Задача о размещении филиалов банка

Дано: $I = \{1,\ldots, m\}$ — множество мест (районов, городов, округов), где можно открывать филиалы;

$J = \{1,\ldots, n\}$ — множество потенциальных клиентов;

$f_i \geq 0$ — расходы на открытие филиала i.

$c_{ij} \geq 0$ — доход от обслуживания клиента j филиалом i.

$p > 0$ — максимальное число открываемых филиалов.

Найти: подмножество $S \subset I$, $|S| \leq p$, открываемых филиалов, которое дает максимум суммарной прибыли.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если открываем филиал } i, \\ 0 \ \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если клиент } j \text{ обслуживается филиалом } i, \\ 0 \ \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\max\left\{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}c_{ij}z_{ij}-\sum_{i\in I}f_i x_i\right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I}z_{ij}\le 1,\quad j\in J;$$

$$x_i\ge z_{ij},\quad i\in I,\quad j\in J;$$

$$\sum_{i\in I}x_i\le p;$$

$$z_{ij},\ x_i\in\{0,1\},\quad i\in I, j\in J$$

Задача размещения производства

Дано: $I = \{1,\ldots, m\}$ — множество районов (городов, областей), где можно открыть производство некоторой продукции;

$J = \{1,\ldots, n\}$ — множество потребителей этой продукции (клиентов);

$f_i \geq 0$ — затраты на организацию производства в пункте i.

$c_{ij} \geq 0$ — производственно–транспортные расходы на удовлетворение спроса j-го клиента i-м предприятием.

$p > 0$ — максимально возможное число предприятий.

Найти: подмножество предприятий $S \subset I$, $| S | \leq p$, которое позволяет удовлетворить спрос всех клиентов с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если открываем предприятие } i, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если предприятие } i \text{ обслуживает клиента } j, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in I} f_i x_i \right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$z_{ij}, x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Упражнение. Замена $z_{ij} \in \{0,1\}$ на $z_{ij} \geq 0$ не меняет минимума суммарных затрат.

Выбор состава системы технических средств

Дано: $I = \{1,\ldots, m\}$ — множество типов технических средств;

$J = \{1,\ldots, n\}$ — множество видов работ, выполняемых этими техническими средствами;

$f_i \geq 0$ — затраты на разработку и организацию производства технического средства i-го типа;

$g_i \geq 0$ — затраты на производство одного средства i-го типа;

$c_{ij} \geq 0$ — затраты на выполнение одной работы j-го вида техническими средствами i-го типа;

$p_{ij} \geq 1$ — число технических средств i-го типа, необходимых для выполнения одной работы j-го вида;

$\varphi_j \geq 1$ — число работ j-го вида;

$p > 0$ — максимально возможное число типов технических средств в составе системы.

Найти: Состав системы, который позволил бы выполнить все работы с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если включаем в состав системы технические средства } i\text{-го типа} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$v_i \geq 0$, целые — число технических средств i-го типа в составе системы

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работы } j\text{-го вида выполняются техническими средствами } i\text{-го типа} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{i\in I}\left(f_i x_i + g_i v_i + \sum_{j\in J} \varphi_j c_{ij} z_{ij} \right)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I} z_{ij} = 1, \quad j \in J;$$

$$v_i = \sum_{j\in J} \varphi_j p_{ij} z_{ij}, \quad i \in I;$$

$$x_i \ge z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i\in I} x_i \le p;$$

$$z_{ij},\ x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Упражнение 1. Усовершенствовать модель для случая ненулевого начального состава системы $V_i^0 \ge 0$, $i \in I$.

Упражнение 2. Построить модель для случая последовательного выполнения работ.

Двухуровневая задача размещения

Дано: $I = \{1,\ldots, m\}$ — множество мест, где можно открыть производство некоторой продукции;

$J = \{1,\ldots, n\}$ — множество потребителей этой продукции (клиентов);

$f_i \geq 0$ — затраты на организацию производства в пункте i.

$c_{ij} \geq 0$ — производственно–транспортные расходы на удовлетворение спроса j-го клиента i-м предприятием.

$p > 0$ — максимально возможное число предприятий.

