

Задача о размещении филиалов банка

Дано: $I = \{1, \dots, m\}$ — множество мест (районов, городов, округов), где можно открывать филиалы;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество потенциальных клиентов;

$f_i \geq 0$ — расходы на открытие филиала i .

$c_{ij} \geq 0$ — доход от обслуживания клиента j филиалом i .

$p > 0$ — максимальное число открываемых филиалов.

Найти: подмножество $S \subset I$, $|S| \leq p$, открываемых филиалов, которое дает максимум суммарной прибыли.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если открываем филиал } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается филиалом } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$



Математическая модель

$$\max \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij} - \sum_{i \in I} f_i x_i \right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$z_{ij}, x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J$$

Задача размещения производства

Дано: $I = \{1, \dots, m\}$ — множество районов (городов, областей), где можно открыть производство некоторой продукции;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество потребителей этой продукции (клиентов);

$f_i \geq 0$ — затраты на организацию производства в пункте i .

$c_{ij} \geq 0$ — производственно–транспортные расходы на удовлетворение спроса j -го клиента i -м предприятием.

$p > 0$ — максимально возможное число предприятий.



Найти: подмножество предприятий $S \subset I$, $|S| \leq p$, которое позволяет удовлетворить спрос всех клиентов с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если открываем предприятие } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ обслуживает клиента } j, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in I} f_i x_i \right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$z_{ij}, x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Упражнение. Замена $z_{ij} \in \{0, 1\}$ на $z_{ij} \geq 0$ не меняет минимума суммарных затрат.

Выбор состава системы технических средств

Дано: $I = \{1, \dots, m\}$ — множество типов технических средств;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество видов работ, выполняемых этими техническими средствами;

$f_i \geq 0$ — затраты на разработку и организацию производства технического средства i -го типа;

$g_i \geq 0$ — затраты на производство одного средства i -го типа;

$c_{ij} \geq 0$ — затраты на выполнение одной работы j -го вида техническими средствами i -го типа;

$p_{ij} \geq 1$ — число технических средств i -го типа, необходимых для выполнения одной работы j -го вида;

$\varphi_j \geq 1$ — число работ j -го вида;

$p > 0$ — максимально возможное число типов технических средств в составе системы.



Найти: Состав системы, который позволил бы выполнить все работы с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если включаем в состав системы технические средства } i\text{-го типа} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$v_i \geq 0$, целые — число технических средств i -го типа в составе системы

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работы } j\text{-го вида выполняются техническими средствами } i\text{-го типа} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in I} \left(f_i x_i + g_i v_i + \sum_{j \in J} \varphi_j c_{ij} z_{ij} \right)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} z_{ij} &= 1, \quad j \in J; \\ v_i &= \sum_{j \in J} \varphi_j p_{ij} z_{ij}, \quad i \in I; \\ x_i &\geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J; \\ \sum_{i \in I} x_i &\leq p; \\ z_{ij}, x_i &\in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J. \end{aligned}$$

Упражнение 1. Усовершенствовать модель для случая ненулевого начального состава системы $V_i^0 \geq 0, i \in I$.

Упражнение 2. Построить модель для случая последовательного выполнения работ.

Двухуровневая задача размещения

Дано: $I = \{1, \dots, m\}$ — множество мест, где можно открыть производство некоторой продукции;
 $J = \{1, \dots, n\}$ — множество потребителей этой продукции (клиентов);
 $f_i \geq 0$ — затраты на организацию производства в пункте i .
 $c_{ij} \geq 0$ — производственно–транспортные расходы на удовлетворение спроса j -го клиента i -м предприятием.
 $p > 0$ — максимально возможное число предприятий.



$d_{ij} \geq 0$ — предпочтения j -го клиента на множестве предприятий:

$\min_{i \in I} d_{ij}$ — наиболее желаемый поставщик;

$\max_{i \in I} d_{ij}$ — наименее желаемый поставщик.

Найти: Подмножество $S \subset I$, $|S| \leq p$, открываемых предприятий, которые позволили бы удовлетворить спрос всех клиентов с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если открываем предприятие } i, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ обслуживает клиента } j, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij}^* + \sum_{i \in I} f_i x_i \right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I,$$

где z_{ij}^* — оптимальное решение задачи потребителя:

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} d_{ij} z_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Квадратичная задача о назначениях

Дано: $I = \{1, \dots, n\}$ — множество зданий, где могут размещаться цеха;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество производственных цехов;

a_{kl} — расстояние между зданиями $k, l \in I$;

b_{ij} — объем продукции, транспортируемый из цеха i в цех j , где $i, j \in J$.



