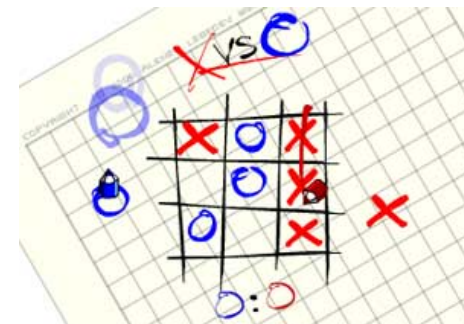


Введение в матричные игры

Предметом исследований в теории игр являются модели и методы принятия решений в ситуациях, где участвуют несколько сторон (игроков). Цели игроков различны, часто противоположны. Мы будем рассматривать только игры двух лиц с противоположными интересами.



Игра состоит из последовательности *ходов*. Ходы бывают личные и случайные. (В шахматах все ходы личные. Рулетка содержит случайный ход). Результаты ходов оцениваются *функцией выигрыша* для каждого игрока. Если сумма выигрышей равна 0, то игра называется *игрой с нулевой суммой* (преферанс). Будем рассматривать только такие игры.



Стратегией называется набор правил, определяющих поведение игрока, т.е. выбор хода.

Оптимальной стратегией называют такую стратегию, при которой достигается максимальный ожидаемый средний выигрыш при многократном повторении игры.

Матричные игры — это игры, где два игрока играют в игру с нулевой суммой, имея конечное число «чистых» стратегий: $\{1, \dots, m\}$ и $\{1, \dots, n\}$ и $\forall (ij)$ задан платеж a_{ij} второго игрока первому. Матрица (a_{ij}) задает выигрыш первого игрока и проигрыш второго, $a_{ij} \geq 0$!

Игра в орлянку.

Игроки выбирают ход $\in \{\text{орел}, \text{решка}\}$. Если ходы совпали, то выиграл первый, иначе второй.

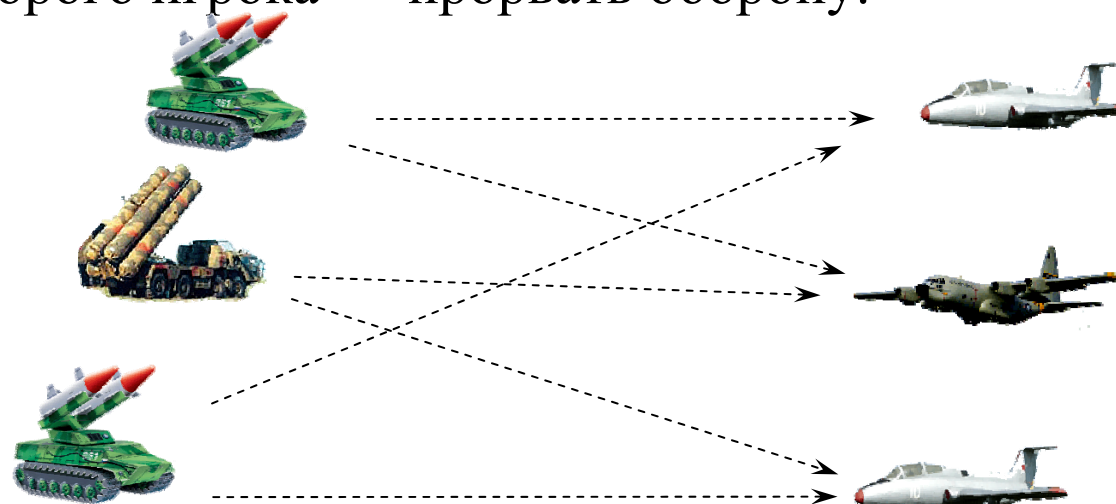


I игрок \ II игрок	II игрок	
	орел	решка
орел	1	-1
решка	-1	1



Прорыв обороны. Первый игрок выбирает систему зенитного вооружения. Второй игрок выбирает самолет. Элементы a_{ij} задают вероятность поражения самолета j системой i . Цель второго игрока — прорвать оборону.

	Самолеты		
Зенитки	0,5	0,6	0,8
	0,9	0,7	0,8
	0,7	0,5	0,6



В первом примере все ходы одинаково плохи или хороши. Во втором примере ход (2, 2) в некотором смысле лучший для обеих сторон: если взять самолет 2, то зенитка 2 — лучшая для первого игрока; если взять зенитку 2, то самолет 2 лучший для второго. В матрице есть седловая точка!

Определение. *Седловой точкой* матрицы (a_{ij}) называют пару (i_0, j_0) такую, что

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}, \quad \forall ij.$$

Принцип минимакса (осторожности).

Предположим, что противник всеведущ и угадывает все ходы! Первый игрок предполагает, что второй все знает и для хода i первого игрока выберет $j(i)$: $a_{ij(i)} \leq a_{ij}, \forall j = 1, \dots, n$. Обозначим $\alpha_i = a_{ij(i)} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$. Тогда лучшей

стратегией для первого игрока является выбор i_0 такой, что

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \alpha_{i_0}.$$

Величину α назовем *нижней ценой* игры в чистых стратегиях.