$d_{ij} \geq 0$ — предпочтения j-го клиента на множестве предприятий:

$\min_{i \in I} d_{ij}$ — наиболее желаемый поставщик;

$\max_{i \in I} d_{ij}$ — наименее желаемый поставщик.

Найти: Подмножество $S \subset I$, $| S | \le p$, открываемых предприятий, которые позволили бы удовлетворить спрос всех клиентов с минимальными суммарными затратами.

Переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если открываем предприятие } i, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если предприятие } i \text{ обслуживает клиента } j, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min\left\{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} z_{ij}^{*} + \sum_{i\in I} f_i x_i\right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I} x_i \le p;$$

$$x_i \in \{0,1\},\ \ i\in I,$$

где z_{ij}^{*} — оптимальное решение задачи потребителя:

$$\min \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} d_{ij} z_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\in I} z_{ij} = 1,\quad j\in J;$$

$$x_i \ge z_{ij},\quad i\in I,\quad j\in J;$$

$$z_{ij} \in \{0,1\},\ \ i\in I, j\in J.$$

Квадратичная задача о назначениях

Дано: $I = \{1,\ldots, n\}$ — множество зданий, где могут размещаться цеха;

$J = \{1,\ldots, n\}$ — множество производственных цехов;

a_{kl} — расстояние между зданиями $k, l \in I$;

b_{ij} — объем продукции, транспортируемый из цеха i в цех j, где $i, j \in J$.

Найти: Размещение цехов по зданиям, при котором суммарный объем перевозок продукции был бы минимальным.

Переменные задачи:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, \text{если цех } i \text{ размещается в здании } k, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{l \in I} \sum_{k \in I} a_{kl} b_{ij} x_{ik} x_{jl}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in J} x_{ik} = 1, \text{ для всех } k \in I;$$

$$\sum_{k \in I} x_{ik} = 1, \text{ для всех } i \in J;$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, \; i \in J, \; k \in I.$$

Генетический алгоритм для задач размещения

Идея заимствована у живой природы и состоит в организации эволюции, целью которой является получение оптимального решения в сложной комбинаторной задаче:

$$\mathbf{min}\{\, f(S),\ S \in Sol \}.$$

Начальная популяция $P = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — набор допустимых решений исходной задачи.

Шаг эволюции: выбираем из популяции два решения, скрещиваем их, применяем мутацию, локальную перестройку и добавляем в популяцию, затем наихудшее решение удаляем из популяции.

Общая схема алгоритма

1. Выбрать начальную популяцию P и запомнить рекорд $F^* = \min\limits_{i=1,\dots,k} f(S_i)$.
2. Пока не выполнен критерий остановки делать следующее:
   2.1. Выбрать “родителей” S_{i_1}, S_{i_2} из популяции.
   2.2. Применить к S_{i_1}, S_{i_2} оператор скрещивания и получить новое решение S'.
   2.3. Применить к S' оператор мутации и получить новое решение S''.
   2.4. Применить к S'' оператор локального улучшения и получить новое решение S'''.
   2.5. Если $f(S''') < F^*$, то сменить рекорд $F^* := f(S''')$.
   2.6. Добавить S''' к популяции и удалить из нее наихудшее решение.

Оператор скрещивания

Пусть S_1, S_2 — два решения, задаваемые векторами $X^1, X^2 \in \{0,1\}^n$.

Одноточечный оператор скрещивания: выбираем случайным образом координату $1 \le l \le n$ и новый вектор X' получает первые l координат от вектора X^1, а остальные от вектора X^2.

$$
\begin{array}{rl}
X^1: & (0\ 1\ 0\ 0 \mid 1 \ldots 0\ 1\ 1) \\
X^2: & (1\ 1\ 0\ 1 \mid 0 \ldots 1\ 1\ 1) \\
X': & (\underbrace{0\ 1\ 0\ 0}_{l} \mid 0 \ldots 1\ 1\ 1)
\end{array}
$$

Аналогично определяется двухточечный, трехточечный и т.д. операторы.

Равномерный оператор скрещивания: новое решение X' в каждой координате получает с вероятностью 0.5 значение одного из родителей.