Найти: Размещение цехов по зданиям, при котором суммарный объем перевозок продукции был бы минимальным.

Переменные задачи:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если цех } i \text{ размещается в здании } k, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{l \in I} \sum_{k \in I} a_{kl} b_{ij} x_{ik} x_{jl}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in J} x_{ik} = 1, \text{ для всех } k \in I;$$

$$\sum_{k \in I} x_{ik} = 1, \text{ для всех } i \in J;$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, \quad i \in J, k \in I.$$

Генетический алгоритм для задач размещения

Идея заимствована у живой природы и состоит в организации эволюции, целью которой является получение оптимального решения в сложной комбинаторной задаче:

$$\min \{ f(S), S \in Sol \}.$$



Начальная популяция $P = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — набор допустимых решений исходной задачи.

Шаг эволюции: выбираем из популяции два решения, скрещиваем их, применяем мутацию, локальную перестройку и добавляем в популяцию, затем наихудшее решение удаляем из популяции.



Общая схема алгоритма

1. Выбрать начальную популяцию P и запомнить рекорд $F^* = \min_{i=1, \dots, k} f(S_i)$.
2. Пока не выполнен критерий остановки делать следующее:
 - 2.1. Выбрать “родителей” S_{i_1}, S_{i_2} из популяции.
 - 2.2. Применить к S_{i_1}, S_{i_2} оператор скрещивания и получить новое решение S' .
 - 2.3. Применить к S' оператор мутации и получить новое решение S'' .
 - 2.4. Применить к S'' оператор локального улучшения и получить новое решение S''' .
 - 2.5. Если $f(S''') < F^*$, то сменить рекорд $F^* := f(S''')$.
 - 2.6. Добавить S''' к популяции и удалить из нее наихудшее решение.

Оператор скрещивания

Пусть S_1, S_2 — два решения, задаваемые векторами $X^1, X^2 \in \{0,1\}^n$.

Одноточечный оператор скрещивания: выбираем случайным образом координату $1 \leq l \leq n$ и новый вектор X' получает первые l координат от вектора X^1 , а остальные от вектора X^2 .

$$\begin{array}{l} X^1: (0 \ 1 \ 0 \ 0 \mid 1 \ . \ . \ . \ 0 \ 1 \ 1) \\ X^2: (1 \ 1 \ 0 \ 1 \mid 0 \ . \ . \ . \ 1 \ 1 \ 1) \\ X': (\underbrace{0 \ 1 \ 0 \ 0}_l \mid 0 \ . \ . \ . \ 1 \ 1 \ 1) \end{array}$$

Аналогично определяется двухточечный, трехточечный и т.д. операторы.

Равномерный оператор скрещивания: новое решение X' в каждой координате получает с вероятностью 0.5 значение одного из родителей.

Выбор родителей

Турнирная селекция: из популяции P случайным образом выбирается некоторое подмножество $P' \subseteq P$ и родителем назначается наилучшее решение в P' :

$$S_i = \min_{S \in P'} f(S).$$

Пропорциональная селекция: из популяции P случайным образом выбирают-ся два родителя. Для решения S_i вероятность быть выбранным обратно пропорциональна значению целевой функции $f(S_i)$.

Варианты: Лучший в популяции + случайно выбранный.
Случайно выбранный + наиболее удаленный от него
и др.



Оператор мутации

Вероятностный оператор мутации случайным образом вносит изменения в допустимое решение задачи. Например, с малой вероятностью $q < \frac{1}{n}$ в каждой координате значение $X_i \in \{0, 1\}$ заменяется на противоположное $1 - X_i$. Если в решении требуется сохранить $\sum_{i \in I} x_i = p$, то случайным образом выбирается координата i_1 такая, что $X_{i_1} = 1$ и координата i_2 такая, что $X_{i_2} = 0$ и производится замена $X_{i_1} := 0, X_{i_2} := 1$.

$$\begin{array}{l} X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ X'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \quad \quad i_1 \qquad \qquad i_2 \end{array}$$

Локальное улучшение

Для решения S обозначим через $N(S)$ его окрестность, например, множество всех решений S' , находящихся от S на расстоянии не более 2 (3, 4, 5...)

Алгоритм локального спуска

1. Положить $S := S''$;
2. Найти в окрестности решения S наилучшего соседа \bar{S}

$$f(\bar{S}) = \min\{f(\hat{S}), \hat{S} \in N(S)\};$$

3. Если $f(\bar{S}) < f(S)$, то положить $S := \bar{S}$ и вернуться на шаг 2, иначе STOP, получен локальный минимум.

