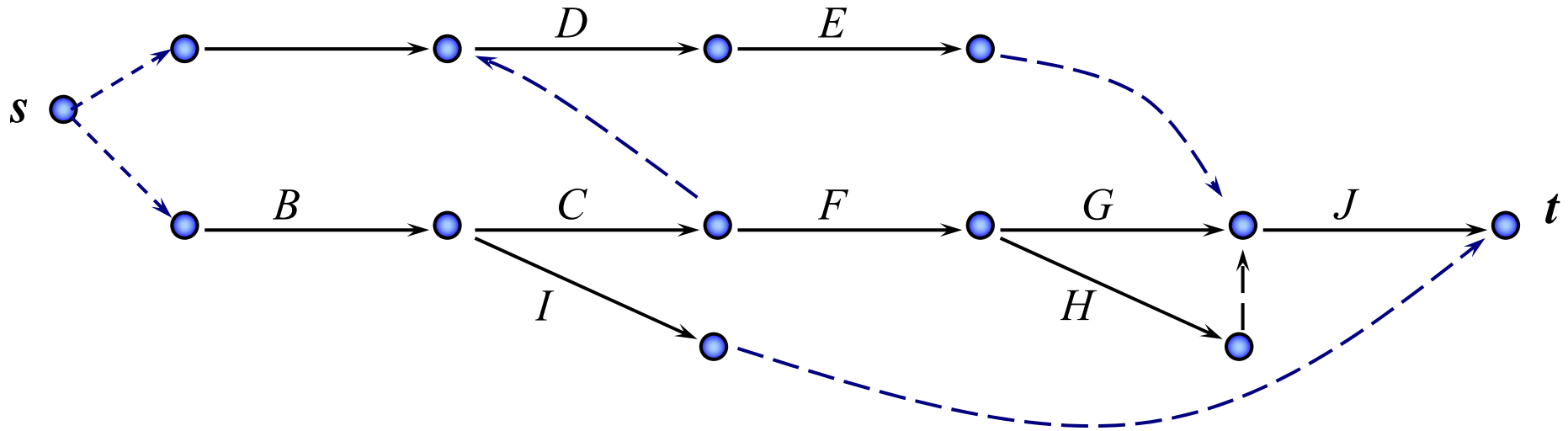
Предшествование	Длительность
—	3
—	5
<i>B</i>	3
<i>A, C</i>	5
<i>D</i>	10
<i>C</i>	2
<i>F</i>	5
<i>F</i>	2
<i>B</i>	5
<i>H, E, G</i>	3

# Диаграмма Гантта

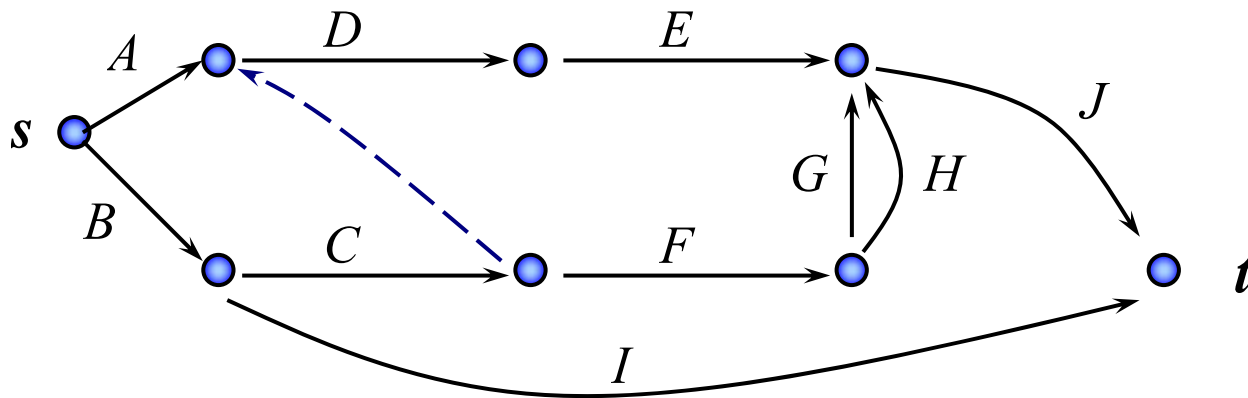


Работа  $E$  является критической. Задержка работы  $F$  ведет к задержке работ  $G, H$ , но не работы  $J$ .