Выбор родителей

Турнирная селекция: из популяции P случайным образом выбирается некоторое подмножество $P' \subseteq P$ и родителем назначается наилучшее решение в P':

$$S_i = \min_{S \in P'} f(S).$$

Пропорциональная селекция: из популяции P случайным образом выбираются два родителя. Для решения S_i вероятность быть выбранным обратно пропорциональна значению целевой функции $f(S_i)$.

Варианты: Лучший в популяции + случайно выбранный.

Случайно выбранный + наиболее удаленный от него и др.

Оператор мутации

Вероятностный оператор мутации случайным образом вносит изменения в допустимое решение задачи. Например, с малой вероятностью $q < \frac{1}{n}$ в каждой координате значение $X_i \in \{0,1\}$ заменяется на противоположное $1 - X_i$. Если в решении требуется сохранить $\sum_{i \in I} x_i = p$, то случайным образом выбирается координата i_1 такая, что $X_{i_1} = 1$ и координата i_2 такая, что $X_{i_2} = 0$ и производится замена $X_{i_1} := 0,\ X_{i_2} := 1$.

$$X' = (0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ldots\ 0\ \ 1\ \ 1\,)$$

$$X'' = (1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ldots\ 0\ \ 1\ \ 1\,)$$

$$i_1 \qquad\qquad i_2$$

Локальное улучшение

Для решения S обозначим через $N(S)$ его окрестность, например, множество всех решений S', находящихся от S на расстоянии не более 2 (3, 4, 5…)

Алгоритм локального спуска

1. Положить $S := S''$;
2. Найти в окрестности решения S наилучшего соседа $\bar{S}$

$$f(\bar{S}) = \min\{f(\hat{S}), \hat{S} \in N(S)\};$$

3. Если $f(\bar{S}) < f(S)$, то положить $S := \bar{S}$ и вернуться на шаг 2, иначе STOP, получен локальный минимум.

Задачи размещения в условиях конкуренции

$I = \{1,\ldots, m\}$ — множество пунктов размещения;

$J = \{1,\ldots, n\}$ — множество клиентов;

c_{ij} — расстояние от пункта i до клиента j;

f_i — стоимость открытия предприятия в пункте i для первого ЛПР;

g_i — стоимость открытия предприятия в пункте i для второго ЛПР;

d_j — доход от обслуживания клиента j;

Сначала ЛПР$_1$ принимает решение об открытии своих предприятий. Затем, зная это решение, ЛПР$_2$ открывает свои предприятия так, чтобы получить максимальный доход. Клиент знает оба решения и выбирает ближайшее к себе предприятие. Задача состоит в том, чтобы найти решение для ЛПР$_1$ с максимальных доходом.

Переменные задачи

$$z_i = \begin{cases} 1, \textit{если ЛПР}_1 \textit{ открыл предприятие в пункте } i \\ 0 \quad \textit{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 0, \textit{если ЛПР}_2 \textit{ открыл предприятие в пункте } i \\ 1 \quad \textit{в противном случае} \end{cases}$$

Для вектора z положим

$I_j(z) = \{i \in I \mid c_{ij} < \min(c_{kj} \mid z_k = 1)\}$ — множество пунктов размещения которые находятся ближе к клиенту j, чем ближайшее открытое предприятие, принадлежащие ЛПР$_1$.

Математическая модель

$$\max_z \left\{ \sum_{j\in J} d_j \prod_{i\in I_j(z)} x_i^* - \sum_{i\in I} f_i z_i \right\}$$

при ограничениях $z_i \in \{0,1\}$, $i \in I$

и x^* — оптимальное решение задачи ЛПР$_2$:

$$\max_x \left\{ \sum_{j\in J} d_j (1 - \prod_{i\in I_j(z)} x_i) - \sum_{i\in I} g_i (1 - x_i) \right\}$$

при ограничениях $z_i + (1 - x_i) \le 1$, $i \in I$, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$.

Задача ЛПР$_2$ является экстремальным ограничением в задаче ЛПР$_1$.

Принятие решений путем голосования

Пусть в районе размещается p школ (больниц, Интернет-центров, …).

$I = \{1,\ldots, m\}$ — множество возможных пунктов размещения;

$J = \{1,\ldots, n\}$ — множество клиентов (учащихся, …);

c_{ij} — матрица предпочтений (расстояний от i до j, чем меньше, тем лучше)

ЛПР$_1$ выдвигает проект $z_i \in \{0,1\}$, $\sum_{i\in I} z_i = p$, и хочет получить его одобрение.