Задачи размещения в условиях конкуренции

$I = \{1, \dots, m\}$ — множество пунктов размещения;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество клиентов;

c_{ij} — расстояние от пункта i до клиента j ;

f_i — стоимость открытия предприятия в пункте i для первого ЛПР;

g_i — стоимость открытия предприятия в пункте i для второго ЛПР;

d_j — доход от обслуживания клиента j ;

Сначала ЛПР₁ принимает решение об открытии своих предприятий. Затем, зная это решение, ЛПР₂ открывает свои предприятия так, чтобы получить максимальный доход. Клиент знает оба решения и выбирает ближайшее к себе предприятие. Задача состоит в том, чтобы найти решение для ЛПР₁ с максимальных доходом.



Переменные задачи

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если ЛПР}_1 \text{ открыл предприятие в пункте } i \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если ЛПР}_2 \text{ открыл предприятие в пункте } i \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Для вектора z положим

$I_j(z) = \{i \in I \mid c_{ij} < \min(c_{kj} \mid z_k = 1)\}$ — множество пунктов размещения которые находятся ближе к клиенту j , чем ближайшее открытое предприятие, принадлежащие ЛПР₁.

Математическая модель

$$\max_z \left\{ \sum_{j \in J} d_j \prod_{i \in I_j(z)} x_i^* - \sum_{i \in I} f_i z_i \right\}$$

при ограничениях $z_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$

и x^* — оптимальное решение задачи ЛПР₂:

$$\max_x \left\{ \sum_{j \in J} d_j \left(1 - \prod_{i \in I_j(z)} x_i \right) - \sum_{i \in I} g_i (1 - x_i) \right\}$$

при ограничениях $z_i + (1 - x_i) \leq 1$, $i \in I$, $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$.

Задача ЛПР₂ является экстремальным ограничением в задаче ЛПР₁.

Принятие решений путем голосования

Пусть в районе размещается p школ (больниц, Интернет-центров, ...).

$I = \{1, \dots, m\}$ — множество возможных пунктов размещения;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество клиентов (учащихся, ...);

c_{ij} — матрица предпочтений (расстояний от i до j , чем меньше, тем лучше)

ЛПР₁ выдвигает проект $z_i \in \{0, 1\}$, $\sum_{i \in I} z_i = p$, и хочет получить его одобрение.

ЛПР₂ — оппозиция, которая хочет “провалить” проект Z и выставляет свой проект X , зная проект Z .

Решение принимается голосованием.

Клиент отдает свой голос за тот проект, который ему “ближе”.



Математическая модель

$$\max_z \sum_{j \in J} d_j \prod_{i \in I_j(z)} x_i^*$$

при ограничениях $z_i \in \{0,1\}, i \in I, \sum_{i \in I} z_i = p,$

и x^* — оптимальное решение задачи:

$$\max_x \sum_{j \in J} (1 - \prod_{i \in I_j(z)} x_i)$$

при ограничениях $x_i \in \{0,1\}, i \in I, \sum_{i \in I} (1 - x_i) = p.$

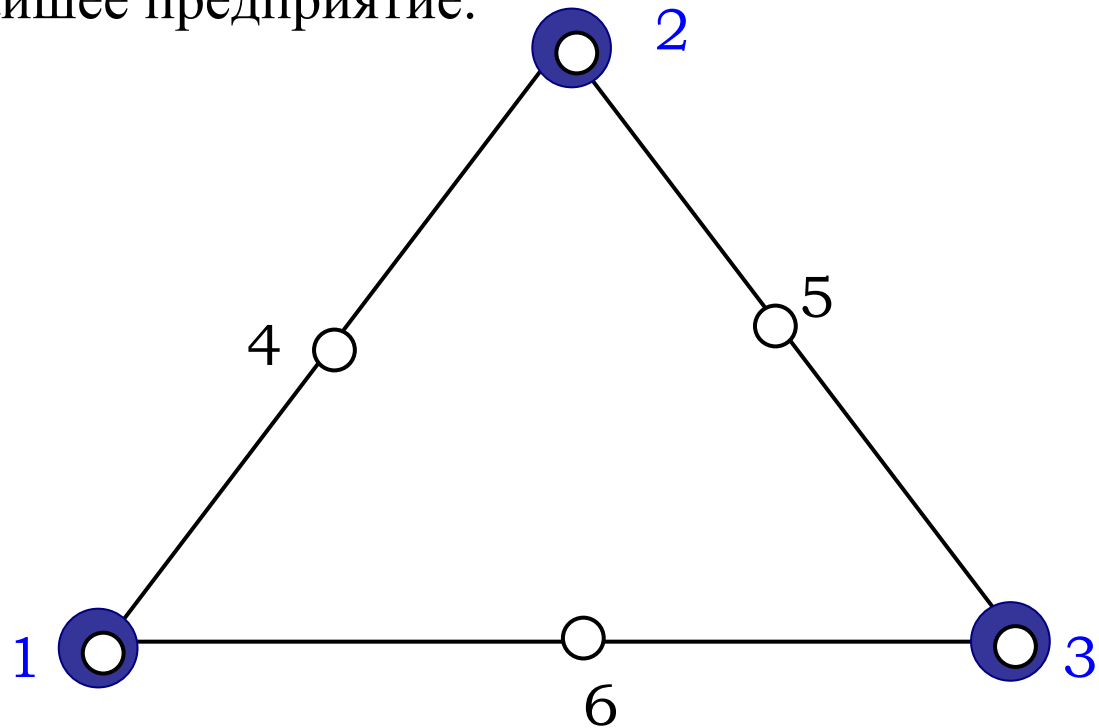
Если ЛПР₁ набрал больше половины голосов, то он “победил”.