# Сетевой график «работы — дуги»



Некоторые фиктивные дуги можно исключить



## Параметры сетевой модели

**Определение.** Рангом  $r(x)$  вершины  $x \in V$  называется число дуг в максимальном пути (по числу дуг) из источника  $s$  в вершину  $x$ . Рангом проекта  $R$  называется ранг стока  $t$ :  $R = r(t)$ .

## Рекуррентные соотношения для рангов

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x = s \\ \max \{r(y) + 1 \mid (y, x) \in E\}, & x \neq s \end{cases}$$

# Алгоритм Форда

$|V| = n, |E| = m,$  дуга  $e = (i(e), k(e)) \in E$ .

## Алгоритм

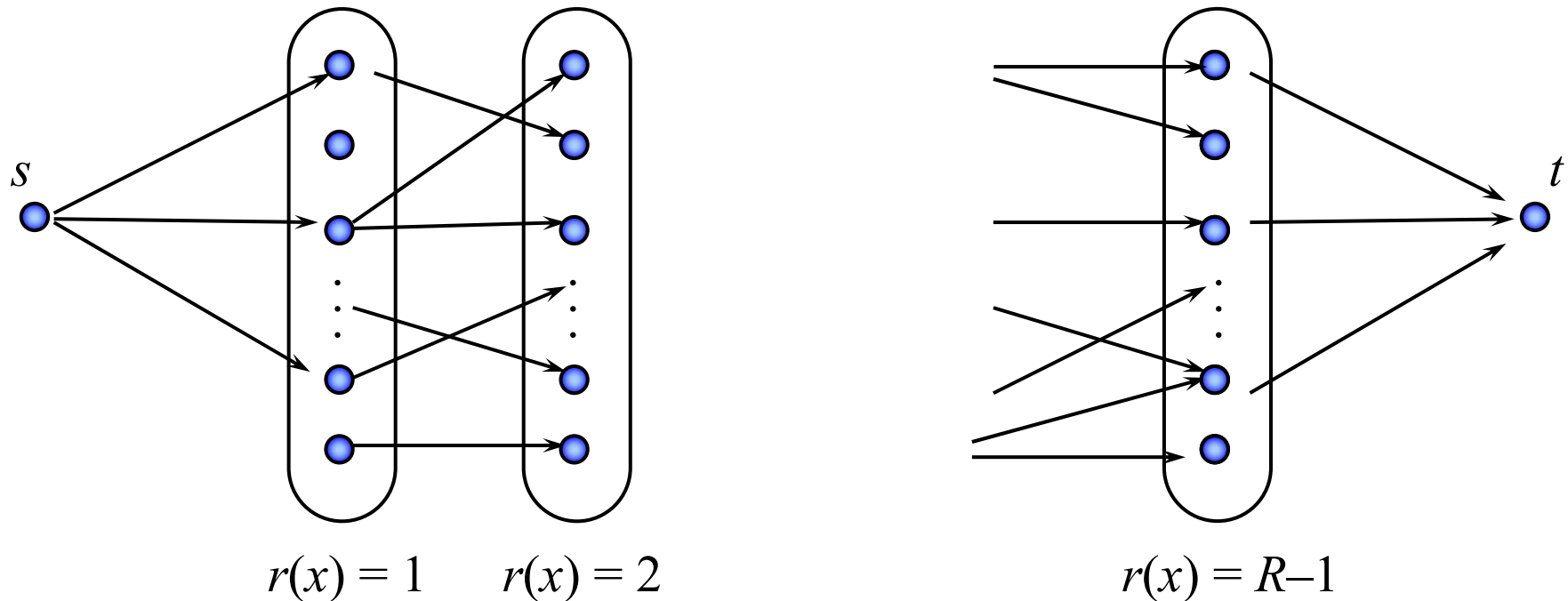
1.  $r(x) := 0$  для всех  $x \in V$ .
2. for  $l := 1, \dots, |V|$  do  
for  $e := 1, \dots, |E|$  do  
if  $r(k(e)) < r(i(e)) + 1$   
then  $r(k(e)) := r(i(e)) + 1$ .

$$T = O(|V| |E|), \quad \Pi = O(|V| + |E|)$$



**Определение.** Нумерация вершин сети  $G = (V, E)$  называется **правильной**, если для каждой дуги  $e = (i(e), k(e)) \in E$  справедливо неравенство  $i(e) < k(e)$ .