ЛПР$_2$ — оппозиция, которая хочет "провалить" проект Z и выставляет свой проект X, зная проект Z.

Решение принимается голосованием.

Клиент отдает свой голос за тот проект, который ему "ближе".

Математическая модель

$$\max_{z} \sum_{j \in J} d_j \prod_{i \in I_j(z)} x_i^*$$

при ограничениях $z_i \in \{0,1\}$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} z_i = p$,

и x^* — оптимальное решение задачи:

$$\max_{x} \sum_{j \in J} (1 - \prod_{i \in I_j(z)} x_i)$$

при ограничениях $x_i \in \{0,1\}$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} (1 - x_i) = p$.

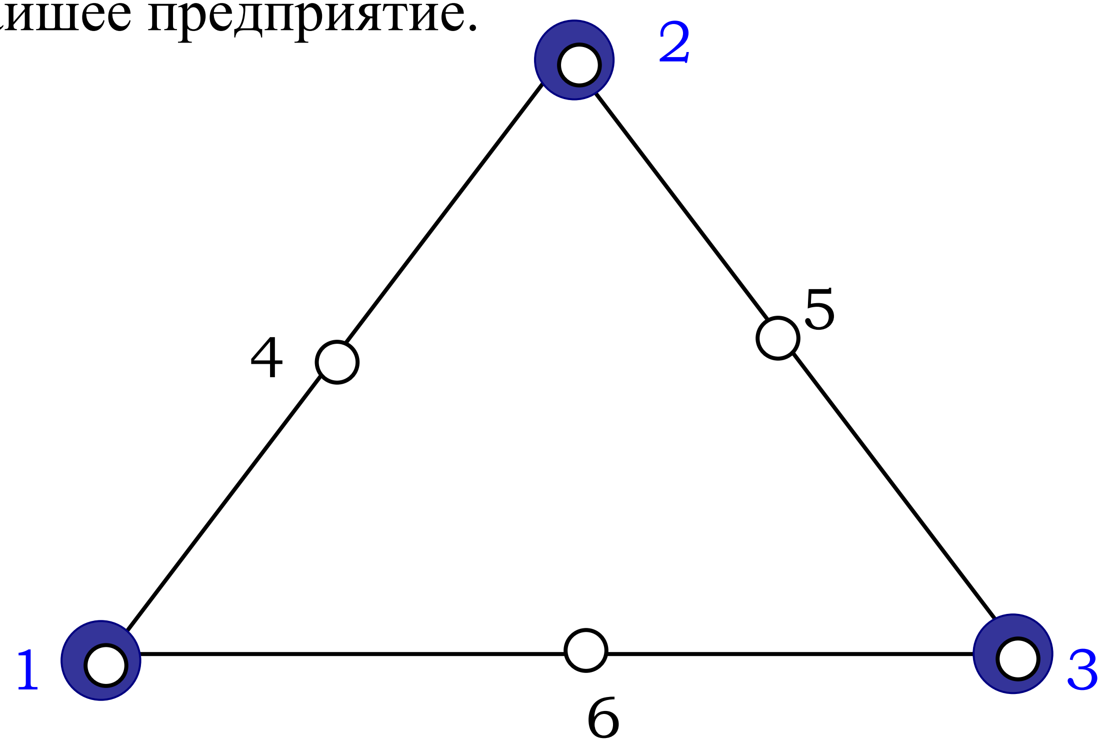
Если ЛПР$_1$ набрал больше половины голосов, то он “победил”.