«Безнадежный» пример

$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — места размещения предприятий;

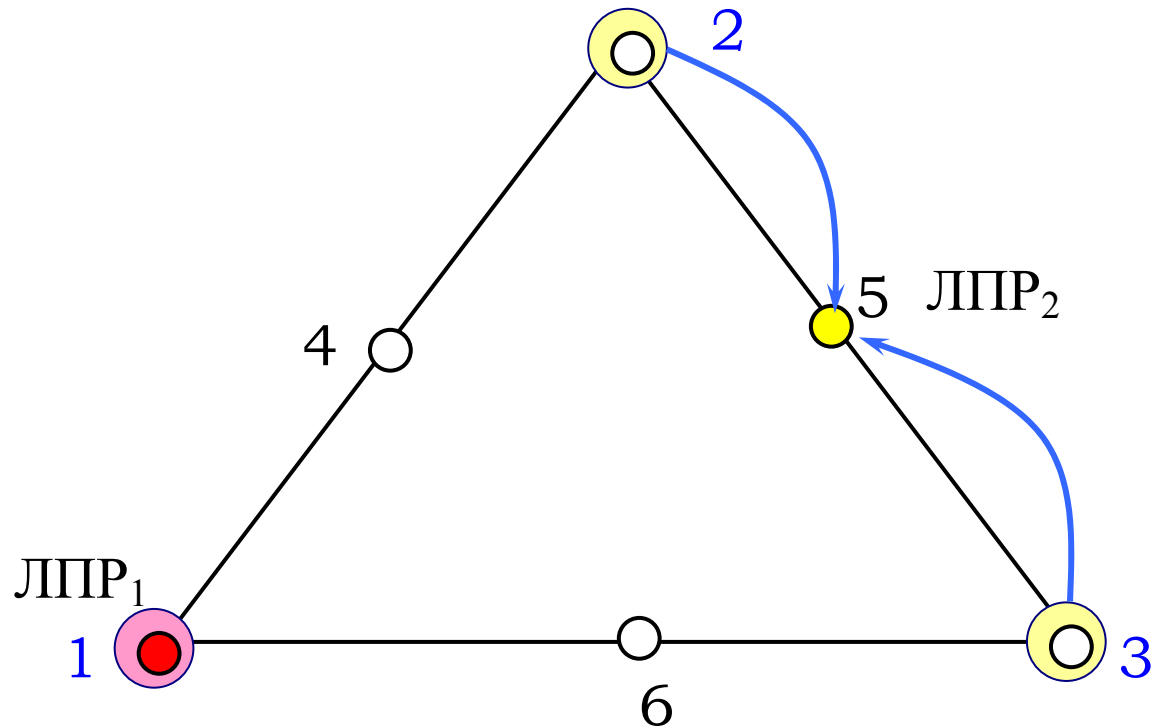
$J = \{1, 2, 3\}$ — клиенты.

Клиенты выбирают ближайшее предприятие.



При $p = 1$ ЛПР₁ всегда проигрывает!

Если ЛПР₁ ставит предприятие в вершине треугольника, то ЛПР₂ ставит свое предприятие на противоположной стороне треугольника и захватывает двух клиентов, в то время как ЛПР₁ получает только одного.



Если ЛПР₁ ставит предприятие на стороне треугольника, то ЛПР₂ ставит свое предприятие в соседней вершине треугольника и тоже захватывает двух клиентов, в то время как ЛПР₁ получает только одного