Построение правильной нумерации вершин



В произвольном порядке нумеруем вершины ранга 1, затем ранга 2, и т.д.

Топологическая сортировка графа  $G$ , трудоемкость  $O(|V| + |E|)$ .

**Определение.** Наиболее ранним моментом свершения события  $x$  называется максимальный момент времени  $T_p(x)$ , раньше которого данное событие произойти не может.

Обозначим через  $L_{sx}$  длину максимального пути из  $s$  в  $x$  во взвешенном графе  $G = (V, E)$ ,  $\tau(e) \geq 0, e \in E$ . Тогда  $T_p(x) = L_{sx}$ .

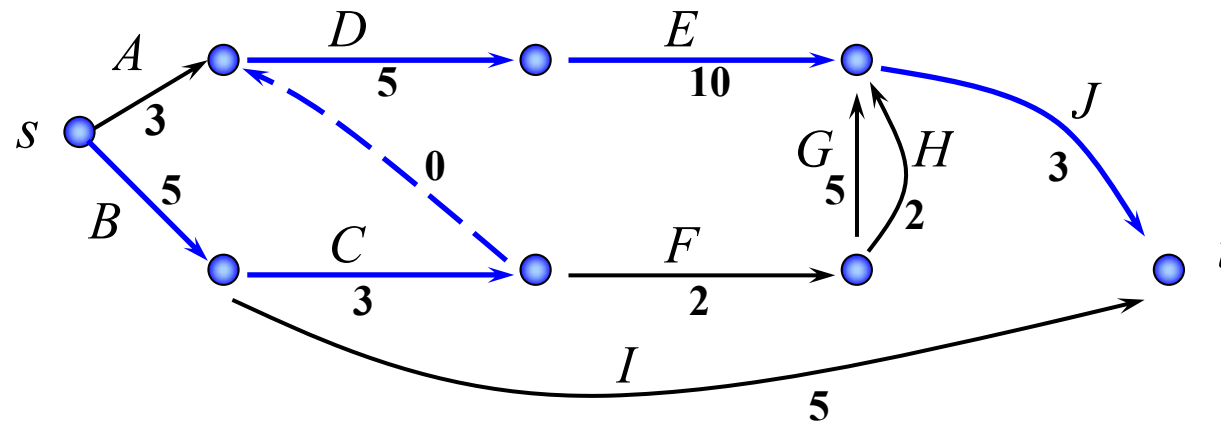
## Рекуррентные соотношения

$$T_p(x) = \begin{cases} 0, & x = s \\ \max \{T_p(y) + \tau(yx) \mid (yx) \in E\}, & x \neq s \end{cases}$$

**Упражнение 1.** Используя правильную нумерацию вершин построить алгоритм вычисления всех величин  $T_p(x)$  с трудоемкостью  $T=O(|E|)$ .

Критическое время проекта — наиболее раннее время завершения всего проекта, то есть  $T_{Kp} = T_P(t)$ .

**Определение.** Всякий путь в  $G = (V, E)$ , имеющий длину  $T_{Kp}$  называется критическим. Работы и события, лежащие на критическом пути, называются критическими.