«Безнадежный» пример

$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — места размещения предприятий;

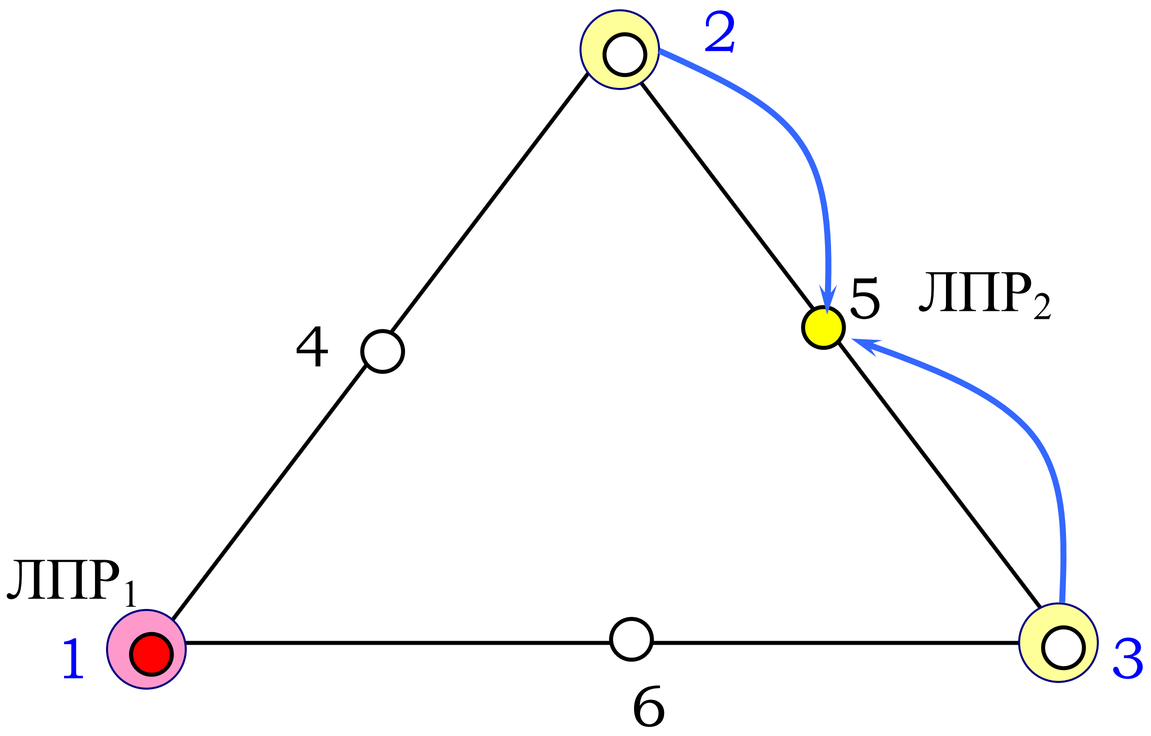
$J = \{1, 2, 3\}$ — клиенты.

Клиенты выбирают ближайшее предприятие.

