

# Задачи о покрытии

**Дано:** Сеть дорог и конечное множество пунктов для размещения постов ГАИ. Каждый пункт может контролировать дорогу на заданном расстоянии от него. Известно множество опасных участков на дорогах.

**Найти:** минимальное число постов для контроля всех опасных участков.

**Обозначения:**

$I = \{1, \dots, m\}$  — множество всех возможных пунктов для размещения постов ГАИ;

$J = \{1, \dots, n\}$  — множество опасных участков;

$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из пункта } i \text{ можно контролировать участок } j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

**Переменные задачи:**

$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ устанавливается пост ГАИ} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$



## Математическая модель

$$\min \sum_{i \in I} x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i \in I.$$

Пусть  $c_i \geq 0$  — стоимость создания поста в пункте  $i$  и число постов не превосходит  $p > 0$ . Требуется минимизировать суммарную стоимость:

$$\min \sum_{i \in I} c_i x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i \in I.$$



Предположим, что имеется возможность открыть не более  $p$  постов и их не хватит для контроля всех опасных участков.

Требуется при данном ограничении найти размещение постов для контроля максимального числа опасных участков.

### Переменные задачи:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если опасный участок } j \text{ под контролем} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ устанавливается пост ГАИ} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

## Математическая модель

$$\max \sum_{j \in J} y_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq y_j, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

**Упражнение.** Показать, что эта модель не эквивалентна нижеследующей модели:

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij} x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I.$$

Если опасные участки опасны в разной степени и величина  $b_j$  задает, например, число аварий на участке  $j$  за год, то задача предотвращения максимального числа аварий записывается следующим образом:

$$\max \sum_{j \in J} b_j y_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq y_j, \quad j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$



# Жадный алгоритм

Рассмотрим взвешенную задачу о покрытии

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} c_i x_i \mid \sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, j \in J, x_i \in \{0,1\} \right\}$$

## Алгоритм

1. Положить  $X^0 := \emptyset$ ,  $k := 0$ ,  $J_i^k := \{j \in J \mid a_{ij} = 1\}$ ,  $i \in I$ ,  $J^0 := \emptyset$ ;

2. Пока  $J^0 \neq J$  выполнять:

2.1. Найти  $i_0 \in I \setminus X^k$  такой, что  $J_{i_0}^k \neq \emptyset$  и  $\frac{c_{i_0}}{|J_{i_0}^k|} = \min_{i \in I \setminus X^k} \left\{ \frac{c_i}{|J_i^k|} \mid |J_i^k| \neq \emptyset \right\}$ ;

2.2. Положить  $k := k + 1$ ,  $X^k := X^{k-1} \cup \{i_0\}$ ,  $J^0 := J^0 \cup J_{i_0}^{k-1}$

и  $J_i^k := J_i^{k-1} \setminus J_{i_0}^{k-1}$  для всех  $i \in I \setminus X^k$ .

## Пример

$$I = \{1, \dots, n + 1\}, J = \{1, \dots, n\}$$

| вектор $(c_i)$   | матрица $(a_{ij})$  |
|--|---|
| $\begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & 0 & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 1 & 1 & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$ |

Оптимальное решение  $X^* = \{n + 1\}$  и его значение  $(1 + \varepsilon)$ . Жадный алгоритм сначала возьмет  $i = 1$ , затем  $i = 2, \dots, i = n$ , и получит значение

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n.$$

Трудоемкость алгоритма  $T \sim O(mn)$  при правильном хранении множеств  $J_i^k$ ,  $i \in I$ .

Без ограничения общности будем считать, что  $X^k = \{1, 2, \dots, k\}$  для  $k = 1, \dots, K$  и алгоритм получил покрытие после  $K$  итераций.

Обозначим  $q_i^k = |J_i^k|$ ,  $i \in I$ ,  $k = 1, \dots, K$  и заметим, что

$$c_k / q_k^k \leq c_i / q_i^k, \quad i \in I,$$

$$J_i^{k+1} \subseteq J_i^k \quad \text{и} \quad J_i^0 \cap J_k^k = J_i^k \setminus J_i^{k+1},$$

$$J = \bigcup_{k=1}^K J_k^k, \quad J_{k_1}^{k_1} \cap J_{k_2}^{k_2} = \emptyset, \quad \text{при } k_1 \neq k_2.$$

Рассмотрим функцию  $H(p) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{i}$ ,  $p = 1, 2, \dots$