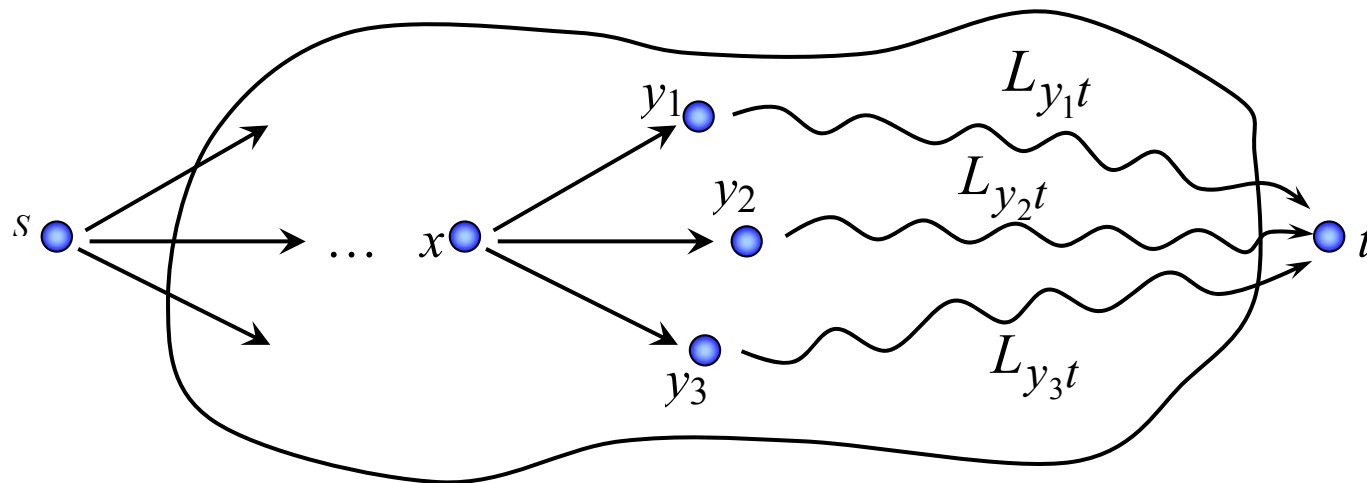


**Определение.** Наиболее поздним моментом  $T_{\Pi}(x)$  свершения события  $x$  называется максимально возможный момент свершения события  $x$ , не приводящий к увеличению  $T_{Kp}$ .

Легко заметить, что  $T_{\Pi}(x) = T_{Kp} - L_{xt}$ .

## Рекуррентные соотношения

$$T_{\Pi}(x) = \begin{cases} T_{Kp}, & x = t \\ \min \{T_{\Pi}(y) - \tau(x, y) \mid (x, y) \in E\}, & x \neq t \end{cases}$$



**Упражнение 2.** Построить алгоритм вычисления величин  $T_{\Pi}(x)$  с  $T=O(|E|)$ .

**Определение.** **Полным резервом времени** для работы  $e = (i, k) \in E$  называется величина  $T_{\Pi}(k) - T_P(i) - \tau(e)$ .

**Теорема.** Необходимым и достаточным условием принадлежности работы критическому пути является равенство нулю ее полного резерва времени.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть дуга  $e = (i, k)$  является критической. Тогда

$$L_{si} + \tau(e) + L_{kt} = L_{Kp}$$

$$\text{и } (T_{Kp} - L_{kt}) - L_{si} - \tau(e) = 0,$$

$$\text{но } T_{Kp} - L_{kt} = T_{\Pi}(k) \text{ и } L_{si} = T_P(i),$$

откуда и следует доказательство теоремы. Достаточность доказывается аналогично. ■

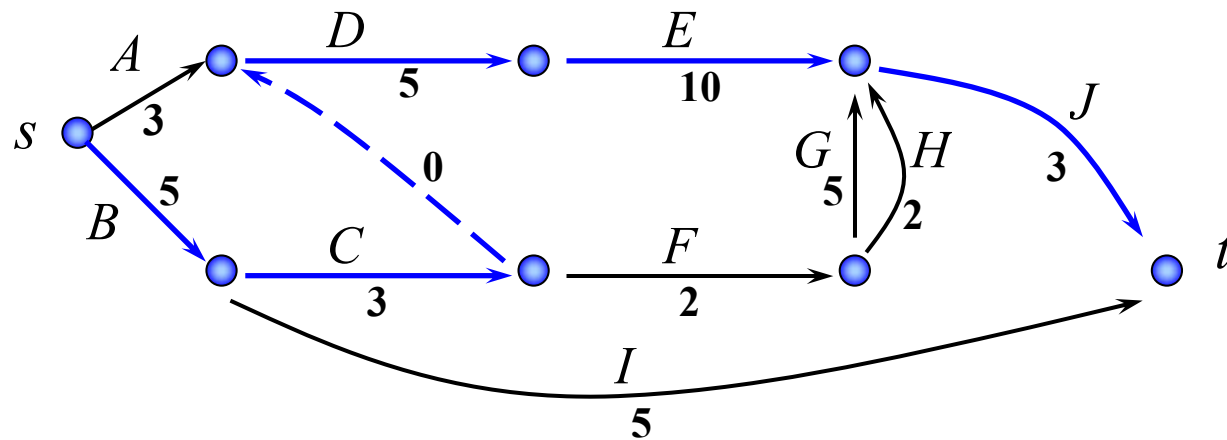
**Следствие.** Событие  $x$  является критическим если и только если  $T_P(x) = T_{\Pi}(x)$ .