Второй игрок из соображений осторожности считает, что первый $\forall j$ выберет $i(j)$ так, что $a_{i(j)j} \geq a_{ij}, \forall i$, т.е. $\beta_j = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$ и выбирает j с минимальным β_j , т.е.

$$\beta = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} = \beta_{j_0}.$$

Величину β назовем *верхней ценой* игры в чистых стратегиях.

Пример 1. $\alpha = -1, \beta = +1, \alpha \leq \beta$

Пример 2. $\alpha = \max_i \{0.5, 0.7, 0.5\} = 0.7, \beta = \min_j \{0.9, 0.7, 0.8\} = 0.7$.

Лемма. Для любой функции $f(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$, справедливо неравенство

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

в предположении, что эти величины существуют.

Доказательство. Введем обозначения:

$$f(x, y(x)) = \min_{y \in Y} f(x, y),$$

$$f(x^*, y(x^*)) = \max_{x \in X} f(x, y(x)).$$

Тогда

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = f(x^*, y(x^*)) = \min_{y \in Y} f(x^*, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$



Теорема. Необходимым и достаточным условием равенства верхней и нижней цен игры в чистых стратегиях является существование седловой точки в матрице (a_{ij}) .

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\alpha = \beta$. По определению

$$\begin{cases} \alpha = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{i_0 j} \leq a_{i_0 j_0} \\ \beta = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij_0} \geq a_{i_0 j_0} \end{cases}$$

т.е. $\alpha \leq a_{i_0 j_0} \leq \beta$. Так как $\alpha = \beta$, то $a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}$, $\forall ij$, т.е. является седловой точкой.

Достаточность. Пусть седловая точка $(i_0 j_0)$ существует, т.е.

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда $\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq \min_j a_{i_0 j} \leq \max_i \min_j a_{ij}$, но по лемме верно обратное, т.е. $\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}$. Следовательно $\alpha = \beta$. ■

Смешанные стратегии и основная теорема матричных игр

Определение. Под *смешанной стратегией* будем понимать вероятностное распределение на множестве чистых стратегий.

Смешанная стратегия первого игрока: $p = (p_1, \dots, p_m)$,

$$p \in P_m = \{(p_1, \dots, p_m) \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Смешанная стратегия второго игрока $q = (q_1, \dots, q_n)$,

$$q \in Q_n = \{(q_1, \dots, q_n) \mid \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}.$$

При многократном повторении игры игрок выбирает чистые стратегии случайным образом с соответствующими вероятностями.

Платежная функция для смешанных стратегий p и q :

$$E(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$$

задает математическое ожидание выигрыша первого игрока при p, q .

Замечание. Добавлением большой положительной константы можно добиться того, что $E(p, q) > 0, \forall p, q$ без изменения стратегий.

Из принципа осторожности:

Первый игрок ищет максимум $\alpha(p) = \min_{q \in Q_n} E(p, q)$ и получает нижнюю цену

игры $\alpha = \max_{p \in P_m} \alpha(p)$.

Второй игрок ищет минимум $\beta(q) = \max_{p \in P_m} E(p, q)$ и получает верхнюю цену

игры $\beta = \min_{q \in Q_n} \beta(q)$.

Теорема Фон–Неймана

В матричной игре существует пара (p^*, q^*) смешанных стратегий, таких что

1. $E(p, q^*) \leq E(p^*, q^*) \leq E(p^*, q), \forall p \in P_m, q \in Q_n$.
2. $\alpha = \beta = E(p^*, q^*)$.

Доказательство. Сначала покажем, как представить задачу о выборе наилучших стратегий в виде ЛП, а затем докажем теорему.

Первый игрок: $\alpha(p) \rightarrow \max$

$$\alpha(p) = \min_{q \in Q_n} E(p, q) \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Пусть $u_i = p_i / \alpha(p)$, $i = 1, \dots, m$, в предположении $\alpha(p) > 0$.

Тогда $u_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, и $\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq 1$, $\forall j = 1, \dots, n$. Заметим, что $\sum_{i=1}^m u_i = \frac{1}{\alpha(p)}$

и задача $\alpha(p) \rightarrow \max$ может быть записана следующим образом:

$$\min \sum_{i=1}^m u_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Аналогичным образом получаем задачу второго игрока:

$$\max \sum_{j=1}^n v_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$v_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $v_j = q_j / \beta(q)$, $j = 1, \dots, n$. Полученные задачи являются взаимодвойственными. Пусть u_i^*, v_j^* — оптимальные решения этих задач.