**Теорема Чватала.** Пусть  $X^*$  — оптимальное решение взвешенной задачи о покрытии, а  $X^K$  — решение жадного алгоритма. Тогда

$$\sum_{i \in X^K} c_i \leq H \left( \max_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} \right) \sum_{i \in X^*} c_i.$$

**Доказательство:** Наряду с исходной задачей рассмотрим задачу с новой целевой функцией и непрерывными переменными:

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} c_i H \left( \sum_{j \in J} a_{ij} \right) x_i \mid \sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, j \in J, x_i \geq 0 \right\}.$$

Двойственная к ней имеет вид

$$\max \left\{ \sum_{j \in J} u_j \mid \sum_{j \in J} a_{ij} u_j \leq c_i H \left( \sum_{j \in J} a_{ij} \right), i \in I, u_j \geq 0 \right\}.$$

Так как множества  $J_k^k$  образуют разбиение множества  $J$ , то положим

$$u_j = c_k / q_k^k, \quad j \in J_k^k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Покажем, что  $u_j$  — допустимое решение двойственной задачи. Для любого  $i \in I$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} u_j = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J_k^k} a_{ij} u_j = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J_i^0 \cap J_k^k} u_j = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J_i^k \setminus J_i^{k+1}} c_k / q_k^k = \sum_{k=1}^K (q_i^k - q_i^{k+1}) c_k / q_k^k.$$

Пусть для рассматриваемого  $i \in I$  номер  $k_0$  — наибольший номер  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$  такой, что  $J_i^k \neq \emptyset$ . Тогда, продолжая приведенные выше неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} u_j &= \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_k / q_k^k \leq \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_i / q_i^k = \\ c_i \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) / q_i^k &\leq c_i \sum_{k=1}^{k_0} (H(q_i^k) - H(q_i^{k+1})) \leq c_i H(q_i^1) = c_i H \left( \sum_{j \in J} a_{ij} \right). \end{aligned}$$

Итак, построенное решение является допустимым в двойственной задаче. Кроме того,

$$\sum_{j \in J} u_j = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J_k^k} c_k / q_k^k = \sum_{k=1}^K q_k^k c_k / q_k^k = \sum_{k=1}^K c_k = \sum_{k \in X^K} c_k.$$

Но по теореме двойственности

$$\sum_{j \in J} u_j \leq H(\max_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}) \sum_{i \in X^*} c_i \text{ откуда и вытекает требуемая оценка. } \blacksquare$$

## Плохая новость.

Существует константа  $0 < \gamma < 1$  такая, что наличие полиномиального приближенного алгоритма с оценкой относительной погрешности  $\gamma H(\max_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij})$

влечет  $P=NP$ .

# Алгоритм муравьиной колонии

Предложен в начале 90-х годов прошлого века М. Dorigo и V. Maniezzo



Муравьи ориентируются по запаху.

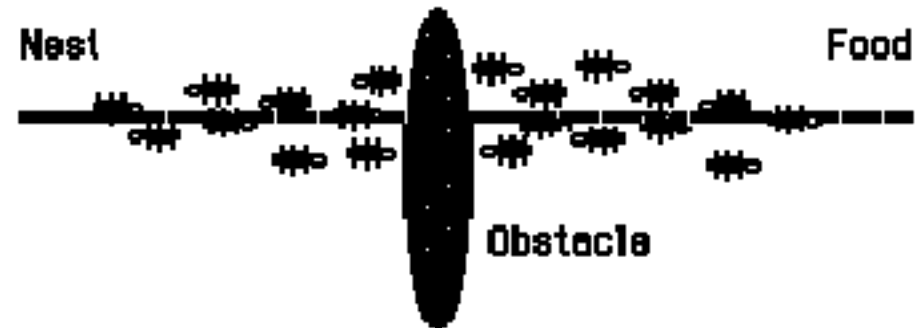
Каждый муравей оставляет после себя сильно пахнущее вещество — *феромен*.

При выборе направления домой с большей вероятностью выбирается направление с более сильным запахом.