# Стратегический анализ

Критический путь  $B, C, D, E, J$ . Длина пути  $T_{Кр} = 26$ .

Работа  $J$  — обучение персонала. Работа  $E$  — ремонт помещений.

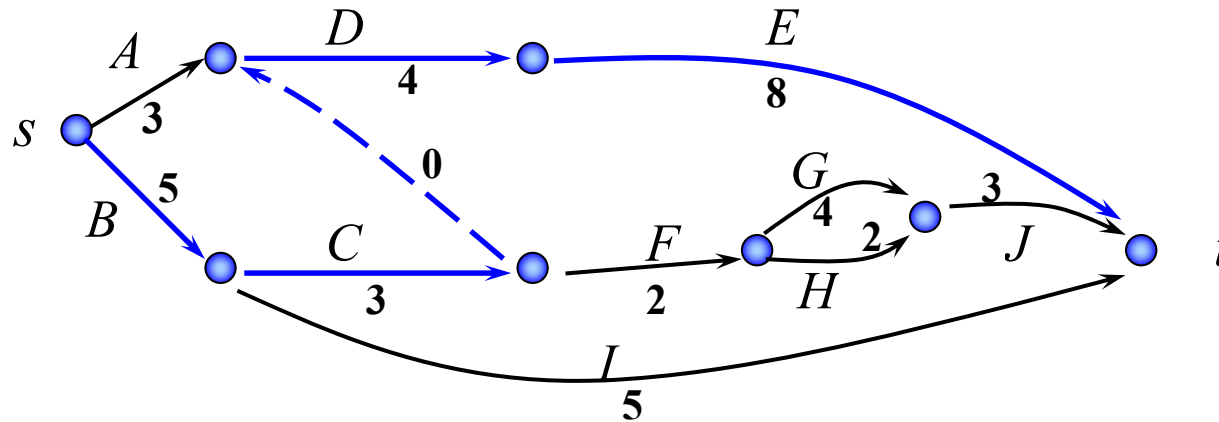
Можно обучать персонал в учебном центре и убрать предшествование  $E$  для  $J$ . Длительности работ можно сократить, если привлечь дополнительные средства.



## Новая сетевая модель

Сократили длительности работ  $D$ ,  $E$ ,  $G$  и удалили работу  $E$  из предшественников работы  $J$ . Новый критический путь  $B, C, D, E$ .

Длина пути  $T_{Кр} = 20$ .