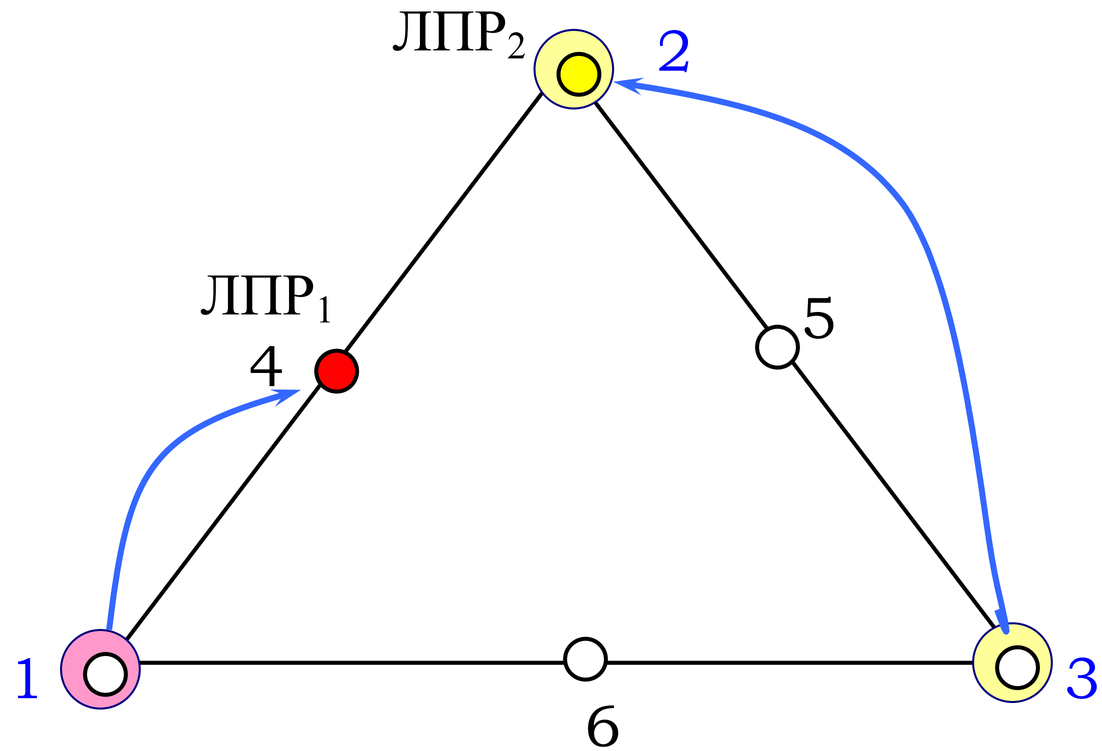


При $p = 1$ ЛПР$_1$ всегда проигрывает!

Если ЛПР$_1$ ставит предприятие в вершине треугольника, то ЛПР$_2$ ставит свое предприятие на противоположной стороне треугольника и захватывает двух клиентов, в то время как ЛПР$_1$ получает только одного.



Если ЛПР$_1$ ставит предприятие на стороне треугольника, то ЛПР$_2$ ставит свое предприятие в соседней вершине треугольника и тоже захватывает двух клиентов, в то время как ЛПР$_1$ получает только одного



Задача о $(r|p)$-центроиде

$I = \{1,\dots, m\}$ — множество возможных пунктов размещения;

$J = \{1,\dots, n\}$ — множество клиентов;

p — число предприятий размещаемых Лидером

r — число предприятий размещаемых Конкурентом

r_j — доход от обслуживания клиента j

g_{ij} — матрица расстояний от предприятия i до клиента j

Найти: открыть p предприятий Лидера, так чтобы максимизировать его суммарный доход

Задача о *(r|p)*-центроиде

Переменные задачи

Лидер $x_i = \begin{cases} 1, \textit{если Лидер открыл предприятие в пункте i} \\ 0 \ \textit{в противном случае} \end{cases}$

Конкурент $y_i = \begin{cases} 1, \textit{если Кокурент открывает в пункте i,} \\ 0, \ \textit{в противном случае} \end{cases}$

Клиенты $u_j = \begin{cases} 1, \textit{если клиент } j \textit{ обслуживается Лидером,} \\ 0, \ \textit{если клиент } j \textit{ обслуживается Конкурентом.} \end{cases}$

Для заданного решения x_i, $i \in I$ определим множество

$$I_j(x) = \{i \in I \mid g_{ij} < \min_{k \in I}(g_{kj} \mid x_k = 1)\} \; .$$

Задача о *(r|p)*-центроиде

Математическая модель

$$\max_x \sum_{j\in J} r_j u_j(x_i, y_i^*)$$

при ограничениях $$\sum_{i\in I} x_i = p,\ x_i\in\{0,1\},\ i\in I,$$

где $u = (u_1(x_i, y_i^*),\ldots,u_{|J|}(x_i, y_i^*))$ оптимальное решение задачи Конкурента:

$$\max_{u_j, y_i} \sum_{j\in J} r_j(1-u_j)$$

при ограничениях $$1-u_j \le \sum_{i\in I_j(x)} y_i,\ j\in J$$

$$\sum_{i\in I} y_i = r$$

$$x_i + y_i \le 1,\quad i\in I;\ y_i,\ u_j\in\{0,1\}, i\in I, j\in J$$

http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/Competitive/p_med_comp.html

Результаты экспериментов показывают, что при небольших значениях параметра p Лидер проигрывает

n=m=100, p=r=5, $r_j \in (0{,}200)$		n=m=50, r=7, $r_j = 1$	
пример	доля рынка Лидера (в %)	p	доля рынка Лидера (в %)
111	47,63	1	2
211	45,84	2	6
311	45,08	3	16
411	47,12	4	28
511	44,85	5	36
611	47,10	6	44
711	46,01	7	52
811	46,08	8	58
911	45,21	9	62
1011	48,14	10	66