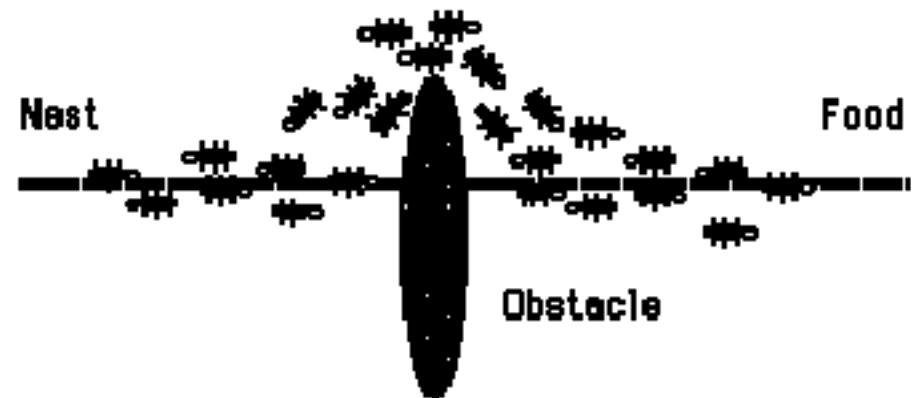
← Кратчайший путь

Появилось препятствие →



← Обход препятствия

Новый кратчайший путь →



## Вероятностный жадный алгоритм

Пусть  $X \subset I$ ,  $J(X) = \{j \in J \mid \sum_{i \in X} a_{ij} \geq 1\}$  — множество “покрытых” столбцов,

$q_i(X)$  — мощность множества  $J_i(X) = \{j \in J \mid a_{ij} = 1\} \setminus J(X)$ ,  $i \in I \setminus X$ ,

$\rho_i = c_i / q_i(X)$ ,  $i \in I \setminus X$  — удельные приращения целевой функции,

$L(p)$  — случайное подмножество множества  $I \setminus X$ ; элемент  $i \in I \setminus X$  включается в множество  $L(p)$  с вероятностью  $p$  независимо от других элементов.

## Вероятностный жадный алгоритм

1. Положить  $X := \emptyset$ ,  $J^0 := \emptyset$ .

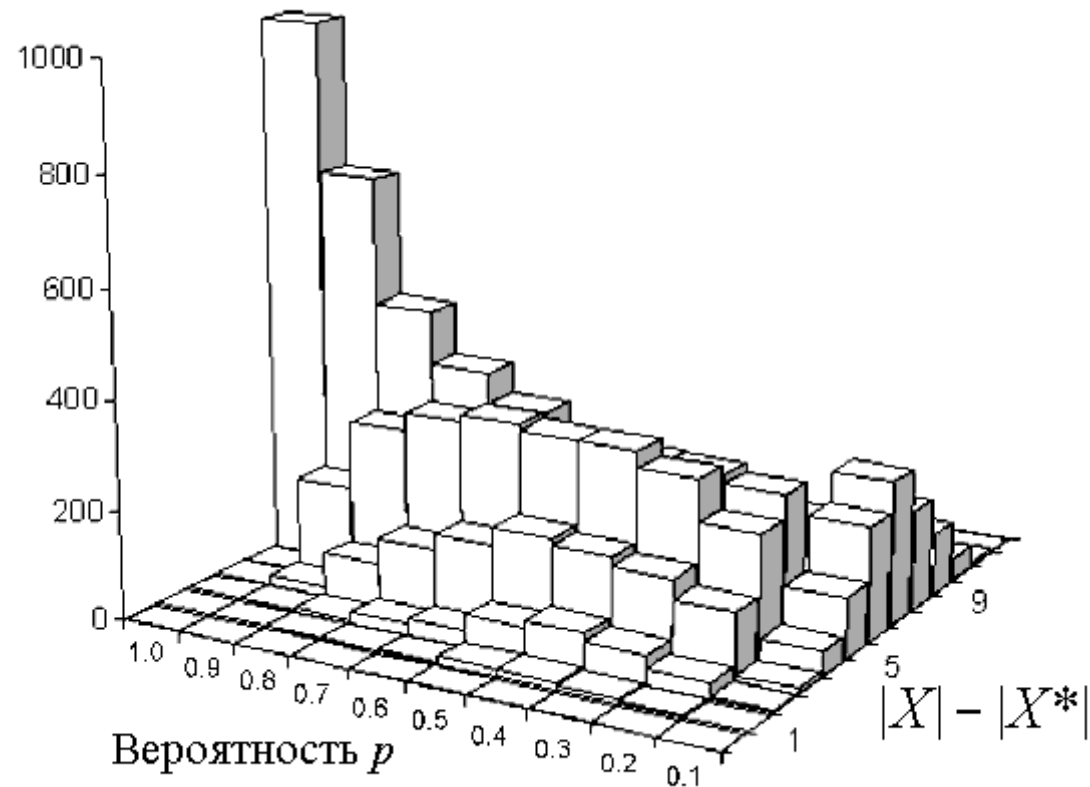
2. Пока  $J^0 \neq J$  выполнять:

2.1. Сформировать подмножество  $L(p) \subseteq I \setminus X$ ;

2.2. Найти  $i_0 \in L(p)$  с ненулевым значением  $q_{i_0}(X)$  и минимальным удельным приращением  $\rho_{i_0}$ .

2.3. Положить  $X := X \cup \{i_0\}$ ;  $J^0 := J^0 \cup J_{i_0}(X)$ .

Влияние рандомизации на погрешность, случай  $c_i = 1, i \in I$ .



При фиксированном значении  $p > 0$  проводилось 1000 испытаний алгоритма. Число решений с одинаковым значением представлено на графике столбиком.

## Алгоритм муравьиной колонии

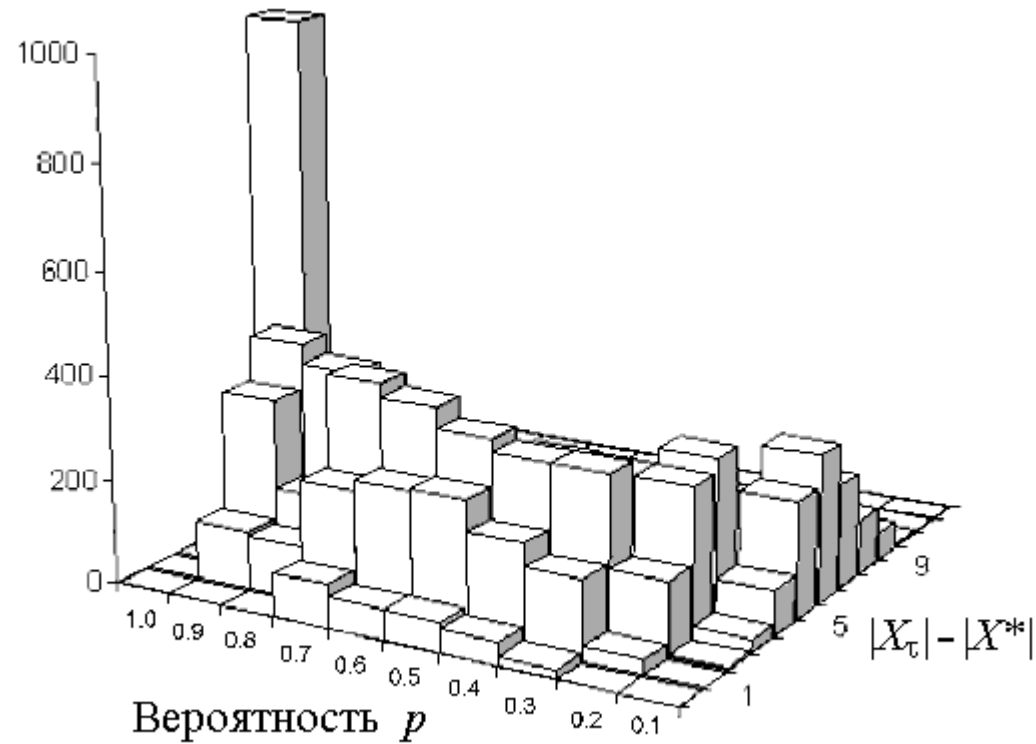
Пусть вектор  $\tau_i$ ,  $i \in I$  задает статистическую информацию о частоте появления элемента  $i \in I$  в решении  $X \subseteq I$ . Положим  $\rho_i = c_i / q_i(X) + \alpha / \tau_i$ ,  $i \in I \setminus X$ , где параметр  $\alpha$  определяет важность статистической информации.