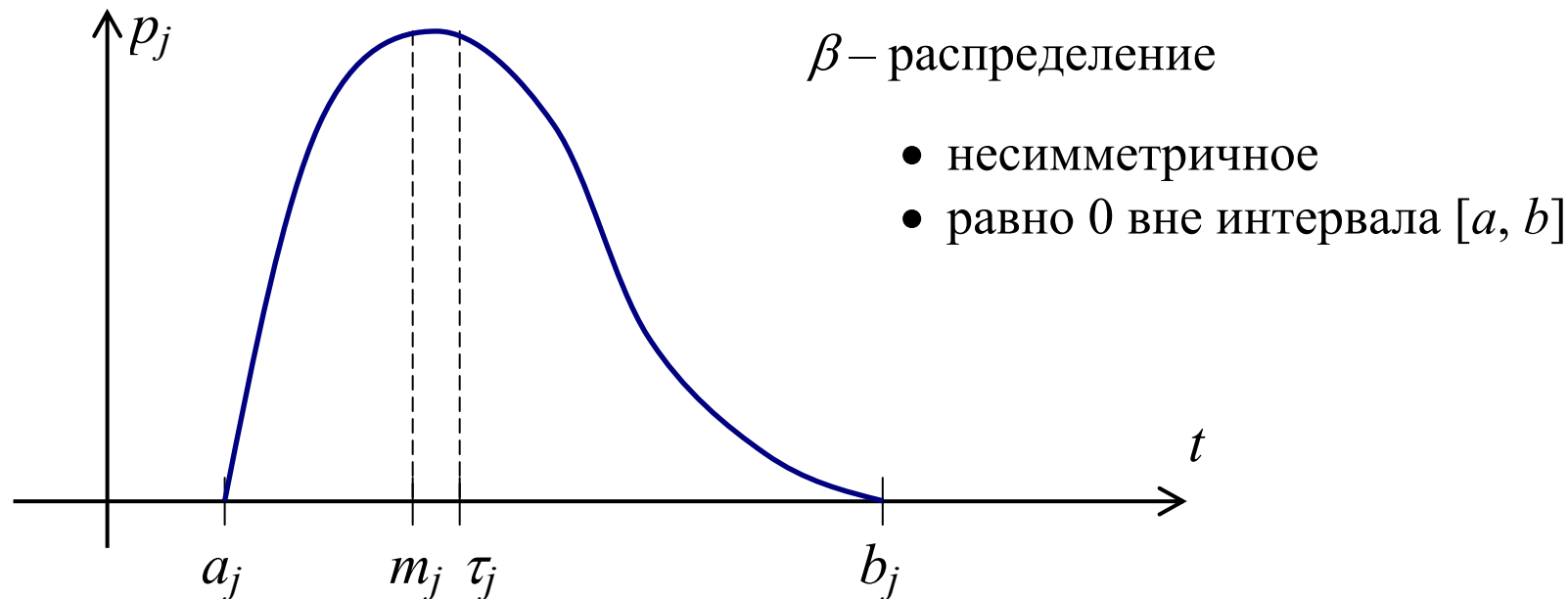
## Вероятностная модель

Для каждой работы  $j \in J$  кроме  $\tau_j$  — длительности выполнения (в среднем) зададим три величины:

$a_j$  — оптимальное время завершения;

$m_j$  — наиболее вероятное время завершения;

$b_j$  — пессимистическое время завершения.





## Оценка параметров для $\beta$ -распределения

Для работы  $j$  среднее значение  $\tau_j \approx \frac{(a_j + 4m_j + b_j)}{6}$ , дисперсия  $\sigma_j \approx \left(\frac{b_j - a_j}{6}\right)^2$ ,

стандартное отклонение  $\sqrt{\sigma_j} \approx \frac{b_j - a_j}{6}$ .

$j$	$a$	$m$	$b$	Среднее	Ст. отклонение	Дисперсия
$A$	1	3	5	3	2/3	4/9
$B$	3	4,5	9	5	1	1
$C$	2	3	4	3	1/3	1/9
$D$	2	4	6	4	2/3	4/9
$E$	4	7	16	8	2	4
$F$	1	1,5	5	2	2/3	4/9
$G$	2,5	3,5	7,5	4	5/6	25/36
$H$	1	2	3	2	1/3	1/9
$I$	4	5	6	5	1/3	1/9
$J$	1,5	3	4,5	3	1/2	1/4

## Вероятность завершения проекта к заданному сроку

Предполагаем, что

- длительности работ являются независимыми случайными величинами;
- случайная величина  $\tilde{T}_{Kp}$  имеет нормальное распределение.

Требуется оценить  $Prob\{\tilde{T}_{Kp} \leq T^*\}$  для любого  $T^*$ .

**Пример.** Берем критический путь  $B, C, D, E$  и считаем дисперсию для  $\tilde{T}_{Kp}$ .

$\sigma(\tilde{T}_{Kp}) = \sigma(B) + \sigma(C) + \sigma(D) + \sigma(E) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + 4 = \frac{52}{9}$ . Стандартное откло-

нение  $\sqrt{\sigma(\tilde{T}_{Kp})} = \sqrt{\frac{52}{9}} = 2,404$ . Итак,  $\tilde{T}_{Kp}$  – нормально распределенная слу-