Положим $p_i^* = u_i^* / \sum_{i=1}^m u_i^*$, $q_j^* = v_j^* / \sum_{j=1}^n v_j^*$. Из второй теоремы двойственности

следует, что

$$v_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^* - 1 \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^* - 1 \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Просуммировав, получим

$$\sum_{j=1}^n v_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i^* v_j^* = \sum_{i=1}^m u_i^*.$$

Поделим на $(\sum v_j^*)(\sum u_i^*)$:

$$E(p^*, q^*) = \frac{1}{\sum v_j^*} = \frac{1}{\sum u_i^*}.$$

Теперь докажем первое утверждение теоремы:

$$E(p, q^*) = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{v_j^*}{\sum v_j^*} \leq \frac{1}{\sum v_j^*} \sum p_i = \frac{1}{\sum v_j^*}.$$

Аналогично

$$E(p^*, q) = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{u_i^*}{\sum u_i^*} \geq \frac{1}{\sum u_i^*} \sum q_j = \frac{1}{\sum u_i^*}.$$

т.е. $E(p, q^*) \leq E(p^*, q^*) \leq E(p^*, q), \quad \forall p \in P_m, q \in Q_n.$

Докажем второе утверждение теоремы.

Из предыдущего неравенства имеем:

$$\max_p E(p, q^*) \leq E(p^*, q^*) \leq \min_q E(p^*, q),$$

$$\text{т.е. } \beta = \min_q \max_p \sum_{ij} a_{ij} p_i q_j \leq \max_p \min_q \sum_{ij} a_{ij} p_i q_j = \alpha.$$

Но по лемме $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha = \beta = E(p^*, q^*)$. ■



Дилемма заключенных

Два преступника пойманы за совершение преступления. У следствия не хватает доказательств их виновности и преступникам предлагают сделку:

Если сознаешься и подтвердишь участие товарища в преступлении, то выйдешь на свободу, а товарищ получит 7 лет лишения свободы.



Преступники сидят в разных камерах и не могут общаться, но они знают, что каждому сделано такое предложение.

Если оба преступника сознаются, то каждый получит 5 лет.

Если оба не сознаются, то каждый получит по 1 году.

Матричная игра двух лиц

	2-й сознался	2-й не сознался
1-й сознался	5 : 5	0 : 7
1-й не сознался	7 : 0	1 : 1

Седловая точка — оба сознаются — существует и дает 5 лет каждому

Оптимальное решение — не сознаваться — дает только 1 год.

Оно не является седловой точкой!

Что будет, если дать преступникам посоветаться?

Вопросы к экзамену

3 курс, ФИТ, НГУ, Летняя сессия, 2008 г.

1. Метод динамического программирования на примере распределительной задачи.
2. Модель размещения капитала. Свойство дробных решений. Процедура округления.
3. Алгоритмы для задачи о рюкзаке с гарантированной точностью 0.5 и 0.75.
4. Аппроксимационные схемы. Полиномиальные и полностью полиномиальные аппроксимационные схемы. Примеры таких схем для задачи о рюкзаке.
5. Задача замены оборудования с учетом дисконтирования затрат. Соотношения динамического программирования для случая конечного планового периода.
6. Задача упаковки в контейнеры. Нижние оценки целевой функции.
7. Задача двумерной прямоугольной упаковки. Алгоритм имитации отжига.
8. Задача календарного планирования. Критические работы, пути и критическое время проекта. Вероятность завершения проекта к заданному сроку
9. Постановка задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами.

10. T –поздние расписания. Алгоритм вычисления T –поздних расписаний.
11. Доказательство оптимальности T^* –позднего расписания. Алгоритм Гимади.
12. Задачи календарного планирования с переменными длительностями работ. Сведение к линейному программированию.
13. Задача коммивояжера. Теорема о погрешности приближенных полиномиальных алгоритмов и алгоритмов локального спуска.
14. Задача коммивояжера с неравенством треугольника. Алгоритм с гарантированной оценкой точности 2. Доказательство оценки и ее неулучшаемости.
15. Нижние оценки в задаче коммивояжера: примитивная оценка, оценка линейного программирования, оценка задачи о назначениях и минимальные 1-деревья.
16. Алгоритм решения задачи о назначениях.
17. Метод ветвей и границ для задачи коммивояжера.
18. Классификация задач теории расписаний.
19. Алгоритм Лаулера для задачи $1 | prec | f_{max}$
20. Алгоритм решения задачи $1 | prec, pmtn, r_i | f_{max}$
21. Алгоритм решения задачи $P | pmtn | C_{max}$

- 22. Алгоритм решения задачи $P \mid pmtn, r_i \mid L_{max}$
- 23. Алгоритм решения задачи $Q \mid pmtn \mid C_{max}$
- 24. Алгоритм решения задачи $F2 \parallel C_{max}$
- 25. Задачи о покрытии, алгоритм Чватала, оценка его погрешности и экстремальный пример.
- 26. Задачи размещения. Генетический алгоритм для задачи размещения производства.
- 27. Задачи размещения в условиях конкуренции, их связь с принятием решений голосованием, «безнадежный» пример.
- 28. Матричные игры. Определение седловой точки.
- 29. Необходимые и достаточные условия равенства верхней и нижней цен игры в чистых стратегиях. Теорема Фон-Неймана. Дилемма заключенных.