## Алгоритм МК

1. Положить  $\tau_i := 1$ ,  $i \in I$ ,  $X^{\text{МК}} := I$ ,  $t := 0$ .
2. Пока  $t \leq T_{\max}$  выполнять:
  - 2.1. Построить решения  $X_\tau$ ,  $\tau = 1, \dots, T$  вероятностным жадным алгоритмом
  - 2.2. Выбрать часть наилучших решений  $X_\tau$ ,  $\tau = 1, \dots, T'$ ,  $T' \leq T$
  - 2.3. По решениям  $X_\tau$ ,  $\tau = 1, \dots, T'$ , обновить статистическую информацию  $\tau_i$ ,  $i \in I$  и положить  $t := t + 1$
  - 2.4. Сменить рекорд  $X^{\text{МК}}$ , если найдено лучшее решение.



Влияние статистической информации, случай  $c_i = 1, i \in I$ .



Большое число оптимальных решений получено при  $0,3 \leq p \leq 0,7$ .

# Ant Colony Optimization

BY MARCO DORIGO, IRIDIA, UNIVERSITE' LIBRE DE BRUXELLES, BELGIUM

|              |
|--------------|
| ABOUT ACO    |
| PEOPLE       |
| PUBLICATIONS |
| IN THE PRESS |
| TUTORIALS    |
| CONFERENCES  |
| JOB          |
| SOFTWARE     |
| MAILING LIST |
| LINKS        |

## Links

This page contains a number of interesting links to activities around Ant Colony Optimization and to related fields.

- [The Metaheuristics Network](#)

The **Metaheuristics Network** is a project sponsored by the [Improving Human Potential](#) program of the **European Community** (HPRN-CT-1999-00106), aimed to study various **metaheuristics** on different **combinatorial optimization** problems.

- [Swarm-bots Projects](#)

**Swarm-bots** is a project sponsored by the [Future and Emerging Technologies](#) program of the **European Community** (IST-2000-31010), aimed to study new approaches to the **design** and **implementation** of **self-organizing** and **self-assembling** artifacts.

## Задача о $p$ -центрах

Предположим, что  $p$  постов ГАИ уже выбрано, и каждый опасный участок прикреплен к ближайшему посту. Обозначим через  $d_{ij}$  расстояние между участком  $j$  и постом  $i$ . Для выбранного набора постов  $S \subset I$ ,  $|S| = p$  обозначим через  $D$  максимальное расстояние между постом и участками

$$D = \max_{j \in J} \min_{i \in S} d_{ij}.$$



Величина  $D$  связана с задержкой при выезде из поста  $i$  на участок  $j$ . Задача минимизации этой задержки называется задачей о  $p$ -центрах:

$$\max_{j \in J} \min_{i \in S} d_{ij} \rightarrow \min_{S \subset I, |S|=p}.$$

Задача о  $p$ -центрах сводится к решению не более  $m \cdot n$  задач о минимальном покрытии (как?).

## Задача о многократных покрытиях

Пусть величина  $D$  задает радиус ответственности поста, т. е. все участки на расстоянии  $D$  от поста находятся в зоне его ответственности. Зоны могут пересекаться. Пусть  $r_j \geq 1$  — минимальное число постов, которые должны контролировать участок  $j$ ,  $b_j > 0$  — среднее число аварий на участке  $j$ .

Требуется выбрать  $p$  постов так, чтобы каждый участок контролировался не менее  $r_j$  постами, и число предотвращенных аварий было бы максимальным:



при условиях

$$\max \sum_{j \in J} b_j \sum_{i \in I} a_{ij} x_i$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p,$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq r_j, j \in J,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i \in I.$$

## Вероятностная постановка задачи

Вызовы с участков происходят случайным образом и независимо друг от друга,

$q > 0$  — вероятность того, что пост не может откликнуться на вызов;

$p_k = 1 - q^k$  — вероятность того, что хотя бы один из  $k$  постов откликнется;

$p_k - p_{k-1} = (1 - q^k) - (1 - q^{k-1}) = (1 - q) q^{k-1}$  — прирост вероятности при добавлении одного пункта.

### Переменные:

$y_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если участок } j \text{ контролируется как минимум } k \text{ постами,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

## Математическая модель:

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{n_j} b_j (1-q) q^{k-1} y_{jk}$$

при ограничениях 
$$\sum_{k=1}^{n_j} y_{jk} \leq \sum_{i \in I} a_{ij} x_i, \quad j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p,$$

$$x_i, y_{jk} \in \{0,1\},$$

где  $n_j = \sum_{i \in I} a_{ij}, \quad j \in J, \quad i \in I.$

**Замечание.** В оптимальном решении

$$y_{jk} \leq y_{j,k-1} \text{ для всех } j \in J, 1 < k \leq n_j.$$