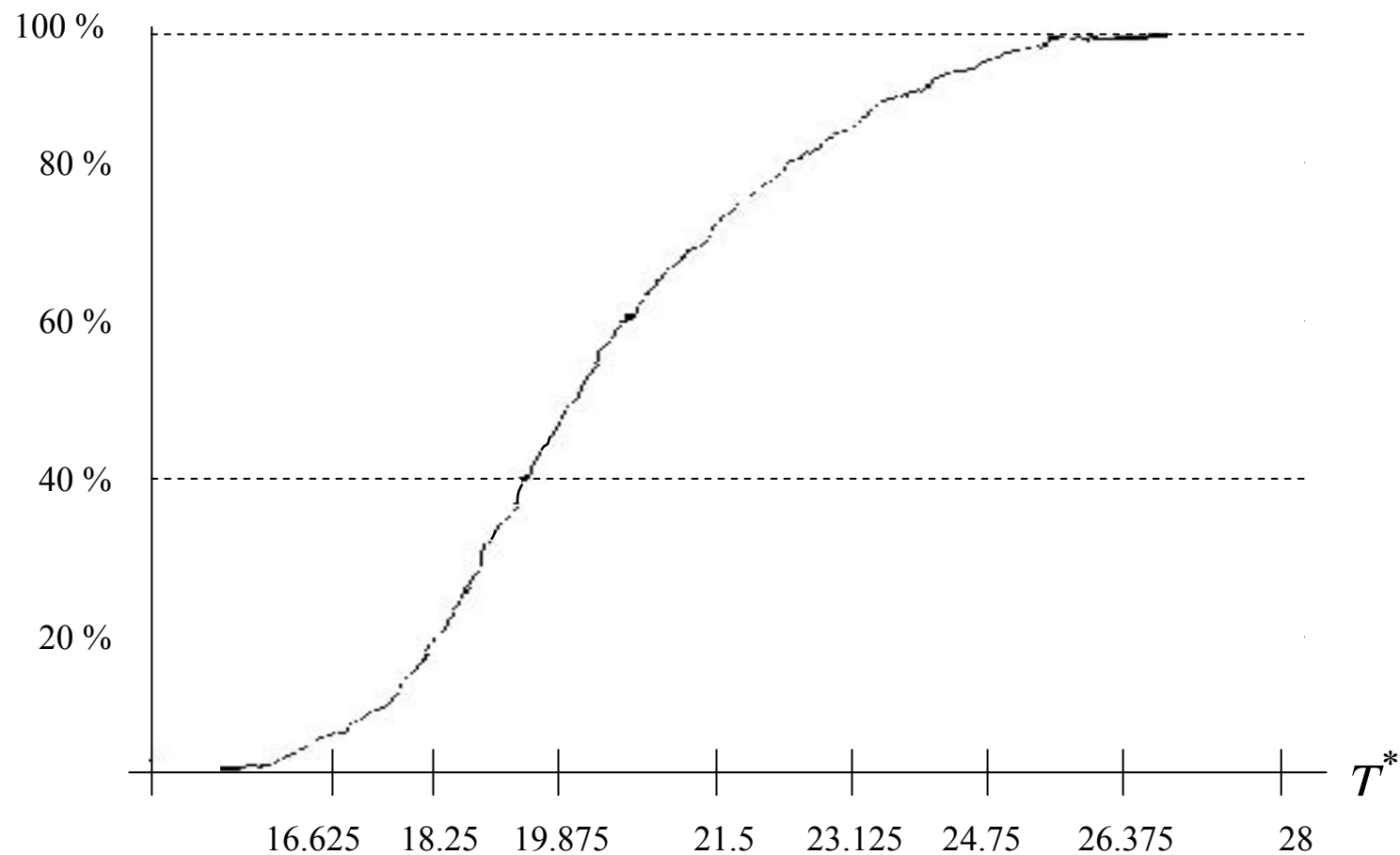
чайная величина с мат.ожиданием  $T_{Kp} = 20$  и стандартным отклонением 2,404.

Тогда для  $z = (\tilde{T}_{Kp} - T_{Kp}) / \sqrt{\sigma}$  при  $T^* = 22$  получаем

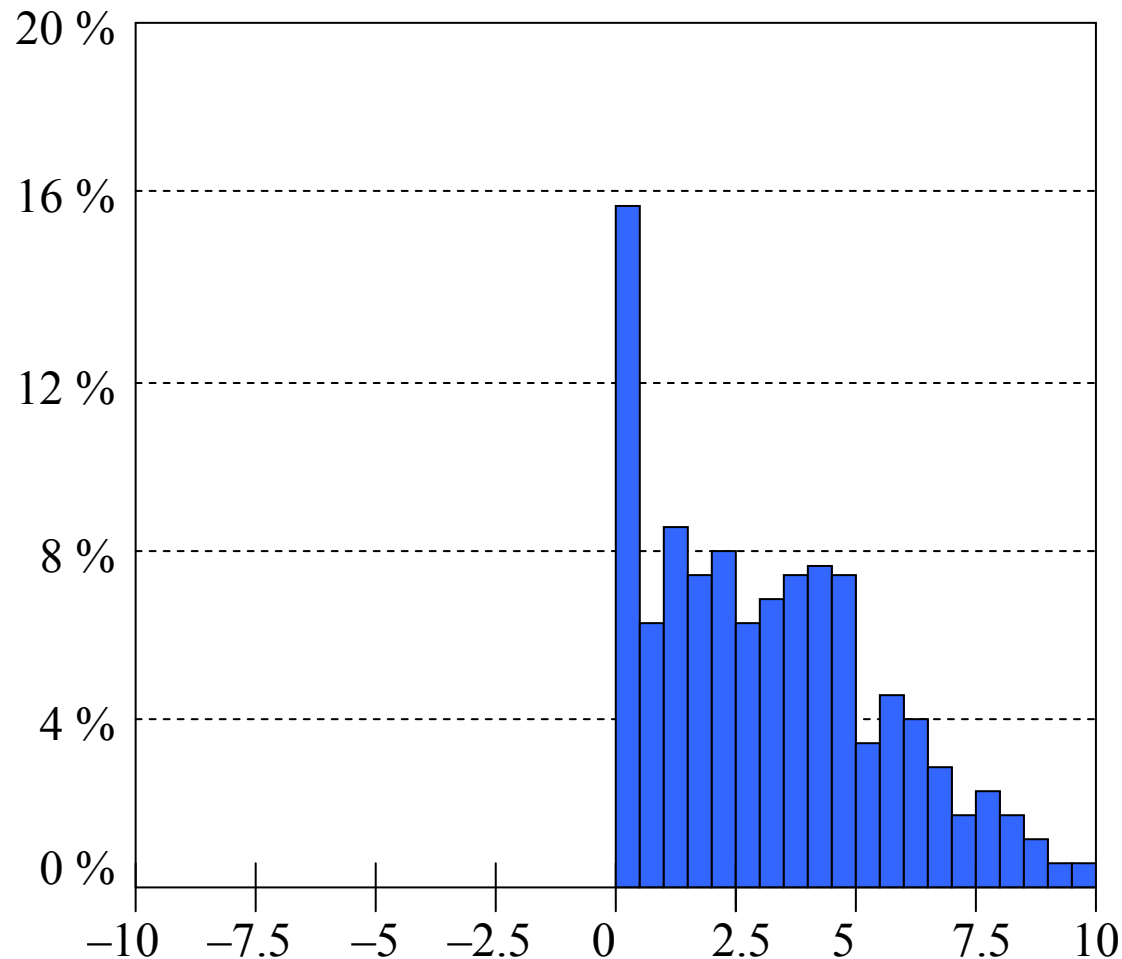
$$Prob\{\tilde{T}_{Kp} \leq T^*\} = Prob\left\{\frac{\tilde{T}_{Kp} - T_{Kp}}{\sqrt{\sigma}} \leq \frac{T^* - T_{Kp}}{\sqrt{\sigma}}\right\} = Prob\{z \leq 0,8319\} \approx 0,8.$$

# Расчеты по имитационной модели

Функция распределения для вероятности окончания проекта к времени  $T^*$   
 $Prob\{\tilde{T}_{Кр} \leq T^*\}$



## Распределение резерва времени для работы $F$



Полный резерв для работы  $F$  равен 3. Среднее значение полного резерва по имитационной модели 3,026, но большая дисперсия. Достаточно часто работа  $F$  оказывалась критической!

## Заключение

При анализе проекта необходимо

1. построить диаграмму Гантта и сетевой график
2. посчитать среднюю длительность каждой работы ( $\tau_j = (a_j + 4m_j + b_j) / 6$ )
3. вычислить дисперсию ( $\sigma_j = (b_j - a_j)^2 / 36$ )

Используя полученные данные

1. найти критический путь и его длину
2. вычислить полный резерв времени для каждой работы
3. определить вероятность завершения работ в этом критическом пути для желаемого срока окончания проекта.

Если полученная вероятность слишком мала, то провести стратегический анализ проекта с целью сокращения критического пути за счет изменения условий предшествования и (или) длительностей работ.